Inequality (10) and Theorem 3 show that the Fourier series $S[\psi]$ of ψ is summable (B-R, $(k-1)/2$) to $\psi(x)$ at almost every point x in A_n. Inequality (14) and Theorem 4 show that the Fourier series $S[\varphi]$ of φ is summable (B-R, $(k-1)/2$) to $\varphi(x)$ at almost every point x in E_k. Since $S[f] = S[\varphi+\psi] = S[\varphi]+S[\psi]$, it follows that $S[f]$ is summable (B-R, $(k-1)/2$) to $\varphi(x)+\psi(x) = f(x)$ at almost every point x in A_n.

The final part of the proof is now accomplished by passing to the limit $n\to\infty$ on the sets A_n. Since $S[f]$ is summable (B-R, $(k-1)/2$) at almost every point x in each of the sets A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, it is also summable at almost every point x in the union $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. From the definition of the sets A_n it is clear that

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x\in E_k,\ 0 \leqslant f(x) < \infty\}.$$

Since $f(x)$ is periodic and integrable over Q_k, $f(x)$ is finite-valued almost everywhere, i.e. the set of all points in E_k where $f(x) = \infty$ has measure zero. This means that the union $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ differs from the whole space E_k by a set of measure zero. Therefore $f(x)$, being summable (B-R, $(k-1)/2$) at almost every point x in the union $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, is also summable at almost every point x in the whole space E_k.

References

[1] C. P. Chang, *On Bochner-Riesz summability almost everywhere of multiple Fourier series*, Studia Math. 26 (1965), p. 25-66.

[2] J. Marcinkiewicz, *Sur une nouvelle condition sur la convergence presque partout des séries de Fourier*, Annali de Pisa 8 (1939), p. 139-140.

[3] A. Plessner, *Über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen*, J. Reine Angew. Math. 155 (1926), p. 15-25.

[4] E. M. Stein, *On certain exponential sums arising in multiple Fourier series*, Annals of Math. 73 (1961), p. 87-109.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
UNIVERSITY OF HONG KONG,
HONG KONG

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
THE UNIVERSITY OF AUCKLAND,
AUCKLAND, NEW ZEALAND

Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1966

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVIII. (1967)

Некоторые слабые методы суммирования

Ю. Г. ГОРСТ (Красноярск)

Известно, что для любой неограниченной последовательности $\{S_n\}$ и любого числа a можно построить регулярный матричный метод суммирования, суммирующий последовательность $\{S_n\}$ к числу a и не суммирующий ни одной последовательности, отличной от вида $\{AS_n+\alpha_n\}$, где $A = \mathrm{const}$, а $\{\alpha_n\}$ — сходящаяся последовательность ([2], теорема 2). Однако, если $\{S_n\}$ — ограниченная последовательность, то построение подобного матричного метода оказывается невозможным. Более того, всякий регулярный матричный метод, суммирующий одну расходящуюся ограниченную последовательность, суммирует континуальное множество ограниченных последовательностей, расходящихся одновременно с любой их нетривиальной конечной линейной комбинацией ([3], теорема 1).

В настоящей работе показано, что для полунепрерывных методов суммирования (обобщенный предел последовательности $\{S_n\}$ определяется как $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(x)S_n$) оказывается возможным построение регулярных методов, суммирующих к заданному числу „только одну" расходящуюся последовательность, независимо от того, ограничена она или нет.

Доказательству основной теоремы — теоремы 1 — предпошлем следующую лемму:

Лемма. *Пусть $\{S_n\}$ — последовательность, принимающая два значения:*

$$S_n = \begin{cases} b & \textit{при} \quad n = n_k, \\ b' & \textit{при} \quad n = n_k' \ (b' \neq b \ \textit{и} \ \{n_k\}\cup\{n_k'\} = \{n\}) \end{cases}$$

и a — произвольное число, отличное от b и b'. Для чисел вида $x = k+(2^m-1)/2^m$ $(k, m = 1, 2, \ldots)$ определим функции

$$(1) \quad C_n(x) = \begin{cases} \dfrac{b'-a}{b'-b} & \textit{при} \quad n = n_k,\ k, m = 1, 2, \ldots, \\ \dfrac{a-b}{m(b'-b)} & \textit{при} \quad n = n_k', n_{k+1}', \ldots, n_{k+m-1}',\ k, m = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда метод суммирования $T \equiv \{C_n(x)\}$ *обладает следующими свойствами:*

1. *При всех допустимых* x, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(x) = 1$.

2. *При всех допустимых* x, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(x) S_n = a$.

3. *Для любой ограниченной последовательности* $\{Y_n\}$ *при*

$$A = \frac{Y_{n_1'} - Y_{n_1}}{b'-b}, \qquad \alpha = \frac{b' Y_{n_1} - b Y_{n_1'}}{b'-b}, \qquad H = \max\left\{2\left|\frac{b'-b}{b'-a}\right|,\ 4\left|\frac{b'-b}{a-b}\right|\right\}$$

выполняется неравенство

$$|Y_n - (AS_n + \alpha)| \leqslant H \sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)\, Y_n\right| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

4. *Если последовательность* $\{Y_n\}$ *не ограничена, то*

$$\sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)\, Y_n\right| = \infty.$$

Доказательство. Утверждения 1 и 2 легко проверяются.

