STUDIA MATHEMATICA, T. XXVIII. (1967)

# Sur le comportement asymptotique de processus de Markov non homogènes

par

BÙI-TRỌNG-LIỄU et M. DOREL (Lille)

Dans son article [3] cité en référence ci-dessous, Koźniewska a étudié diverses notions d'ergodicité et de stationnarité des processus de Markov non homogènes à un nombre fini d'états. Cette étude fait d'ailleurs suite à une précédente (cf. [2]) sur des processus de Markov non homogènes à deux états possibles. Il nous a paru intéressant d'étendre les résultats obtenus, aux processus de Markov plus généraux, et c'est l'objet de la présente publication.

Il y a lieu de préciser ici la terminologie employée (le sens du terme "processus" varie en effet suivant des auteurs): Soient $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ et $(\mathscr{X}', \mathscr{B}')$ deux espaces mesurables, $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$) étant une tribu (ou $\sigma$-algèbre) de parties de $\mathscr{X}$ (resp. de $\mathscr{X}'$). On appelle *probabilité de transition* dont le domaine de définition est $\big((\mathscr{X}, \mathscr{B}), (\mathscr{X}', \mathscr{B}')\big)$ une application $P: \mathscr{X}\times\mathscr{B}' \to [0,1]$ telle que $\forall x\in\mathscr{X}$, $P(x,\cdot)$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{B}'$ et que $\forall A\in\mathscr{B}'$, $P(\cdot, A)$ est une variable aléatoire réelle définie sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. Nous appelons *processus de Markov* (non homogène à temps discret) que nous noterons $\{(\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in\boldsymbol{N}}$, $\boldsymbol{N}$ désignant l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, la donnée d'une suite d'espaces mesurables $\{(\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t)\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ appelés *espaces des états*, et d'une suite de probabilités de transition $\{P_{t,t+1}\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ telle que $\forall t\in\boldsymbol{N}$, $P_{t,t+1}$ ait pour domaine de définition $\big((\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t), (\mathscr{X}_{t+1}, \mathscr{B}_{t+1})\big)$.

Pour plus de commodité, convenons de noter $\mu(dx)$ à la place de $d\mu(x)$ lorsque nous avons affaire à une mesure $\mu$, comme cela se fait couramment. Cette manière de noter a l'avantage d'éviter des confusions par exemple entre $x$ et $y$ dans $P_{t,t+1}(x, dy)$. Ceci étant, $\forall (s,t)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ tels que $s<t$, considérons l'application $P_{s,t}$: $\mathscr{X}_s\times\mathscr{B}_t\to[0,1]$ définie par

$$P_{s,t}(x, A) = \int\limits_{\mathscr{X}_{s+1}} P_{s,s+1}(x, dx_{s+1}) \int\limits_{\mathscr{X}_{s+2}} P_{s+1,s+2}(x_{s+1}, dx_{s+2}) \ldots$$
$$\ldots \int\limits_{\mathscr{X}_{t-1}} P_{t-1,t}(x_{t-1}, A), \quad \forall (x, A)\in\mathscr{X}_s\times\mathscr{B}_t.$$

Il est clair que $P_{s,t}$ ainsi définie est une probabilité de transition dont le domaine de définition est $((\mathscr{X}_s, \mathscr{B}_s), (\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t))$ et que $\forall s, u, t \in \boldsymbol{N}$ tels que $s < u < t$,

$$P_{s,t}(x, A) = \int_{\mathscr{X}_u} P_{s,u}(x, dy) P_{u,t}(y, A), \qquad \forall (x, A) \in \mathscr{X}_s \times \mathscr{B}_t.$$

Les processus de Markov que nous étudierons ci-dessous seront tels que $\forall t \in \boldsymbol{N}$, $\mathscr{X}_t = \mathscr{X}$ et que $\bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t$ qui — nous le savons — est encore une tribu de parties de $\mathscr{X}$, n'est pas réduite à la tribu $\{\emptyset, \mathscr{X}\}$. Dans le cas particulier où, de plus, $\mathscr{B}_t = \mathscr{B}$, $\forall t \in \boldsymbol{N}$ et que $P_{t,t+1} = P$, le processus de Markov sera dit *homogène*. Dans ce cas particulier, $P_{s,t}$ ne dépend que de $t-s$; elle sera notée $P_{t-s}$. Nous noterons alors le processus de Markov homogène par $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n \in \boldsymbol{N}^*}$, $\boldsymbol{N}^*$ désignant l'ensemble des entiers $> 0$.

Il est à signaler que pour des auteurs, “homogène” et “stationnaire” sont synonymes. Aussi, pour éviter toute confusion à ce qui va suivre, nous ajouterons un K devant les termes “stationnaire” et “ergodique” pour marquer le sens spécial donné à ces mots (K-stationnaire et K-ergodique signifient stationnaire et ergodique au sens de Koźniewska ou de Kolmogorov).

Le présent article comporte quatre paragraphes dont le premier est consacré à la K-ergodicité faible, le second, à la K-ergodicité forte et ses liens avec la K-ergodicité faible, le troisième, aux diverses notions de K-stationnarité et leurs liens avec les notions de K-ergodicité, et enfin le quatrième, à l'étude du cas particulier des processus de Markov à un nombre fini d'états où nous retrouvons les résultats de [3]. Ces quatre paragraphes contiennent également un examen du cas particulier des processus de Markov homogènes.

**I. Processus de Markov K-faiblement ergodiques.** Dans ce paragraphe, comme dans les suivants, nous ne nous intéresserons qu'aux processus de Markov non homogènes $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \boldsymbol{N}}$ où les tribus $\mathscr{B}_t$ de parties de $\mathscr{X}$ sont telles que la tribu intersection $\bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t$ ne soit pas réduite à $\{\emptyset, \mathscr{X}\}$.

I.1. Définition. Un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \boldsymbol{N}}$ est dit *K-faiblement ergodique* si $\forall s \in \boldsymbol{N}$, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall y \in \mathscr{X}$, et $\forall A \in \bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t$,

$$\text{(I.1.1)} \qquad \lim_{t \to +\infty} [P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(y, A)] = 0.$$

Et étudions maintenant les propriétés de ces processus de Markov K-faiblement ergodiques.

I.2. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov* $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \boldsymbol{N}}$ *soit K-faiblement ergodique est qu'il existe, pour tout* $s \in \boldsymbol{N}$, *une suite de mesures de probabilité* $\{\pi_{s,t}\}_{t \in \boldsymbol{N}, s<t}$, *chaque* $\pi_{s,t}$ *étant définie sur* $\mathscr{B}_t$, *telles que* $\forall x \in \mathscr{X}$ *et* $\forall A \in \bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t$,

$$\text{(I.2.1)} \qquad \lim_{t \to +\infty} [P_{s,t}(x, A) - \pi_{s,t}(A)] = 0.$$

Démonstration. 1° La condition est suffisante. Nous avons, $\forall s \in \boldsymbol{N}$, une suite de mesures de probabilité $\{\pi_{s,t}\}_{t \in \boldsymbol{N}, s<t}$ vérifiant (I.2.1). Alors, $\forall A \in \bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t$, $\forall x \in \mathscr{X}$ (resp. $\forall y \in \mathscr{X}$), $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t_0(\varepsilon, A, x) \in \boldsymbol{N}^*$ (resp. $\exists t_0(\varepsilon, A, y) \in \boldsymbol{N}^*$) tel que $t > t_0(\varepsilon, A, x) \Rightarrow |P_{s,t}(x, A) - \pi_{s,t}(A)| < \varepsilon/2$ (resp. $t > t_0(\varepsilon, A, y) \Rightarrow |P_{s,t}(y, A) - \pi_{s,t}(A)| < \varepsilon/2$). En prenant $t_0(\varepsilon, A, x, y) = \operatorname{Max}[t_0(\varepsilon, A, x), t_0(\varepsilon, A, y)]$, nous avons immédiatement

$$t > t_0(\varepsilon, A, x, y) \Rightarrow |P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(y, A)| < \varepsilon.$$