Пусть $\{Y_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность. Положим

$$Z_{km} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(k + \frac{2^m - 1}{2^m}\right) Y_n = \frac{b'-a}{b'-b}\, Y_{n_k} + \frac{a-b}{m(b'-b)} \sum_{i=k}^{k+m-1} Y_{n_i'}.$$

Тогда при любом фиксированном $k > 1$ и всех $m > k-1$

$$2\sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)\, Y_n\right| \geqslant \sup_m |Z_{1m} - Z_{km}| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{b'-a}{b'-b}\right| \cdot |Y_{n_1} - Y_{n_k}| - \frac{1}{m}\left|\frac{a-b}{b'-b}\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{k-1} Y_{n_i'} - \sum_{i=1+m}^{k+m-1} Y_{n_i'}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{b'-a}{b'-b}\right| \cdot |Y_{n_1} - Y_{n_k}| - \frac{2(k-1)\sup\limits_n |Y_n|}{m}\left|\frac{a-b}{b'-b}\right|,$$

откуда, ввиду произвольности m,

$$|Y_{n_1} - Y_{n_k}| \leqslant 2\left|\frac{b'-b}{b'-a}\right| \sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n\right|. \tag{3}$$

С другой стороны, при всех $k > 1$

$$2\sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n\right| \geqslant |Z_{11} - Z_{k1}| \geqslant \left|\frac{a-b}{b'-b}\right| \cdot |Y_{n_1'} - Y_{n_k'}| - \left|\frac{b'-a}{b'-b}\right| \cdot |Y_{n_1} - Y_{n_k}|,$$

откуда, используя неравенство (3), получаем:

$$|Y_{n_k'} - Y_{n_1'}| \leqslant \tag{4}$$

$$\leqslant 2\left|\frac{b'-b}{a-b}\right| \sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n\right| + 2\left|\frac{b'-a}{a-b}\right| \cdot \left|\frac{b'-b}{b'-a}\right| \sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n\right| =$$

$$= 4\left|\frac{b'-b}{a-b}\right| \sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n\right|.$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что

$$|Y_n - (AS_n + \alpha)| = \begin{cases} |Y_{n_k} - Y_{n_1}| & \text{при } n = n_k \\ |Y_{n_k'} - Y_{n_1'}| & \text{при } n = n_k' \end{cases} \leqslant H \sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n\right|,$$

т. е. неравенство (2) выполнено.

Докажем справедливость утверждения 4.

Предположим, что последовательность $\{Y_n\}$ не ограничена, но

$$\sup_x \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n\right| = \sup_{k,m} |Z_{km}| < N < \infty. \tag{5}$$

Тогда подпоследовательность $\{Y_{n_k}\}$ также неограничена, так как в противном случае из выражения

$$Z_{k1} = \frac{b'-a}{b'-b}\, Y_{n_k} + \frac{a-b}{b'-b}\, Y_{n_k'}$$

и неравенства (5) следовала бы ограниченность подпоследовательности $\{Y_{n_k'}\}$, а потому и самой последовательности $\{Y_n\}$.

Зафиксируем произвольное k и найдем такое $k_1 > k$, что

$$|Y_{n_{k_1}}| > 5\left|\frac{b'-b}{b'-a}\right| N. \tag{6}$$

В силу неравенств (5) и (6) при любом $m = 1, 2, \ldots$

$$\left|\frac{a-b}{m(b'-b)} \sum_{i=k_1}^{k_1+m-1} Y_{n_i'}\right| = \left|\frac{b'-a}{b'-b}\, Y_{n_{k_1}} - Z_{k_1 m}\right| > 4N$$

и поэтому при $m > k_1 - k$

$$|Z_{km}| \geqslant \frac{k+m-k_1}{m}\left|\frac{a-b}{(k+m-k_1)(b'-b)}\sum_{i=k_1}^{k_1+(k+m-k_1)-1} Y_{n'_i}\right| -$$

$$-\left|\frac{a-b}{m(b'-b)}\sum_{i=k}^{k_1-1} Y_{n'_i}\right| - \left|\frac{b'-a}{b'-b} Y_{n_k}\right| > N,$$

если только $\left|\frac{b'-a}{b'-b} Y_{n_k}\right| < N$ (это можно было предположить заранее), а m настолько велико, что

$$\frac{k+m-k_1}{m} > \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \left|\frac{a-b}{m(b'-b)}\sum_{i=k}^{k_1-1} Y_{n'_i}\right| < N.$$

Полученное неравенство противоречит неравенству (5), что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1. *Для любой расходящейся последовательности $\{S_n\}$ и любого числа a можно построить регулярный полунепрерывный метод суммирования, суммирующий последовательность $\{S_n\}$ к числу a и не суммирующий ни одной последовательности, отличной от вида $\{AS_n + \alpha_n\}$, где $A = \text{const}$, а $\{\alpha_n\}$ — сходящаяся последовательность.*

Доказательство. Если последовательность $\{S_n\}$ не ограничена, то утверждение теоремы справедливо для матричных методов суммирования ([2], теорема 2), а следовательно, и для полунепрерывных методов.

Пусть $\{S_n\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность, $\varliminf_{n\to\infty} S_n = b$, $\varlimsup_{n\to\infty} S_n = b'$ и, для определенности, $a > b$. Рассмотрим отдельно два случая.

I случай: $a \neq b'$.

Выберем такую последовательность разбиений сегмента $[b, b']$ точками $b = b_0^{(1)} < b_1^{(1)} < b_2^{(1)} = b'$, $b = b_0^{(2)} < b_1^{(2)} < b_2^{(2)} < b_3^{(2)} = b', \ldots, b = b_0^{(p)} < b_1^{(p)} < \ldots < b_p^{(p)} < b_{p+1}^{(p)} = b', \ldots$, что $b_i^{(p)} \neq a$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ p = 1, 2, \ldots)$, а

(7) $$\lim_{p\to\infty} \max_{0\leqslant i\leqslant p} |b_{i+1}^{(p)} - b_i^{(p)}| = 0,$$

и положим:

$$S_n^{(p)} = \begin{cases} b_p^{(p)} & \text{при} \quad S_n > b_p^{(p)}, \\ b_i^{(p)} & \text{при} \quad b_i^{(p)} < S_n \leqslant b_{i+1}^{(p)},\ i = 1, 2, \ldots, p-1, \\ b & \text{при} \quad S_n \leqslant b_1^{(p)}. \end{cases}$$

Через $\{n_k^{(p,i)}\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, p;\ p = 1, 2, \ldots)$ обозначим возрастающие последовательности тех натуральных чисел n, для которых $S_n^{(p)} = b_i^{(p)}$, а через $\{n_\nu^{(p,i,j)}\}$ — возрастающие последовательности, полученные объединением членов последовательностей $\{n_k^{(p,i)}\}$ и $\{n_k^{(p,j)}\}$.

Для тех последовательностей $\{S^{(p)}_{n_{\nu+p}^{(p,i,j)}}\}$, которые, во-первых, и значение $b_i^{(p)}$, и значение $b_j^{(p)}$ принимают бесконечное множество раз и, во-вторых, удовлетворяют условию

(8) $$|b_i^{(p)} - b_j^{(p)}| > \tfrac{1}{4}(b' - b),$$

по образцу метода (1) построим методы суммирования $T^{(p,i,j)} \equiv \{C_\nu^{(p,i,j)}(x)\}$, обладающие свойствами 1-4, сформулированными в лемме.

Множество методов $T^{(p,i,j)}$ упорядочим и для каждого метода $T^{(p,i,j)}$, стоящего на r-м месте, подберем функцию $\varphi_r(x)$, осуществляющую взаимно однозначное отображение интервала $(r, r+1)$ на интервал $(1, \infty)$, после чего для всех допустимых x (т.е. для таких x, для которых $\varphi_r(x)$ имеет вид $k + (2^m - 1)/2^m$ из интервала $(r, r+1)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ положим

$$C_n(x) = \begin{cases} C_\nu^{(p,i,j)}[\varphi_r(x)] & \text{при} \quad n = n_{\nu+p}^{(p,i,j)}, \\ 0 & \text{при} \quad n \notin \{n_{\nu+p}^{(p,i,j)}\} \ (\nu = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Полученный метод суммирования $T \equiv \{C_n(x)\}$ регулярен, так как в силу свойства 1, при всех допустимых x

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) = 1,$$

при любом фиксированном n и достаточно больших допустимых x $C_n(x) = 0$, и, наконец, вследствие неравенства (8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(x)| = \left|\frac{b_j^{(p)} - a}{b_j^{(p)} - b_i^{(p)}}\right| + \left|\frac{a - b_j^{(p)}}{b_j^{(p)} - b_i^{(p)}}\right| < \frac{8\max\{|b-a|\,|b'-a|\}}{b'-b}.$$

Покажем, что $T\text{-}\lim S_n = a$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ при x, соответствующих достаточно большим значениям p, $\sum_n |C_n(x)| = 0$, где суммирование производится по тем n, для которых $S_n < b - \varepsilon$ или $S_n > b' + \varepsilon$, и $\max_{0\leqslant i\leqslant p} |b_{i+1}^{(p)} - b_i^{(p)}| < \varepsilon$. Поэтому для таких x, учитывая, что согласно свойству 2 леммы

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) S_n^{(p)} \equiv a,$$

получаем:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)S_n-a\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)(S_n-S_n^{(p)})\Big| < 2\sup_x \sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\,\varepsilon.$$

Метод T, как это следует из утверждения 4 леммы, не суммирует ни одной неограниченной последовательности.

Пусть расходящаяся последовательность $\{Y_n\}$ ограничена и суммируется методом T. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, будем считать, что $T\text{-}\lim Y_n = 0$.

Возьмем произвольное ε $(0<\varepsilon<1)$ и найдем такое p_0, что при всех допустимых i, j и x

$$(11)\qquad \Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu^{(p_0,i,j)}[\varphi_r(x)]\,Y_{n_{\nu+p_0}^{(p_0,i,j)}}\Big| < \varepsilon^3$$

и, кроме того,

$$(12)\qquad \max_{0\leqslant i\leqslant p_0}|b_{i+1}^{(p_0)}-b_i^{(p_0)}| < \varepsilon.$$

По лемме при

$$A^{(i,j)} = \frac{Y_{n_{1+p_0}^{(p_0,j)}}-Y_{n_{1+p_0}^{(p_0,i)}}}{b_j^{(p_0)}-b_i^{(p_0)}},$$

$$a^{(i,j)} = \frac{b_j^{(p_0)}\,Y_{n_{1+p_0}^{(p_0,i)}}-b_i^{(p_0)}\,Y_{n_{1+p_0}^{(p_0,j)}}}{b_j^{(p_0)}-b_i^{(p_0)}}$$