2° La condition est nécessaire. Supposons que (I.1.1) soit vérifiée. Pour $s \in \boldsymbol{N}$, soit une mesure de probabilité $\mu_s$ sur la tribu $\mathscr{B}_s$. Posons

$$\pi_{s,t}(A) = \int_{\mathscr{X}} \mu_s(dx) P_{s,t}(x, A), \qquad \forall A \in \mathscr{B}_t.$$

Il est clair que $\pi_{s,t}$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{B}_t$. Nous avons, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall A \in \bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t$,

$$\begin{aligned}\lim_{t \to +\infty} [P_{s,t}(x, A) - \pi_{s,t}(A)] &= \lim_{t \to +\infty} \Big[P_{s,t}(x, A) - \int_{\mathscr{X}} \mu_s(dy) P_{s,t}(y, A)\Big] \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int_{\mathscr{X}} [P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(y, A)] \mu_s(dy) \\ &= \int_{\mathscr{X}} \lim_{t \to +\infty} [P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(y, A)] \mu_s(dy),\end{aligned}$$

d'après le théorème de Lebesgue, car $[P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(\cdot, A)]$ est une variable aléatoire sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B}_s)$ bornée par 1. D'où

$$\lim_{t \to +\infty} [P_{s,t}(x, A) - \pi_{s,t}(A)] = 0, \qquad \forall x \in \mathscr{X} \quad \text{et} \quad \forall A \in \bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t.$$

I.3. Proposition. *Si un processus de Markov* $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \boldsymbol{N}}$ *est K-faiblement ergodique, alors il existe une mesure de probabilité* $\mu$ *sur* $\mathscr{B}_0$ *telle que* $\forall s \in \boldsymbol{N}$, $\forall x \in \mathscr{X}$, *et* $\forall A \in \bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t$,

$$\text{(I.3.1)} \qquad \lim_{t \to +\infty} \Big[P_{s,t}(x, A) - \int_{\mathscr{X}} \mu(dy) P_{0,t}(y, A)\Big] = 0.$$

Démonstration. Le processus étant K-faiblement ergodique, la condition nécessaire de I.2 entraîne que la suite $\{\pi_{0,s}\}_{s\in N^*}$ de mesures de probabilité, définies à partir d'une mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathscr{B}_0$ par

$$\pi_{0,s}(A) = \int_{\mathscr{X}} \mu(dy)P_{0,s}(y, A), \qquad \forall A \in \mathscr{B}_s,$$

est telle que $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$,

$$\lim_{s\to+\infty} [P_{0,s}(x, A)-\pi_{0,s}(A)] = 0.$$

Or, $\forall s\in N^*$, $\pi_{0,s}$ est une mesure sur $\mathscr{B}_s$; la suite de mesures $\{\pi_{s,t}\}_{\substack{t\in N\\ s<t}}$ définies par

$$\pi_{s,t}(A) = \int_{\mathscr{X}} \pi_{0,s}(dy)P_{s,t}(y, A), \qquad \forall A \in \mathscr{B}_t,$$

est telle que $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$,

$$\lim_{t\to+\infty} [P_{s,t}(x, A)-\pi_{s,t}(A)] = 0,$$

toujours d'après la condition nécessaire de I.2. D'où

$$\lim_{t\to+\infty}\Big[P_{s,t}(x, A)-\int_{\mathscr{X}} \pi_{0,s}(dy)P_{s,t}(y, A)\Big]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\Big[P_{s,t}(x, A)-\int_{\mathscr{X}} \mu(dz)\int_{\mathscr{X}} P_{0,s}(z, dy)P_{s,t}(y, A)\Big]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\Big[P_{s,t}(x, A)-\int_{\mathscr{X}} \mu(dz)P_{0,t}(z, A)\Big] = 0, \quad \forall x\in\mathscr{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t.$$

Le passage de la deuxième égalité à la troisième est possible, grâce à la remarque suivante: puisque $P_{s,t}(\cdot, A)$ est une fonction numérique $\mathscr{B}_s$-mesurable et bornée, et puisque $\forall B\in\mathscr{B}_s$,

$$\int_{\mathscr{X}} 1_B(y)\pi_{0,s}(dy) = \pi_{0,s}(B) = \int_{\mathscr{X}} \mu(dz)P_{0,s}(z, B)$$
$$= \int_{\mathscr{X}} \mu(dz)\int_{\mathscr{X}} P_{0,s}(z, dy)1_B(y),$$

on a, d'après la définition de l'intégrale et le théorème de Lebesgue,

$$\int_{\mathscr{X}} \pi_{0,s}(dy)P_{s,t}(y, A) = \int_{\mathscr{X}} \mu(dz)\int_{\mathscr{X}} P_{0,s}(z, dy)P_{s,t}(y, A).$$

I.4. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ soit K-faiblement ergodique est que* $\forall s\in N$, $\exists v(s)\in N$ *tel qu'il existe une mesure de probabilité $\mu_v$ sur $\mathscr{B}_v$ pour laquelle*

$$\lim_{t\to+\infty}\Big[P_{s,t}(x, A)-\int_{\mathscr{X}} \mu_v(dy)P_{v,t}(y, A)\Big] = 0,$$

$\forall x\in\mathscr{X}$ *et* $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$.



Démonstration. 1° La condition est nécessaire. En remarquant, dans la démonstration de I.3, que

$$\int_{\mathscr{X}} \mu(dz)P_{0,t}(z, A) = \int_{\mathscr{X}} \pi_{0,v}(dy)P_{v,t}(y, A),$$

pour $v\in N^*$ tel que $v<t$, nous pouvons énoncer que, si le processus est K-faiblement ergodique, il existe, $\forall s\in N$, $\forall v\in N$, une mesure de probabilité $\mu_v$ sur $\mathscr{B}_v$ telle que $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$,

$$\lim_{t\to+\infty}\Big[P_{s,t}(x, A)-\int_{\mathscr{X}} \mu_v(dy)P_{v,t}(y, A)\Big] = 0,$$

en prenant $\mu_v = \pi_{0,v}$ pour $v>0$, et $\mu_v=\mu$ pour $v=0$.

2° La condition est suffisante. Elle se ramène à celle de I.2, en posant $\forall s\in N$, $\forall t\in N$, $t>s$, et $\forall A\in\mathscr{B}_t$

$$\pi_{s,t}(A) = \begin{cases} \int_{\mathscr{X}} \mu_v(dy)P_{v,t}(y, A) & \text{pour} \quad v<t, \\ \mu_t(A) & \text{pour} \quad t\leqslant v, \end{cases}$$

où $\mu_t$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{B}_t$.