и

$$H^{(i,j)} = \max\left\{2\left|\frac{b_j^{(p_0)}-b_i^{(p_0)}}{b_j^{(p_0)}-a}\right|,\ 4\left|\frac{b_j^{(p_0)}-b_i^{(p_0)}}{a-b_i^{(p_0)}}\right|\right\}$$

имеем

$$(13)\qquad |Y_{n_{\nu+p_0}^{(p_0 i,j,)}}-(A^{(i,j)}S^{(p_0)}_{n_{\nu+p_0}^{(p_0,i,j)}}+a^{(i,j)})| < H^{(i,j)}\cdot\varepsilon^3 \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Выберем такую пару значений $b_{i_0}^{(p_0)}$ и $b_{j_0}^{(p_0)}$, что метод $T^{(p_0,i_0,j_0)}$ определен,

$$(14)\qquad |b_{i_0}^{(p_0)}-b_{j_0}^{(p_0)}| > \tfrac{1}{2}(b'-b),$$

и, кроме того, при $i=i_0$ и $i=j_0$ выполняется неравенство

$$(15)\qquad |b_i^{(p_0)}-a| > \varepsilon$$

(существование таких значений $b_{i_0}^{(p_0)}$ и $b_{j_0}^{(p_0)}$ при достаточно малых ε и достаточно больших p_0 обеспечено).

Покажем, что при некотором H, не зависящем от ε, для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство:

$$(16)\qquad |Y_n-(A^{(i_0,j_0)}S_n^{(p_0)}+a^{(i_0,j_0)})| < H\varepsilon.$$

Для $n\in\{n_k^{(p_0,i_0)}\}$ и $n\in\{n_k^{(p_0,j_0)}\}$ из неравенств (13) и (15) сразу получаем:

$$(17)\qquad |Y_{n_k^{(p_0,i_0)}}-(A^{(i_0,j_0)}S^{(p_0)}_{n_k^{(p_0,i_0)}}+a^{(i_0,j_0)})| < H^{(i_0,j_0)}\varepsilon^3 < 4(b'-b)\,\varepsilon,$$

$$(18)\qquad |Y_{n_k^{(p_0,j_0)}}-(A^{(i_0,j_0)}S^{(p_0)}_{n_k^{(p_0,j_0)}}+a^{(i_0,j_0)})| < H^{(i_0,j_0)}\varepsilon^3 < 4(b'-b)\,\varepsilon \quad (\text{при}\ \ k>p_0).$$

Пусть $n\in\{n_k^{(p_0,i)}\}$, где $i\neq i_0$, $i\neq j_0$, значение $b_i^{(p_0)}$ принимается последовательностью $\{S_n^{(p_0)}\}$ бесконечное множество раз, причем, для определенности,

$$(19)\qquad |b_i^{(p_0)}-b_{i_0}^{(p_0)}| > \tfrac{1}{4}(b'-b),$$

благодаря чему метод суммирования $T^{(p_0,i_0,i)}$ определен (если бы неравенство (19) не выполнялось, то, как это следует из (14), выполнялось бы неравенство $|b_i^{(p_0)}-b_{j_0}^{(p_0)}| > \frac{1}{4}(b'-b)$) и, кроме того, значение $b_i^{(p_0)}$ удовлетворяет неравенству (15).

Учитывая, что согласно нашим обозначениям $S^{(p_0)}_{n_k^{(p_0,i_0)}} = b_{i_0}^{(p_0)}$, неравенство (17) представим в виде

$$|Y_{n_k^{(p_0,i_0)}}-(A^{(i_0,j_0)}b_{i_0}^{(p_0)}+a^{(i_0,j_0)})| < 4(b'-b)\,\varepsilon^2.$$

Аналогичным путем из неравенств (13) и (15) получим:

$$|Y_{n_k^{(p_0,i_0)}}-(A^{(i_0,i)}b_{i_0}^{(p_0)}+a^{(i_0,i)})| < H^{(i_0,i)}\varepsilon^3 < 4(b'-b)\,\varepsilon^2.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$(20)\qquad |(A^{(i_0,j_0)}-A^{(i_0,i)})\,b_{i_0}^{(p_0)}+(a^{(i_0,j_0)}-a^{(i_0,i)})| < 8(b'-b)\,\varepsilon^2.$$

Далее, согласно (9), (10) и (13) при всех x, допустимых для выбранных значений p_0, i_0 и j_0, имеем:

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu^{(p_0,i_0,j_0)}[\varphi_r(x)]\,Y_{n_{\nu+p_0}^{(p_0,i_0,j_0)}}-(A^{(i_0,j_0)}a+a^{(i_0,j_0)})\Big| =$$

$$=\Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu^{(p_0,i_0,j_0)}[\varphi_r(x)]\cdot[Y_{n_{\nu+p_0}^{(p_0,i_0,j_0)}}-(A^{(i_0,j_0)}S_{n_{\nu+p_0}^{(p_0,i_0,j_0)}}+a^{(i_0,j_0)})]\Big| <$$

$$< \sup_x \sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\cdot H^{(i_0,j_0)}\varepsilon^3 < 4\sup_x\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\cdot(b'-b)\,\varepsilon^2,$$

откуда, вследствие неравенства (11),

$$(20^{\mathrm{a}})\qquad |A^{(i_0,j_0)}a+a^{(i_0,j_0)}| < \Big[4\sup_x\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\,(b'-b)+1\Big]\varepsilon^2.$$

Совершенно аналогично получаем:

$$(20^б)\qquad |A^{(i_0,i)}a+a^{(i_0,i)}| < \left[4\sup_x \sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|(b'-b)+1\right]\varepsilon^2.$$

Из неравенств ($20^а$) и ($20^б$) следует, что

$$(21)\qquad |(A^{(i_0,j_0)}-A^{(i_0,i)})a+(a^{(i_0,j_0)}-a^{(i_0,i)})| < \left[8\sup_x \sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\cdot(b'-b)+2\right]\varepsilon^2.$$

Решение системы неравенств (20) и (21) относительно $|A^{(i_0,j_0)}-A^{(i_0,i)}|$ и $|a^{(i_0,j_0)}-a^{(i_0,i)}|$ (выкладки опущены) показывает, что

$$(22)\qquad |A^{(i_0,j_0)}-A^{(i_0,i)}| < H_1\varepsilon,$$

$$(23)\qquad |a^{(i_0,j_0)}-a^{(i_0,i)}| < H_1\varepsilon,$$

где

$$H_1 = \max\Big\{8(b'-b)\Big(1+\sup_x\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\Big)+2;$$

$$\max\{|b|,|b'|\}\cdot\Big[8(b'-b)\Big(1+\sup_x\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\Big)+2\Big]+8(b'-b)\Big\}.$$

Из неравенств (13), (15), (22) и (23) следует:

$$(24)\qquad |Y_{n_k^{(p_0,i)}}-(A^{(i_0,j_0)}S^{(p_0)}_{n_k^{(p_0,i)}}+a^{(i_0,j_0)})| \leqslant$$

$$\leqslant |Y_{n_k}^{(p_0,i)}-(A^{(i_0,i)}S^{(p_0)}_{n_k^{(p_0,i)}}+a^{(i_0,i)})|+|b_i^{(p_0)}|\cdot|A^{(i_0,j_0)}-A^{(i_0,i)}|+|a^{(i_0,j_0)}-a^{(i_0,i)}| <$$

$$< H^{(i_0,i)}\varepsilon^3+\max\{|b|,|b'|\}H_1\varepsilon+H_1\varepsilon <$$

$$< [4(b'-b)+\max\{|b|,|b'|\}\cdot H_1+H_1]\varepsilon \qquad (k>p_0).$$

Перейдем к случаю, когда значение $b_i^{(p_0)}$ принимается последовательностью $\{S_n^{(p_0)}\}$ бесконечное множество раз, но неравенство (15) для него не выполняется, т. е.

$$(25)\qquad |b_i^{(p_0)}-a| \leqslant \varepsilon.$$

Для определенности, по-прежнему будем считать, что неравенство (19) выполнено.

В этом случае имеем:

$$(26)\qquad |Y_{n_k^{(p_0,i)}}-(A^{(i_0,j_0)}S^{(p_0)}_{n_k^{(p_0,i)}}+a^{(i_0,j_0)})| = |Y_{n_k^{(p_0,i)}}-(A^{(i_0,j_0)}b_i^{(p_0)}+a^{(i_0,j_0)})| \leqslant$$

$$\leqslant |Y_{n_k^{(p_0,i)}}|+|A^{(i_0,j_0)}|\cdot|b_i^{(p_0)}-a|+|A^{(i_0,j_0)}a+a^{(i_0,j_0)}|.$$

Оценим первые два слагаемых в правой части неравенства (26). Вследствие неравенства (11) для $k>p_0$ (в формулах типа (1) взято $m=1$)

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}C_\nu^{(p_0,i_0,i)}[\varphi_r(x)]\,Y_{n^{(p_0,i_0,i)}_{\nu+p_0}}\right| = \left|\frac{b_i^{(p_0)}-a}{b_i^{(p_0)}-b_{i_0}^{(p_0)}}Y_{n_k^{(p_0,i_0)}}+\frac{a-b_{i_0}^{(p_0)}}{b_i^{(p_0)}-b_{i_0}^{(p_0)}}Y_{n_k^{(p_0,i)}}\right| < \varepsilon.$$

Заметив, что при достаточно малых ε, как это следует из (19) и (25),

$$|a-b_{i_0}^{(p_0)}| > \tfrac{1}{8}(b'-b)$$

и используя (25), из этого неравенства получаем:

$$(27)\qquad |Y_{n_k^{(p_0,i)}}| < \left|\frac{b_i^{(p_0)}-b_{i_0}^{(p_0)}}{a-b_{i_0}^{(p_0)}}\right|\cdot\varepsilon+\left|\frac{b_i^{(p_0)}-a}{a-b_{i_0}^{(p_0)}}\right|\cdot|Y_{n_k^{(p_0,i_0)}}|$$

$$< \left[8+\frac{8\sup_n|Y_n|}{b'-b}\right]\cdot\varepsilon \qquad (k>p_0).$$

Далее (используем (14) и (25)),

$$(28)\qquad |A^{(i_0,j_0)}|\cdot|b_i^{(p_0)}-a| = \left|\frac{Y_{n^{(p_0,j_0)}_{1+p_0}}-Y_{n^{(p_0,i_0)}_{1+p_0}}}{b_{i_0}^{(p_0)}-b_{j_0}^{(p_0)}}\right|\cdot|b_i^{(p_0)}-a| < \frac{4\sup_n|Y_n|}{b'-b}\cdot\varepsilon.$$