I.5. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ soit K-faiblement ergodique est que $\forall s\in N$, $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$, pour toute suite croissante d'indices $\{t_k\}_{\substack{k\in N\\ s<t_k}}$ telle que $P_{s,t_k}(x, A)$ converge quand $k\to+\infty$, $P_{s,t_k}(y, A)$ converge vers une limite quand $k\to+\infty$, $\forall y\in\mathscr{X}$, et*

$$\lim_{k\to+\infty} P_{s,t_k}(x, A) = \lim_{k\to+\infty} P_{s,t_k}(y, A).$$

Démonstration. 1° La condition est nécessaire. Le processus étant K-faiblement ergodique, nous avons d'après I.3,

$$\lim_{t\to+\infty}\Big[P_{s,t}(x, A)-\int_{\mathscr{X}} \mu(dy)P_{0,t}(y, A)\Big] = 0, \qquad \forall s\in N,\ \forall x\in\mathscr{X},\ \forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t.$$

Or, d'après la compacité de $[0, 1]$, pour $s$, $x$ et $A$ fixés, il existe une suite croissante d'indices $\{t_k\}_{k\in N}$ dépendant de $s$, $x$, $A$, telle que la sous-suite $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in N}$ converge. Posons maintenant

$$Q_s^{\{k\}}(x, A) = \lim_{k\to+\infty} P_{s,t_k}(x, A)$$

(l'indice $k$ dans l'écriture de $Q_s^{\{k\}}(x, A)$ symbolise la dépendance d'une telle limite au choix de la suite $\{t_k\}_{k\in N}$ considérée). L'existence de la limite de $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in N}$ et la relation (I.3.1) entraînent l'existence et l'égalité de la limite de la suite

$$\Big\{\int_{\mathscr{X}} \mu(dy)P_{0,t_k}(y, A)\Big\}_{k\in N}.$$

Par suite, l'existence de la limite de

$$\Big\{\int_{\mathscr{X}} \mu(dy)P_{0,t_k}(y, A)\Big\}_{k\in N}$$

et la relation (I.3.1) vraie pour tout $x$ entraînent que l'ensemble des suites croissantes d'indices $\{t_k\}_{k\in N}$ telles que $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in N}$ converge vers une limite, est indépendant de $x$, et que pour une telle suite $\{t_k\}_{k\in N}$,

$$Q_s^{\{k\}}(x, A) = Q_s^{\{k\}}(x', A), \qquad \forall x \text{ et } x' \in \mathscr{X}.$$

Donc, $Q_s^{\{k\}}(x, A) = \pi_s^{\{k\}}(A), \forall x \in \mathscr{X}$, où $\pi_s^{\{k\}}(A)$ est indépendant de $x$.

2° La condition est suffisante. Par hypothèse, si $\{t_k\}_{k\in N}$ est une suite croissante d'indices telle que $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in N}$ soit convergente, alors $\forall x' \in \mathscr{X}$, $\{P_{s,t_k}(x', A)\}_{k\in N}$ est convergente et

$$\lim_{k\to+\infty} P_{s,t_k}(x, A) = \lim_{k\to+\infty} P_{s,t_k}(x', A).$$

Considérons la suite $\{P_{s,t}(x, A)-P_{s,t}(x', A)\}_{\substack{t\in N\\ s<t}}$, où $x \neq x'$. Alors, comme $-1 \leqslant P_{s,t}(x, A)-P_{s,t}(x', A) \leqslant +1$, $\forall t \in N$, $s < t$, et à cause de la compacité de $[-1, +1]$, il existe une sous-suite convergente extraite de cette suite. Soit $\{P_{s,t_k}(x, A)-P_{s,t_k}(x', A)\}_{k\in N}$ cette sous-suite. On a donc

$$\lim_{k\to+\infty} [P_{s,t_k}(x, A)-P_{s,t_k}(x', A)] = a.$$

Si nous considérons la suite $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in N}$, alors on peut en extraire une sous-suite convergente $\{P_{s,t_{k_m}}(x, A)\}_{m\in N}$. Par hypothèse, $\forall x' \in \mathscr{X}$, $\{P_{s,t_{k_m}}(x', A)\}_{m\in N}$ est convergente et

$$\lim_{m\to+\infty} P_{s,t_{k_m}}(x, A) = \lim_{m\to+\infty} P_{s,t_{k_m}}(x', A),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{m\to+\infty} [P_{s,t_{k_m}}(x, A)-P_{s,t_{k_m}}(x', A)] = 0.$$

D'où,

$$a = \lim_{k\to+\infty} [P_{s,t_k}(x, A)-P_{s,t_k}(x', A)] = \lim_{m\to+\infty} [P_{s,t_{k_m}}(x, A)-P_{s,t_{k_m}}(x', A)] = 0.$$



Donc toute sous-suite convergente extraite de la suite $\{P_{s,t}(x, A)-P_{s,t}(x', A)\}_{\substack{t\in N\\ s<t}}$ converge vers 0. D'où

$$\lim_{t\to+\infty} [P_{s,t}(x, A)-P_{s,t}(x', A)] = 0,$$

$\forall s \in N, \forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$ et $\forall x$ et $x' \in \mathscr{X}$, ce qui traduit la K-ergodicité faible.

**II. Processus de Markov K-fortement ergodiques.** Dans ce paragraphe, comme dans le précédent, il est supposé que les processus de Markov étudiés sont tels que $\bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t \neq \{\emptyset, \mathscr{X}\}$.

II.1. Définition. Un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ est dit *K-fortement ergodique* si

$$\lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A) = \pi(A),$$

$\forall s \in N$, $\forall x \in \mathscr{X}$ et $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$, où $\pi_s$ est une probabilité sur $\bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$, indépendante de $x$.

II.2. Proposition. *Si un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ est K-fortement ergodique, alors*

$$\lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A) = \pi(A),$$

$\forall s \in N, \forall x \in \mathscr{X}$, *et* $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$.

Démonstration. Soient deux instants $s$ et $u$ différents. La K-ergodicité forte montre que $\forall x \in \mathscr{X}$ et $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$,

$$\lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A) = \pi_s(A) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} P_{u,t}(x, A) = \pi_u(A).$$

Comme $\{P_{s,t}(\cdot, A)\}_{\substack{t\in N\\ s<t}}$ forme une suite de variables aléatoires bornées, définies sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B}_s)$, convergeant vers $\pi_s(A)$, le théorème de Lebesgue montre que (en supposant $u < s$)

$$\pi_u(A) = \lim_{t\to+\infty} P_{u,t}(y, A) = \lim_{t\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} P_{u,s}(y, dx)P_{s,t}(x, A)$$
$$= \int_{\mathscr{X}} P_{u,s}(y, dx) \lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A) = \int_{\mathscr{X}} P_{u,s}(y, dx)\pi_s(A) = \pi_s(A).$$

Un raisonnement analogue pour le cas $u > s$, montre que $\pi_u = \pi_s = \pi$ et la proposition se trouve ainsi établie.

Il est clair que

II.3. Proposition. *La K-ergodicité forte entraîne la K-ergodicité faible.*

Introduisons maintenant une autre notion de K-ergodicité: la K-ergodicité de degré $a$, avec $0 < a \leqslant 1$.

II.4. **Définition.** Un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ est dit *K-ergodique de degré* $a$, où $0 < a \leqslant 1$, si $\forall s \in N$, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall y \in \mathscr{X}$, et $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - P_{s,s+n}(y, A)] = 0,$$

et s'il existe un entier positif $t_0(s, A)$ et un réel positif $K(s, A)$ tels que $t > t_0(s, A)$ implique

$$\left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - P_{s,s+n}(y, A)] \right| \leqslant K(s, A).$$

Il est immédiat que

II.5. Proposition. *La K-ergodicité de degré* $a \in ]0, 1]$ *entraîne la K-ergodicité de degré* $a' \in ]0, 1]$, *si* $a < a'$.

II.6. Proposition. *La K-ergodicité faible (et par conséquent, la K-ergodicité forte) entraîne la K-ergodicité de degré* $a = 1$.

**Démonstration.** Dire que la processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ est K-faiblement ergodique veut dire que $\forall s \in N$, $\forall (x, y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ et $\forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t$, $[P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(y, A)] \to 0$ quand $t \to +\infty$. Or nous savons que la convergence ordinaire entraîne la convergence au sens de Cesaro, d'où

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - P_{s,s+n}(y, A)] = 0.$$

D'autre part, il est clair que $\forall t \in N$,

$$\left| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - P_{s,s+n}(y, A)] \right| \leqslant \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} |P_{s,s+n}(x, A) - P_{s,s+n}(y, A)| \leqslant 1.$$

Ce qui entraîne la K-ergodicité de degré 1.