Из неравенств (26), (27), (28) и ($20^а$) следует, что

$$(29)\qquad |Y_{n_k^{(p_0,i)}}-(A^{(i_0,j_0)}S^{(p_0)}_{n_k^{(p_0,i)}}+a^{(i_0,j_0)})| <$$

$$< \left[\frac{12\sup_n|Y_n|}{b'-b}+4\sup_x\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\cdot(b'-b)+9\right]\varepsilon \qquad (k>p_0).$$

Неравенства (17), (18), (24) и (29) показывают, что если только значение $b_i^{(p_0)}$ принимается последовательностью $\{S_n^{(p_0)}\}$ бесконечное множество раз, то для всех достаточно больших $n\in\{n_k^{(p_0,i)}\}$ неравенство (16) будет выполнено при $H=\max\{4(b'-b)+\max\{|b|,|b'|\}\cdot H_1+H_1,\ 12\sup_n|Y_n|/(b'-b)+4\sup_x\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(x)|\cdot(b'-b)+9\}$ (H не зависит от ε!).

Из неравенств (12), (14) и (16) следует, что при всех достаточно больших n

$$(30)\qquad |Y_n-(A^{(i_0,j_0)}S_n+a^{(i_0,j_0)})| \leqslant$$

$$\leqslant |Y_n-(A^{(i_0,j_0)}S_n^{(p_0)}+a^{(i_0,j_0)})|+|A^{(i_0,j_0)}|\cdot|S_n-S_n^{(p_0)}| < \left(H+\frac{8\sup_n|Y_n|}{b'-b}\right)\varepsilon.$$

Докажем, наконец, что последовательность $\{Y_n\}$ является линейной комбинацией последовательности $\{S_n\}$ и некоторой сходящейся последовательности.

Для этого рассмотрим функцию

$$f(A, a) = \overline{\lim_{n\to\infty}} |Y_n - (AS_n + a)|.$$

Эта функция, как нетрудно убедиться, непрерывна по совокупности переменных A и a и $\lim\limits_{\substack{A\to\infty \\ a\to\infty}} f(A, a) = \infty$. Это обеспечивает существование такой (A_0, a_0), в которой функция $f(A, a)$ принимает наименьшее значение. Предположение, что $f(A_0, a_0) > 0$ приводит к противоречию с неравенством (30) ввиду произвольности числа ε. Поэтому $f(A_0, a_0) = 0$. Положив $\gamma_n = Y_n - (A_0 S_n + a_0)$ и заметив, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, приходим к требуемому представлению последовательности $\{Y_n\}$:

$$Y_n = A_0 S_n + (a_0 + \gamma_n).$$

Заметим, что в отдельных случаях построение метода суммирования, удовлетворяющего требованиям теоремы 1, значительно упрощается.

Так, если последовательность $\{S_n\}$ имеет только две предельные точки b и b', причем $a \neq b$ и $a \neq b'$, то метод T, определяемый функциями (1), уже приводит к цели.

Случай, когда последовательность $\{S_n\}$ имеет конечное число $m > 2$ предельных точек, отличных от a, сводится к предыдущему выделением из последовательности $\{S_n\}$ подпоследовательностей, имеющих по две предельные точки, после чего полученные методы суммирования соответствующим образом объединяются в один метод суммирования.

II случай: $a = b'$.

В отличие от предыдущего случая здесь нельзя обеспечить существование таких значений $b_{i_0}^{(p_0)}$ и $b_{j_0}^{(p_0)}$, которые одновременно удовлетворяли бы неравенствам (14) и (15). Однако, если последовательность $\{S_n\}$ имеет хотя бы одну предельную точку b'', отличную от b и b', то заменив неравенства (8) и (14) соответственно неравенствами

$$|b_i^{(p)} - b_j^{(p)}| > \tfrac{1}{4}(b'' - b) \quad \text{и} \quad |b_{i_0}^{(p_0)} - b_{j_0}^{(p_0)}| > \tfrac{1}{2}(b'' - b)$$

и используя их в тех оценках, где требовались неравенства (8) и (14), мы можем дословно повторить проведенные выше рассуждения.

Осталось рассмотреть случай, когда последовательность $\{S_n\}$ имеет только две предельные точки b и $b' = a$.

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} S n_k = b$, а $\lim\limits_{k\to\infty} S n'_k = b'$ ($\{n_k\} \cup \{n'_k\} = \{n\}$). Для $x = k + (2^m - 1)/2^m$ ($k = 1, 2, \dots$; $m = 0, 1, 2, \dots$) положим:

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = n'_k;\ k = 1, 2, \dots;\ m = 0, 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{при} \quad n = n_{2k};\ k, m = 1, 2, \dots, \\ -\dfrac{1}{m} & \text{при} \quad n = n_{2k-1}, n_{2k+1}, \dots, n_{2k+2m-3};\ k, m = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Метод $T \equiv \{C_n(x)\}$ регулярен. Для любой последовательности $\{Y_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(k + \frac{2^m - 1}{2^m}\right) Y_n =$$

$$= \begin{cases} Y_{n'_k} & \text{при} \quad k = 1, 2, \dots;\ m = 0, \\ Y_{n'_k} + Y_{n_{2k}} - \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{i=k}^{k+m-1} Y_{n_{2i-1}} & \text{при} \quad k, m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

и поэтому $T\text{-}\lim S_n = b' = a$.

Пусть метод T суммирует ограниченную последовательность $\{Y_n\}$ к числу B'. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} Y_{n'_k} = B'$ и

$$(31) \qquad Y_{n_{2k}} - \frac{1}{m} \sum_{i=k}^{k+m-1} Y_{n_{2i-1}} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

равномерно относительно $m = 1, 2, \dots$

Последовательность $\left\{\dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} Y_{n_{2i-1}}\right\}$ ограничена, поэтому найдутся такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_l\}$ и такое число B, что $\lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{m_l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m_l} Y_{n_{2i-1}} = B$.

Поскольку

$$\left| \frac{1}{m_l} \sum_{i=k}^{k+m_l-1} Y_{n_{2i-1}} - \frac{1}{m_l} \sum_{i=1}^{m_l} Y_{n_{2i-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{m_l} \left| \sum_{i=m_l+1}^{k+m_l-1} Y_{n_{2i-1}} - \sum_{i=1}^{k-1} Y_{n_{2i-1}} \right| \leqslant \frac{2(k-1)\sup\limits_n |Y_n|}{m_l},$$

то при любом фиксированном $k>1$

$$\lim_{l\to\infty}\left(Y_{n_{2k}}-\frac{1}{m_l}\sum_{i=k}^{k+m_l-1}Y_{n_{2i-1}}\right)=Y_{n_{2k}}-B.$$

С другой стороны, из условия (31) следует, что

$$Y_{n_{2k}}-\frac{1}{m_l}\sum_{i=k}^{k+m_l-1}Y_{n_{2i-1}}\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty$$

равномерно относительно $l=1,2,\ldots$ Это обеспечивает существование повторного предела

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\left(Y_{n_{2k}}-\frac{1}{m_l}\sum_{i=k}^{k+m_l-1}Y_{n_{2i-1}}\right)=\lim_{k\to\infty}(Y_{n_{2k}}-B),$$

а следовательно, и предела $\lim\limits_{k\to\infty}Y_{n_{2k}}$, который оказывается равным B. Полагая в (31) $m=1$, получаем

$$\lim_{k\to\infty}(Y_{n_{2k}}-Y_{n_{2k-1}})=0,$$

вследствие чего и $\lim\limits_{k\to\infty}Y_{n_k}=B$.

Существование пределов $\lim\limits_{k\to\infty}Y_{n'_k}=B'$ и $\lim\limits_{k\to\infty}Y_{n_k}=B$ позволяет представить последовательность $\{Y_n\}$ в требуемом виде:

$$Y_n=\frac{B'-B}{b'-b}S_n+\frac{Bb'-B'b}{b'-b}+a_n, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Ограниченность подпоследовательности $\{Y_{n'_k}\}$ для всякой последовательности $\{Y_n\}$, суммируемой методом T, очевидна. Ограниченность подпоследовательности $\{Y_{n_k}\}$ устанавливаем, проводя для суммы $Y_{n_{2k}}-\frac{1}{m}\sum\limits_{i=k}^{k+m-1}Y_{n_{2i-1}}$ точно такие же рассуждения, как при доказательстве утверждения 4 леммы.

Этим завершается доказательство теоремы 1.

С помощью теоремы 1 можно усилить результат автора настоящей статьи, показывающий, что для произвольных полунепрерывных методов теорема Мазура-Орлича о совместности методов суммирования не имеет места ([5], следствие теоремы 1):

Следствие 1. *Для любого регулярного полунепрерывного метода суммирования T, суммирующего хотя бы одну расходящуюся ограниченную последовательность, можно построить ограниченно не более сильный регулярный полунепрерывный метод суммирования, ограниченно не совместный с методом T.*

В самом деле, пусть регулярный полунепрерывный метод T суммирует к некоторому числу a расходящуюся ограниченную последовательность $\{S_n\}$. По теореме 1 можно построить такой регулярный полунепрерывный метод T_1, который суммирует к числу, отличному от a, „только одну" последовательность $\{S_n\}$. Метод T_1 и будет обладать требуемыми свойствами.

Далее, известно, что среди регулярных матричных методов внутренне совершенными (т. е. совместными с любым не более сильным регулярным методом) являются только тривиальные методы ([2], теорема 3). Таким же свойством обладают и полунепрерывные методы суммирования (хотя для них этот факт объясняется несколько иными причинами):

Следствие 2. *Если регулярный полунепрерывный метод внутренне совершенен, то он эквивалентен сходимости.*

В справедливости последнего утверждения убеждаемся, предполагая противное и рассуждая так же, как и при доказательстве следствия 1, только не предполагая последовательность $\{S_n\}$ ограниченной.