II.7. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov* $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ *soit K-ergodique de degré* $a$, *où* $0 < a \leqslant 1$, *est qu'il existe pour tout* $s \in N$, *une suite de probabilités* $\{\pi_{s,t}\}_{t\in N,\, s<t}$



*telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - \pi_{s,s+n}(A)] = 0, \quad \forall x \in \mathscr{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t,$$

*et qu'il existe un entier positif* $t_0(s, A)$ *et un réel positif* $K(s, A)$ *tels que* $t > t_0(s, A)$ *implique*

$$\left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - \pi_{s,s+n}(A)] \right| \leqslant K(s, A), \quad \forall x \in \mathscr{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t.$$

**Démonstration.** La suffisance de la condition découle de

$$\left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - P_{s,s+n}(y, A)] \right|$$
$$\leqslant \left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - \pi_{s,s+n}(A)] \right| + \left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(y, A) - \pi_{s,s+n}(A)] \right|,$$
$$\forall x \in \mathscr{X}, \forall y \in \mathscr{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t.$$

La condition est nécessaire. Soit $\{\mu_s\}_{s\in N}$ une suite de mesures de probabilité, telle que pour $s \in N$, $\mu_s$ soit définie sur $\mathscr{B}_s$.

Posons

$$\pi_{s,s+n}(A) = \int_{\mathscr{X}} \mu_s(dx) P_{s,s+n}(x, A), \quad \forall A \in \mathscr{B}_{s+n}.$$

Alors,

$$\left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} [P_{s,s+n}(x, A) - \pi_{s,s+n}(A)] \right|$$
$$\leqslant \left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} \left[ P_{s,s+n}(x, A) - \int_{\mathscr{X}} \mu_s(dy) P_{s,s+n}(y, A) \right] \right|$$
$$\leqslant \int_{\mathscr{X}} \left| \frac{1}{t^a} \sum_{n=1}^{t} \left[ P_{s,s+n}(x, A) - P_{s,s+n}(y, A) \right] \right| \mu_s(dy) \leqslant K(s, A),$$
$$\forall x \in \mathscr{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t\in N} \mathscr{B}_t.$$

D'autre part, le théorème de Lebesgue montre que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^a}\sum_{n=1}^{t}[P_{s,s+n}(x,A)-\pi_{s,s+n}(A)]$$

$$=\int_{\mathscr{X}}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^a}\sum_{n=1}^{t}[P_{s,s+n}(x,A)-P_{s,s+n}(y,A)]\mu_s(dy)=0.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Nous verrons au § IV, que la K-ergodicité de degré $a$ s'exprime très simplement dans le cas des processus de Markov à un nombre fini d'états, et que nous retrouverons dans ce cas particulier, les résultats correspondants de Koźniewska.

Etudions maintenant la K-ergodicité des processus de Markov homogènes, c'est-à-dire des processus de Markov tels que $\forall t\in N$, $\mathscr{B}_t=\mathscr{B}$ (et dans ce cas $\bigcap_{t\in N}\mathscr{B}_t=\mathscr{B}$); $\forall t\in N$, $\forall x\in\mathscr{X}$, et $\forall A\in\mathscr{B}$, $P_{t,t+1}(x,A)=P(x,A)$ (et dans ce cas $P_{s,t}(x,A)=P_{t-s}(x,A)$). Un processus de Markov homogène sera noté $\{(\mathscr{X},\mathscr{B}),P_n\}_{n\in N^*}$.

Nous avons besoin ici, de définitions un peu plus fortes que celles déjà données ci-dessus.

II.8. Definitions. Un processus de Markov homogène $\{(\mathscr{X},\mathscr{B}),P_n\}_{n\in N^*}$ est dit:

1° *K-faiblement et uniformément ergodique*, si $\forall x$ et $y\in\mathscr{X}$, $\forall A\in\mathscr{B}$, et $\forall\varepsilon>0$, il existe un entier positif $n_0(\varepsilon)$ tel que

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow|P_n(x,A)-P_n(y,A)|<\varepsilon.$$

2° *K-fortement et uniformément ergodique*, si $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall A\in\mathscr{B}$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier positif $n_0(\varepsilon)$ tel que

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow|P_n(x,A)-\pi(A)|<\varepsilon,$$

où $\pi$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{B}$.

Nous avons alors le résultat suivant:

II.9. Proposition. *Un processus de Markov homogène $\{(\mathscr{X},\mathscr{B}),P_n\}_{n\in N^*}$ K-faiblement et uniformément ergodique est K-fortement ergodique.*

Démonstration. La K-ergodicité faible et uniforme entraîne l'existence d'une suite de probabilités $\{\pi_n\}_{n\in N}$ définies sur $\mathscr{B}$ telle que

$$\forall x\in\mathscr{X}\quad\text{et}\quad\forall A\in\mathscr{B},\quad\lim_{n\to+\infty}[P_n(x,A)-\pi_n(A)]=0,\qquad(\text{cf. I.2}),$$

cette limite étant uniforme par rapport à $x$ et à $A$. En effet, prenons (d'après la condition nécessaire de I.2) la suite $\{\pi_n\}_{n\in N}$ définie par

$$\pi_n(A)=\int_{\mathscr{X}}\mu(dy)P_n(y,A),\qquad\forall A\in\mathscr{B},$$



où $\mu$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{B}$. Alors $\forall x$ et $y\in\mathscr{X}$, $\forall A\in\mathscr{B}$ et $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0(\varepsilon)\in N$ tel que $n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow|P_n(x,A)-P_n(y,A)|<\varepsilon$; ce qui montre que

$$|P_n(x,A)-\pi_n(A)|\leqslant\int_{\mathscr{X}}\mu(dy)|P_n(x,A)-P_n(y,A)|<\varepsilon.$$

De la suite $\{P_n(x,A)\}_{n\in N^*}$, on peut extraire une sous-suite $\{P_{n_k}(x,A)\}_{k\in N}$ convergente et par suite de la K-ergodicité faible, nous avons la convergence de la sous-suite $\{\pi_{n_k}(A)\}_{k\in N}$ et celle de la sous-suite $\{P_{n_k}(y,A)\}_{k\in N}$ pour tout $y\in\mathscr{X}$ et l'égalité des limites, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to+\infty}P_{n_k}(x,A)=\lim_{k\to+\infty}\pi_{n_k}(A),$$

limite que nous noterons $\pi^{\{k\}}(A)$. Alors $\forall A\in\mathscr{B}$ et $\forall\varepsilon>0$, il existe un entier positif $n_k^0(\varepsilon,A)$ tel que

$$n_k\geqslant n_k^0(\varepsilon,A)\ \text{implique}\ |\pi_{n_k}(A)-\pi^{\{k\}}(A)|<\varepsilon/2.$$

D'autre part, d'après ce qui précède, $\forall x\in\mathscr{X}$ et $\forall A\in\mathscr{B}$, $\exists n_0(\varepsilon)\in N^*$ tel que $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ implique $|P_n(x,A)-\pi_n(A)|<\varepsilon/2$.

Posons

$$n_k^1(\varepsilon,A)=\operatorname{Max}[n_k^0(\varepsilon,A),n_0(\varepsilon)];$$

alors $n_k\geqslant n_k^1(\varepsilon,A)$ implique

$$\big||P_{n_k}(x,A)-\pi^{\{k\}}(A)|-|\pi_{n_k}(A)-\pi^{\{k\}}(A)|\big|\leqslant|P_{n_k}(x,A)-\pi_{n_k}(A)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|P_{n_k}(x,A)-\pi^{\{k\}}(A)|<\frac{\varepsilon}{2}+|\pi_{n_k}(A)-\pi^{\{k\}}(A)|<\varepsilon,$$

et ceci $\forall x\in\mathscr{X}$ dès que $n_k\geqslant n_k^1(\varepsilon,A)$. Donc

$$\lim_{k\to+\infty}P_{n_k}(x,A)=\pi^{\{k\}}(A)$$

uniformément par rapport à $x\in\mathscr{X}$. Par conséquent, $n>n_k^1(\varepsilon,A)$ implique

$$|P_n(x,A)-\pi^{\{k\}}(A)|\leqslant\int_{\mathscr{X}}P_{n-n_k^1}(x,dy)\,|P_{n_k^1}(y,A)-\pi^{\{k\}}(A)|<\varepsilon.$$

Donc, en notant $\pi(A)=\pi^{\{k\}}(A)$, $\forall A\in\mathscr{B}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}P_n(x,A)=\pi(A)$$

uniformément par rapport à $x\in\mathscr{X}$.

La fonction d'ensembles $\pi$ est, de manière évidente, une application de $\mathscr{B}$ dans $[0, 1]$, additive et telle que $\pi(\mathscr{X}) = 1$. Il nous reste à démontrer sa $\sigma$-additivité. Pour celà, montrons que $\pi$ satisfait à la propriété de continuité monotone séquentielle en $\emptyset$, c'est-à-dire que si $\{A_m\}_{m\in N}$ est une suite d'ensembles $\mathscr{B}$-mesurables telle que $A_m \downarrow \emptyset$ quand $m \to +\infty$, alors

$$\lim_{m\to+\infty} \pi(A_m) = 0.$$

D'après la définition de la K-ergodicité faible et uniforme, $\forall x$ et $y \in \mathscr{X}$, $\forall A \in \mathscr{B}$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in N^*$ tel que $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ implique $|P_n(x, A) - P_n(y, A)| < \varepsilon/2$. En particulier, $n = n_0(\varepsilon)$ implique $|P_{n_0}(x, A) - P_{n_0}(y, A)| < \varepsilon/2$, $\forall x$ et $y \in \mathscr{X}$, et $\forall A \in \mathscr{B}$. $P_{n_0}$ étant, $\forall x \in \mathscr{X}$, une mesure de probabilité sur $\mathscr{B}$, vérifie donc la propriété de continuité monotone séquentielle en $\emptyset$, c'est-à-dire il existe un $m_0(\varepsilon, n_0, x) \in N^*$ tel que $m \geqslant m_0(\varepsilon, n_0, x)$ implique $P_{n_0}(x, A_m) < \varepsilon/2$. Puisque les $m_0(\varepsilon, n_0, x)$ sont des entiers positifs, il existe au moins un $z \in \mathscr{X}$ tel que

$$m_0(\varepsilon, n_0, z) = \inf_{x\in\mathscr{X}} m_0(\varepsilon, n_0, x) = m_0(\varepsilon, n_0).$$

Pour un tel $z$, on a donc $\forall y \in \mathscr{X}$ et $\forall m \in N^*$,

$$|P_{n_0}(z, A_m) - P_{n_0}(y, A_m)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où $m \geqslant m_0(\varepsilon, n_0)$ implique

$$P_{n_0}(y, A_m) < \frac{\varepsilon}{2} + P_{n_0}(z, A_m) < \varepsilon, \qquad \forall y \in \mathscr{X}.$$

Par suite, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\exists n_0(\varepsilon)$ et $m_0(\varepsilon, n_0)$ tels que $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ et $m \geqslant m_0(\varepsilon, n_0)$ impliquent

$$P_n(x, A_m) = \int_{\mathscr{X}} P_{n-n_0}(x, dy) P_{n_0}(y, A_m) < \varepsilon.$$

Donc,

$$\lim_{m\to+\infty} \pi(A_m) = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Examinons maintenant les liens entre la classification des états d'un processus de Markov homogène telle qu'elle a été faite dans [1], et les diverses notions de K-ergodicité déjà introduites ci-dessus. Rappelons à ce propos qu'un processus de Markov homogène $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in N^*}$ est dit *vérifiant l'hypothèse* (D), s'il existe une mesure bornée $\varphi$ définie sur la tribu $\mathscr{B}$, avec $\varphi(\mathscr{X}) > 0$, un entier $\nu \in N^*$ et un $\varepsilon > 0$ tels que $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall A \in \mathscr{B}$, $P_\nu(x, A) \leqslant 1 - \varepsilon$ si $\varphi(A) \leqslant \varepsilon$.



Nous avons les résultats suivants:

II.10. Proposition. *Si un processus de Markov homogène $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in N^*}$ est K-fortement et uniformément ergodique, alors il n'a qu'un ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.*

Démonstration. La K-ergodicité forte et uniforme montre que $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall A \in \mathscr{B}$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in N$ tel que $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ implique $|P_n(x, A) - \pi(A)| < \varepsilon$, où $\pi$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{B}$. Par conséquent, $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ implique $P_n(x, A) < \pi(A) + \varepsilon$. Alors, le processus satisfait à l'hypothèse (D), car pour $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall A \in \mathscr{B}$, $\exists n_0(\varepsilon)$ tel que $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ implique $P_n(x, A) < \pi(A) + \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon$, si $\pi(A) \leqslant \varepsilon$. Or sous l'hypothèse (D), $\forall x \in \mathscr{X}$, il existe une probabilité $Q(x, \cdot)$ sur $\mathscr{B}$ telle que $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$Q(x, A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_k(x, A) \qquad \text{(cf. [1])}.$$

La K-ergodicité forte entraîne que $\forall x \in \mathscr{X}$, et $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x, A) = \pi(A) = Q(x, A).$$

Par conséquent (cf. [1], p. 214), il existe un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.

II.11. Proposition. *Soit un processus de Markov homogène $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in N^*}$ vérifiant l'hypothèse* (D). *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit K-fortement ergodique est qu'il n'ait qu'un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.*

Démonstration. Elle découle de la définition de la K-ergodicité forte et du fait que, sous l'hypothèse (D), une condition nécessaire et suffisante pour que le processus ait un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique est que $\lim_{n\to+\infty} P_n(x, A) = \pi(A)$, où $\pi$ est une probabilité sur $\mathscr{B}$.

En réalité, on obtient un résultat meilleur, et c'est ce que nous verrons au § III.

II.12. Proposition. *Soit un processus de Markov homogène $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in N^*}$ vérifiant l'hypothèse* (D). *Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus n'ait qu'un seul ensemble ergodique avec ou sans sous-ensembles cycliques est qu'il existe un $\alpha \in ]0, 1]$ tel que le processus soit K-ergodique de degré $\alpha$.*

Démonstration. La condition est nécessaire. La K-ergodicité de degré $\alpha$ entraîne la K-ergodicité de degré 1, c'est-à-dire $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall y \in \mathscr{X}$ et $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} [P_m(x, A) - P_m(y, A)] = 0.$$

L'hypothèse (D) entraîne, $\forall x \in \mathscr{X}$, l'existence de la probabilité $Q(x, \cdot)$ sur $\mathscr{B}$ telle que

$$Q(x, A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_m(x, A), \quad \forall A \in \mathscr{B}.$$

Ceci montre donc que $Q(x, \cdot) = Q(y, \cdot)$, $\forall x$ et $y \in \mathscr{X}$, c'est-à-dire que $Q(x, \cdot)$ est indépendante de $x$. Par conséquent, le processus n'a qu'un seul ensemble ergodique.

La condition est suffisante. Sous l'hypothèse (D), si le processus n'a qu'un seul ensemble ergodique (même avec des sous-ensembles cycliques), alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_m(x, A) = \pi(A),$$

et que cette limite est uniforme en $x$ et en $A$ (cf. [1]). D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ implique

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}[P_m(x, A) - P_m(y, A)]\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}[P_m(x, A) - \pi(A)]\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}[P_m(y, A) - \pi(A)]\right| < \varepsilon.$$

D'où la K-ergodicité de degré 1.