В отношении суммирования ограниченных последовательностей теорема 1 допускает следующее очевидное обобщение:

Теорема 2. *Пусть $T\equiv\{a_{mn}\}$ — регулярный матричный метод суммирования, $\{S_n\}$ — ограниченная последовательность, не суммируемая методом T, a — заданное число. Тогда можно построить регулярный полунепрерывный метод суммирования, который суммирует любую последовательность вида $\{AS_n+\gamma_n\}$ ($A=\mathrm{const}$, а $\{\gamma_n\}$ — ограниченная последовательность, суммируемая методом T) к числу $Aa+T-\lim\gamma_n$ и не суммирует ни одной ограниченной последовательности, отличной от этого вида.*

Для доказательства теоремы 2 достаточно, используя теорему 1, построить регулярный метод $T_1=\{C_m(x)\}$, суммирующий к числу a „только одну" расходящуюся последовательность

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}S_n\right\};$$

тогда метод $T_2=\left\{\sum\limits_{m=1}^{\infty}C_m(x)a_{mn}\right\}$ будет обладать требуемыми свойствами.

Теорема 1 не имеет места для полунепрерывных методов, обладающих свойством (α), введенным в работе [4] М. Альтманом и состоящем в существовании такой неубывающей целочисленной функции $\omega(x)$, что

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=\omega(x)}^{\infty}|C_n(x)|=0.$$

В частности, это касается C-суммирования последовательностей методами, непрерывными по Л. Влодарскому (см., например, [6]).

Не рассматривая вопрос о континуальности ограниченных полей суммирования таких методов, ограничимся в этом направлении следующей теоремой:

Теорема 3. *Если регулярный полунепрерывный метод суммирования T обладает свойством* (α) *и суммирует некоторую ограниченную расходящуюся последовательность, то он суммирует несепарабельное в пространстве m (а следовательно и несчетное) множество ограниченных последовательностей, расходящихся одновременно с любой их нетривиальной конечной линейной комбинацией.*

Действительно, если бы упомянутое в заключении теоремы множество последовательностей было сепарабельным, то можно было бы, взяв произвольную регулярную матрицу $\{a_{mn}\}$, ограниченно не совместную с методом T, выделить из нее регулярную подматрицу, которая была бы не слабее метода T ([1], теорема 8.5.2) и ограниченно не совместна с ним. А это противоречило бы полунепрерывному аналогу теоремы Мазура-Орлича, который, как известно, справедлив для полунепрерывных методов, обладающих свойством (α) ([4], стр. 242).

Цитированная литература

[1] Р. Кук, *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей*, Москва 1960.

[2] В. М. Даревский, *Внутренне совершенные методы суммирования*, ДАН СССР, Сер. мат., 10 (1946), стр. 97-103.

[3] И. И. Огиевецкий, *К проблеме эффективности и неэффективности регулярных матриц*, ДАН СССР 143 (1962), стр. 1050-1052.

[4] А. Альтман, *Обобщение одной теоремы Мазура-Орлича из теории суммирования*, Studia Math. 13 (1953), стр. 233-243.

[5] Ю. Г. Горст, *О распространении теоремы Мазура-Орлича на полунепрерывные и интегральные методы суммирования*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 11 (1963), стр. 745-749.

[6] L. Włodarski, *On a new approach to continuous methods of summation*, Colloq. Math. 10 (1963), стр. 61-71.

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, КРАСНОЯРСК

Reçu par la Rédaction le 7. 2. 1966

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVIII. (1967)

Estimates for eigenfunctions

by

JAAK PEETRE (Lund)

0. Introduction. As is well known (cf. e.g. [8], vol. 1, p. 45) the Riemann-Lebesgue lemma says that if f is a periodic function $\in L_1$ and $a_\nu = \int f(x)e^{-i\nu x}dx$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) are the Fourier coefficients of f, then $a_\nu = o(1)$, $\nu \to \pm\infty$. We recall also that the proof follows by a density argument from the following facts: (i) The trivial fact that the functions $e^{i\nu x}$ are uniformly bounded which already implies $a_\nu = O(1)$. (ii) The fact that $a_\nu = o(1)$ in some dense subset of L_1, say L_2, in which case $\sum |a_\nu|^2 < \infty$, if we presuppose Parseval's formula, or the space of continuously differentiable functions, in which case $a_\nu = O(1/\nu)$, by partial integration.

What is the analogue of the Riemann-Lebesgue lemma for eigenfunction expansions? In this paper we attempt to answer this question for the case of the eigenvalue problem

$$Au = \lambda u \text{ in } \Omega \tag{0.1}$$

where A is any formally positive self-adjoint elliptic partial differential operator of order m, the essential (and very restrictive) assumption being that *the leading part A_m of A has constant coefficients*, and Ω is any domain of R^n, self-adjoint boundary conditions (say of the Dirichlet type) being imposed on the boundary of Ω. We assume further that the spectrum is *discrete*, so that there exists a complete set of eigenfunctions in the usual sense. (It is not clear to us what happens in the case of continuous spectrum, i.e. generalized eigenfunction expansions.) Then every f can be expanded in a series

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

where

$$f_\nu(x) = \sum_r (f, \varphi_{\nu r})\varphi_{\nu r}(x) = \int_\Omega \sum_r \varphi_{\nu r}(x)\overline{\varphi_{\nu r}(y)}f(y)\,dy, \tag{0.2}$$

the summation being extended over an orthonormal basis (necessarily finite!) of eigenfunctions $\varphi_{\nu r}$ belonging to the νth eigenvalue λ_ν. We