**III. Processus de Markov K-stationnaires.** Dans tout ce paragraphe, les processus de Markov étudiés seront supposés être tels que $\forall t \in \boldsymbol{N}$, $\mathscr{B}_t = \mathscr{B} \neq \{\emptyset, \mathscr{X}\}$. Il s'en suit évidemment que $\bigcap_{t\in\boldsymbol{N}} \mathscr{B}_t = \mathscr{B}$.

III.1. Définitions. Un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_{t,t+1}\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ est dit:

1° *K-stationnaire* s'il existe une mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathscr{B}$ telle que $\forall t \in \boldsymbol{N}$ et $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$\int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{t,t+1}(x, A) = \mu(A).$$

2° *K-asymptotiquement stationnaire*, s'il existe une mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathscr{B}$ telle que $\forall s \in \boldsymbol{N}$ et $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x, A) = \mu(A).$$



3° *K-asymptotiquement quasi-stationnaire*, s'il existe une mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathscr{B}$ telle que $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{t,t+1}(x, A) = \mu(A).$$

On a les propriétés suivantes, faciles à vérifier:

III.2. Proposition. *Tout processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_{t,t+1}\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ K-stationnaire est K-asymptotiquement stationnaire.*

En effet, on montre, par récurrence, que $\forall s \in \boldsymbol{N}$ et $t \in \boldsymbol{N}$, avec $s < t$,

$$\int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x, A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{B}.$$

Et par conséquent,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x, A) = \mu(A).$$

III.3. Proposition. *Tout processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_{t,t+1}\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ K-stationnaire est K-asymptotiquement quasi-stationnaire.*

La démonstration découle simplement de la définition III.1. La réciproque de cette proposition est fausse.

Examinons maintenant les relations entre les diverses notions de K-ergodicité et celles de K-stationnarité.

III.4. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_{t,t+1}\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ soit K-fortement ergodique est qu'il soit K-faiblement ergodique et K-asymptotiquement stationnaire.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Nous savons que tout processus de Markov K-fortement ergodique est K-faiblement ergodique. D'autre part, puisque $\forall A \in \mathscr{B}$, $\forall s \in \boldsymbol{N}$,

$$\lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A) = \pi(A),$$

où $\pi$ est une mesure de probabilité définie sur $\mathscr{B}$, en appliquant le théorème de Lebesgue à la suite de variables aléatoires bornées $\{P_{s,t}(\cdot, A)\}_{t\in\boldsymbol{N}, s<t}$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \pi(dx) P_{s,t}(x, A) = \int_{\mathscr{X}} \pi(dx) \lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A)$$
$$= \int_{\mathscr{X}} \pi(dx)\pi(A) = \pi(A).$$

D'où la K-stationnarité asymptotique.

La condition est suffisante. Le processus est K-asymptotiquement stationnaire, donc il existe une probabilité $\mu$ sur $\mathscr{B}$ telle que $\forall s \in \boldsymbol{N}$, et $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x, A) = \mu(A).$$

Le processus est K-faiblement ergodique, donc d'après I.5, $\forall s \in \boldsymbol{N}$, $\forall A \in \mathscr{B}$ et $\forall x \in \mathscr{X}$, toute sous-suite convergente $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ extraite de $\{P_{s,t}(x, A)\}_{\substack{t\in\boldsymbol{N}\\ s<t}}$ converge vers $\pi^{\{k\}}(A)$ indépendant de $s$ et de $x$, et de plus, $\forall y \in \mathscr{X}$,

$$\lim_{k\to+\infty} P_{s,t_k}(y, A) = \pi^{\{k\}}(A).$$

D'après la K-stationnarité asymptotique,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{s,t_k}(x, A) = \mu(A).$$

En appliquant le théorème de Lebesgue à la suite de variables aléatoires bornées $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in\boldsymbol{N}}$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{s,t_k}(x, A) = \int_{\mathscr{X}} \mu(dx)\pi^{\{k\}}(A) = \pi^{\{k\}}(A).$$

Donc $\pi^{\{k\}}(A) = \mu(A)$ quelle que soit la sous-suite convergente $\{P_{s,t_k}(x, A)\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ considérée. Ce qui entraîne que $\forall s \in \boldsymbol{N}$, $\forall x \in \mathscr{X}$ et $\forall A \in \mathscr{B}$, $\lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A) = \mu(A)$, c'est-à-dire la K-ergodicité forte du processus.

Enonçons enfin le résultat partiel suivant:

III.5. Proposition. *Une condition suffisante pour qu'un processus de Markov* $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_{t,t+1}\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ *soit K-fortement ergodique est qu'il soit*

1° *K-faiblement ergodique,*

2° *K-asymptotiquement quasi-stationnaire, c'est-à-dire tel qu'il existe une mesure de probabilité* $\mu$ *sur* $\mathscr{B}$ *telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{t,t+1}(x, A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{B},$$

3° *et tel que pour cette probabilité* $\mu$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{t=1}^{n-1} \Big[\int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{t-1,n}(x, A) - \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{t,n}(x, A)\Big] = 0, \quad \forall A \in \mathscr{B}.$$

Démonstration. La condition 3° s'écrit plus simplement

$$\lim_{n\to+\infty} \Big[\int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{0,n}(x, A) - \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{n-1,n}(x, A)\Big] = 0,$$



en remarquant que $\forall n \in \boldsymbol{N}^*$ $(n \geqslant 2)$,

$$\sum_{t=1}^{n-1} \Big[\int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{t-1,n}(x, A) - \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{t,n}(x, A)\Big] = \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{0,n}(x, A) - \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{n-1,n}(x, A).$$

Les conditions 2° et 3° entraînent que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P_{0,n}(x, A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{B}.$$

La condition 1° entraîne, par un raisonnement analogue à celui de la condition suffisante de III.4 pour le cas où $s = 0$, que

$$\lim_{n\to+\infty} P_{0,n}(x, A) = \mu(A), \quad \forall x \in \mathscr{X} \text{ et } \forall A \in \mathscr{B}.$$

D'après I.3, on a alors

$$\lim_{t\to+\infty} P_{s,t}(x, A) = \mu(A), \quad \forall s \in \boldsymbol{N}, \forall x \in \mathscr{X} \text{ et } \forall A \in \mathscr{B},$$

ce qui traduit la K-ergodicité forte du processus.

Examinons maintenant le cas particulier des processus de Markov homogènes $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in\boldsymbol{N}^*}$. Pour un tel processus, la K-stationnarité s'exprime par l'existence d'une mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathscr{B}$ telle que

$$\int_{\mathscr{X}} \mu(dx) P(x, A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{B}.$$

En d'autres termes, c'est l'existence d'une probabilité absolue stationnaire.

III.6. Proposition. *Tout processus de Markov homogène* $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ *vérifiant l'hypothèse* (D) *est K-stationnaire.*

La démonstration de cet énoncé découle du fait que tout processus de Markov homogène vérifiant (D) est tel que $\forall x \in \mathscr{X}$ et $\forall A \in \mathscr{B}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_m(x, A) = Q(x, A),$$

où $Q(x, \cdot)$ est, $\forall x \in \mathscr{X}$, une mesure de probabilité vérifiant la relation

$$\int_{\mathscr{X}} Q(x, dy) P(y, A) = Q(x, A), \quad \forall A \in \mathscr{B}$$

(cf. [2], p. 214). D'où la K-stationnarité du processus.

III.7. Proposition. *Pour tout processus de Markov homogène* $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in \boldsymbol{N}^*}$ *vérifiant l'hypothèse* (D), *la K-ergodicité forte est équivalente à la K-ergodicité faible.*

Cette proposition découle simplement des propositions III.2, III.4 et III.6.

Comme conséquence, on a le résultat suivant qui améliore la proposition II.11:

III.8. Proposition. *Soit un processus de Markov homogène* $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}), P_n\}_{n\in \boldsymbol{N}^*}$ *vérifiant l'hypothèse* (D). *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit K-faiblement ergodique est qu'il n'ait qu'un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.*

Terminons enfin ce paragraphe par une remarque sur la K-ergodicité stationnaire. Dans [3], l'ergodicité stationnaire de degré $\alpha$ a été présentée comme une sorte de K-ergodicité absolue de degré $\alpha$. La définition et les résultats qu'on peut en déduire sont si proches de ceux de la K-ergodicité de degré $\alpha$ (il suffit de remplacer les expressions $P_{s,s+n}(x, A)-$ $-P_{s,s+n}(y, A)$ par $|P_{s,s+n}(x, A)-P_{s,s+n}(y, A)|$) qu'il nous a paru inutile de les reproduire ici en détail.

**IV. Cas particulier des processus de Markov à un nombre fini d'états.** Examinons pour terminer le cas des processus de Markov à un nombre fini d'états: nous y retrouvons les résultats déjà énoncés dans [3], comme conséquences de ceux donnés dans les trois paragraphes précédents. Il est à signaler cependant que, pour certains d'entre eux, le cas d'un nombre fini d'états permet de simplifier notablement les énoncés et parfois même, de les compléter.

Dans le cas d'un nombre fini d'états donc, l'espace des états sera toujours noté par $\mathscr{X} = \{1, 2, \ldots, r\}$. Nous ne considérerons que la tribu formée par l'ensemble de toutes les parties de $\mathscr{X}$, c'est-à-dire que $\mathscr{B} = \mathscr{P}(\mathscr{X})$. Nous nous sommes trouvés donc dans la situation où $\forall t \in \boldsymbol{N}$, $\mathscr{B}_t = \mathscr{B}$. Les probabilités de transition $P_{t,t+1}$ seront ici des matrices carrés $r\times r$ à éléments positifs $p_{t,t+1}(i, j)$ tels que

$$\sum_{j\in\mathscr{X}} p_{t,t+1}(i, j) = 1, \quad \forall i \in \mathscr{X}.$$

Ainsi convenu, un processus de Markov sera noté $\{\mathscr{X}, P_{t,t+1}\}_{t\in \boldsymbol{N}}$.

1° La définition de la K-ergodicité faible s'exprime alors comme suit: Un processus de Markov à un nombre fini d'états $\{\mathscr{X}, P_{t,t+1}\}_{t\in \boldsymbol{N}}$ est dit *K-faiblement ergodique* si $\forall s \in \boldsymbol{N}$, $\forall i, j, k \in \mathscr{X}$,

$$\lim_{t\to+\infty} [p_{s,t}(i, j)-p_{s,t}(k, j)] = 0,$$

$p_{s,t}(i, j)$ désignant l'élément $(i, j)$ de la matrice produit $\prod_{n=s}^{t-1} P_{n,n+1}$.



Il est facile de transcrire les résultats du § I dans le langage particulier du cas actuel d'un nombre fini d'états. Par exemple, I.2 devient:

*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov à un nombre fini d'états* $\{\mathscr{X}; P_{t,t+1}\}_{t\in \boldsymbol{N}}$ *soit K-faiblement ergodique est qu'il existe,* $\forall s \in \boldsymbol{N}$, *une suite de matrices stochastiques* $\{\pi_{s,t}\}_{t\in \boldsymbol{N},\, s<t}$ *aux lignes identiques* $(\pi_{s,t}(1), \ldots, \pi_{s,t}(r))$, *telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} [p_{s,t}(i, j)-\pi_{s,t}(j)] = 0, \quad \forall i \text{ et } j \in \mathscr{X}.$$

Dans la démonstration de cet énoncé particulier, on peut à la place de la mesure $\mu_s$ (voir la démonstration de I.2), prendre la matrice carrée $r\times r$ dont les éléments, tous identiques, sont égaux à $1/r$.

Signalons enfin qu'un énoncé particulier pour le cas d'un nombre fini d'états peut être donné comme suit (théorème 2 de [3]):

*Toute matrice de probabilités de transition* $P_{t,t+1}$ *pouvant être décomposée en somme de deux matrices,*

$$P_{t,t+1} = M_t+M'_t,$$

*où* $M_t$ *est une matrice stochastique aux lignes identiques, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov à un nombre fini d'états* $\{\mathscr{X}, P_{t,t+1}\}_{t\in \boldsymbol{N}}$ *soit K-faiblement ergodique est que*

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{t=m}^{m+n} M'_t = 0, \quad \forall m \in \boldsymbol{N}.$$

Cette proposition est une conséquence de I.4 énoncé pour un nombre fini d'états, dans lequel on prend $v = m$, $\mu_m = M_m$ et en remarquant que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{t=m}^{m+n} M'_t = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \Big[\prod_{t=m}^{m+n} P_{t,t+1}-M_m \prod_{t=m+1}^{m+n} P_{t,t+1}\Big] = 0.$$

2° La définition de la K-ergodicité forte et les résultats qui en découlent ne présentent aucune difficulté de transcription dans le langage du cas d'un nombre fini d'états. Nous nous abstenons donc de les reproduire ici. Par contre, la K-ergodicité de degré $\alpha$ mérite quelques remarques, car la définition II.4 se simplifie notablement dans le cas actuel. Elle s'énonce, en effet, simplement comme suit:

Un processus de Markov à un nombre fini d'états $\{\mathscr{X}, P_{t,t+1}\}_{t\in \boldsymbol{N}}$ est dit *K-ergodique de degré* $\alpha$, avec $0 < \alpha \leqslant 1$, si $\forall s \in \boldsymbol{N}$,

$$\forall i, j, k \in \mathscr{X}, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^{t} [p_{s,s+n}(i, j)-p_{s,s+n}(k, j)] = 0.$$

En effet, la condition (voir II.4) selon laquelle il existe un entier positif $t_0(s,j)$ et un nombre positif $K(s,j)$ tels que $t > t_0(s,j)$ implique

$$\left|\frac{1}{t^a}\sum_{n=1}^{t}[p_{s,s+n}(i,j)-p_{s,s+n}(k,j)]\right| \leqslant K(s,j),$$

est toujours vérifiée. Nous retrouvons ainsi la définition de la K-ergodicité de degré $a$ telle qu'elle est donnée dans [3].

L'énoncé de la proposition II.7 se simplifie également et devient:

*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ soit K-ergodique de degré $a$, $0 < a \leqslant 1$, est que, $\forall s \in N$, il existe une suite $\{\pi_{s,t}\}_{\substack{t\in N\\ s<t}}$ de matrices stochastiques aux lignes identiques telles que*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^a}\sum_{n=1}[P_{s,s+n}-\pi_{s,s+n}] = 0.$$

Les processus de Markov homogènes à un nombre fini d'états vérifiant toujours l'hypothèse (D), III.7 montre que:

*Pour tout processus de Markov homogène à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_n\}_{n\in N^*}$, la K-ergodicité forte et la K-ergodicité faible sont équivalentes.*

Ce résultat est d'ailleurs confirmé par la proposition II.9 car pour le cas d'un nombre fini d'états, la K-ergodicité faible équivaut à la K-ergodicité faible et uniforme.

Combinant des résultats de § II et ceux connus sur les valeurs propres de la matrice des probabilités de transition d'un processus de Markov homogène à un nombre fini d'états, nous pouvons énoncer:

*Un processus de Markov homogène à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_n\}_{n\in N^*}$ est K-ergodique si et seulement si 1 est valeur propre simple et est la seule valeur propre de module 1 de la matrice $P$.*

Un processus de Markov homogène à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_n\}_{n\in N^*}$ est K-ergodique de degré 1 si et seulement si 1 est valeur propre simple de la matrice $P$.

3° Pour ce qui concerne les notions de K-stationnarité, il est à signaler que dans le cas d'un nombre fini d'états, on obtient quelques résultats plus forts que ceux énoncés dans le cas général. En effet, si les définitions et les propositions, dans leur majorité, s'énoncent et se démontrent de la même façon, aux notations près, on a le résultat supplémentaire suivant:

*Tout processus de Markov à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ K-asymptotiquement stationnaire est K-asymptotiquement quasi-stationnaire.*



Voici sa démonstration. La K-stationnarité asymptotique peut se traduire par l'existence d'un vecteur $\mu$ à composantes $\mu(1), \dots, \mu(r)$, tels que

$$\lim_{t\to+\infty}\mu P_{s,t} = \mu, \quad \forall s\in N.$$

Ce qui équivaut à écrire que $\forall s \in N$, $\mu P_{s,t} = \mu + M_{s,t}$, où $M_{s,t}$ est un vecteur tel que $\forall s\in N$, $\lim_{t\to+\infty} M_{s,t} = 0$. On a

$$\mu\cdot P_{s,t}\cdot P_{t,t+1} = \mu\cdot P_{t,t+1} + M_{s,t}\cdot P_{t,t+1},$$

$$\mu\cdot P_{s,t+1} = \mu\cdot P_{t,t+1} + M_{s,t}\cdot P_{t,t+1},$$

et en passant à la limite,

$$\mu = \lim_{t\to+\infty}\mu\cdot P_{s,t+1} = \lim_{t\to+\infty}\mu\cdot P_{t,t+1}.$$

D'où la K-quasi-stationnarité asymptotique.

Terminons enfin en signalant que la proposition III.5 possède une réciproque dans le cas d'un nombre fini d'états, et qu'on peut énoncer:

*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t\in N}$ soit K-fortement ergodique est qu'il soit*

(i) *K-faiblement ergodique,*

(ii) *K-asymptotiquement quasi-stationnaire, c'est-à-dire tel qu'il existe un $\mu$ vérifiant $\lim_{t\to+\infty}\mu\cdot P_{t,t+1} = \mu$,*

(iii) *tel que pour ce $\mu$,*

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{t-1}[\mu\cdot P_{k-1,t} - \mu\cdot P_{k,t}] = 0.$$

La démonstration de la condition suffisante reste, aux notations près, analogue à celle de III.5. Quant à la condition nécessaire, voici sa démonstration: d'après III.4, et du fait que tout processus de Markov à un nombre fini d'états K-asymptotiquement stationnaire est K-asymptotiquement quasi-stationnaire, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\mu\cdot P_{s,t} = \mu, \quad \forall s\in N,$$

en particulier

$$\lim_{t\to+\infty}\mu\cdot P_{0,t} = \mu \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\mu\cdot P_{t-1,t} = \mu,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t\to+\infty}[\mu\cdot P_{0,t} - \mu\cdot P_{t-1,t}] = 0.$$

Or,

$$\mu\cdot P_{0,t}-\mu\cdot P_{t-1,t} = \sum_{k=1}^{t-1}[\mu\cdot P_{k-1,t}-\mu\cdot P_{k,t}],$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{t-1}[\mu\cdot P_{k-1,t}-\mu\cdot P_{k,t}] = 0,$$

c'est-à-dire (iii).

On peut également remarquer que $\mu\cdot P_{k-1,k}-\mu = M_{k-1,k}$ où $M_{k-1,k}$ est un vecteur dont la somme des composantes vaut 0, c'est-à-dire tel que

$$M_{k-1,k}(r) = -\sum_{i=1}^{r-1} M_{k-1,k}(i).$$

D'où

$$\mu\cdot P_{k-1,t}-\mu\cdot P_{k,t} = (\mu\cdot P_{k-1,k}-\mu)P_{k,t} = M_{k-1,k}\cdot P_{k,t},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i\in\mathscr{X}} M_{k-1,k}(i)p_{k,t}(i,j) = \sum_{i=1}^{r-1} M_{k-1,k}(i)[p_{k,t}(i,j)-p_{k,t}(r,j)].$$

La condition (iii) s'écrit alors

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{t-1}\sum_{i=1}^{r-1} M_{k-1,k}(i)[p_{k,t}(i,j)-p_{k,t}(r,j)] = 0.$$

Nous retrouvons alors l'énoncé donné par Koźniewska dans [3].

Pour les exemples, le lecteur peut se reporter aux articles [2] et [3] et à ceux qu'ils citent en références. D'autre part, nous pensons que les résultats énoncés ci-dessus peuvent être étendus à des processus de Markov d'ordre $n > 1$. Signalons enfin que dans [5], son auteur énonce une condition nécessaire et suffisante pour l'ergodicité forte uniforme et une autre pour l'ergodicité faible uniforme des processus de Markov d'ordre $n$.

### Travaux cités


[1] J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York 1953.

[2] I. Koźniewska, *Ergodicity of non-homogeneous Markov chains with two states*, Coll. Math. 5 (1957), p. 208-215.

[3] — *Ergodicité et stationnarité des chaînes de Markoff variables à un nombre fini d'états possibles*, ibidem 9 (1962), p. 333-346.

[4] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Paris 1964.

[5] M. Iosifescu, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'ergodicité uniforme des chaînes de Markoff variables et multiples*, Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées 11 (1966), p. 325-330.


*Reçu par la Rédaction le 1. 8. 1966*

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVIII. (1967)

# Matrix transformations of Schauder bases

by

LEE W. BARIC (Carlisle) and W. RUCKLE (Bethlehem, Penn.)

Let $X$ be a real or complex Banach space which has a Schauder basis, $\mathscr{X} = \{x_i: i = 1, 2, \ldots\}$, and let $\mathscr{F} = \{f_i: i = 1, 2, \ldots\}$ be the sequence of continuous linear functionals biorthogonal to $\mathscr{X}$. If $\mathscr{Y} = \{y_i\}$ is any sequence in $X$, there is an infinite matrix $A = (a_{ij})$ such that $\mathscr{Y} = \mathscr{X}A$ in the sense that

$$y_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}x_i \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots$$

In this paper we intend to further the investigation begun in [3] concerning conditions on $A$ which imply that $\mathscr{Y}$ is a basic sequence in $\mathscr{X}$ or a Schauder basis of $X$.

The notation used here will be the same as that in [3]. By $s = (s_i)$ we mean a scalar sequence which we handle as an infinite column vector. If $S$ is a linear space of such sequences, $S'$ is the $\beta$-dual of $S$, i.e. $\{t = (t_i): \sum_{i=1}^{\infty} s_i t_i$ converges for each $s \in S\}$. Given an infinite matrix $C = (c_{ij})$ each row of which is in $S'$ we write $C(S)$ for $\{t = Cs: s\in S\}$.

Let $S_x = \{s: \sum_{i=1}^{\infty} s_i x_i$ converges in $X\} = \{(f_i(x)): x \in X\}$; then $S_x$ with norm $\|(f_i(x))\| = \|x\|$ is a Banach space isometric to $X$ under the correspondence

(1) $$\eta_x(f_i(x)) = x.$$

Since $x_i$ corresponds to $e^i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$, $\{e^1, e^2, \ldots\}$ is a basis for $S_x$. Define $S_y^0$ to be $\{s: \sum_{i=1}^{\infty} s_i y_i$ converges in $X\}$; then $S_y^0$ is a Banach norm

$$\|s\| = \sup_n \Big\|\sum_{i=1}^{n} s_i y_i\Big\|$$

and $\{e^1, e^2, \ldots\}$ is a basis for $S_y^0$. Of course, we must assume that $y_i \neq 0$ for all $i$. We shall assume this condition satisfied throughout the remainder of this paper.