Примеры. Легко проверить, что условия 1), 2), 3), 4) и 5) этого пункта выполняются, например, для интегрального уравнения

$$u(x)-\lambda\int_a^b r(x)G(x,y)u(y)\,dy = 0$$

в следующих двух случаях:

1. 1) $|r(x)|\leqslant M,\ r(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b]$;

   2) $\int_a^b\left(\int_a^b |G(x,y)|^q dy\right)^\mu dx < +\infty,\ p>1,\ 1/p+1/q=1,$ $\mu=\max(1,p/q)$;

   3) $G(y,x)=G(x,y)$ для почти всех точек прямоугольника R;

   4) $\int_a^b\int_a^b G(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy\geqslant 0$ для любой функции $u(x)\in L_p$.

2. 1) $r(x)\in L_p,\ p>1,\ 1/p+1/q=1,\ r(x)\geqslant 0$ для почти всех $x\in(a,b)$;

   2) $G(y,x)=G(x,y),\ |G(x,y)|\leqslant M$ в прямоугольнике R;

   3) $\int_a^b\int_a^b G(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy\geqslant 0$ для любой функции $u(x)\in L_p$.

Цитированная литература

[1] Д. Ф. Харазов, *О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта-Шмидта*, УМН 12, в. 4 (76) (1957), стр. 201-207.

[2] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Москва 1962.

[3] W. Reid, *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space*, Duke Math. Journ. 18, N1 (1951), стр. 41-56.

[4] E. Hille, I. Tamarkin, *On the theory of linear integral equations. II*, Ann. of Math. 35, N3 (1934), стр. 445-455.

Reçu par la Rédaction le 6. 11. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVII. (1966)

Le spectre de Wiener

par

Yves MEYER (Strasbourg)

Introduction

Pour une fonction bornée, g, d'une variable réelle, deux spectres peuvent être envisagés. Le premier est le complémentaire de l'ensemble des y réels pour lesquels

$$(2T)^{-1}\int_{-T}^{+T}\exp(-iyx)g(x)\,dx$$

tend vers 0, quand T tend vers l'infini. L'autre est le plus petit fermé E tel que si f est dans $L^1(R)$ et si le support de sa transformée de Fourier est disjoint de E, $f*g$ soit nul.

La première définition ne fait appel qu'au comportement à l'infini de g. Le spectre de Wiener d'une fonction bornée g (considéré par Wiener dans un cas particulier) est plus précis que le premier et moins que le second; il ne fait appel qu'au comportement à l'infini de g (§ 1 et § 2). La corrélation de g, limite, quand T tend vers l'infini, en un sens à préciser, de

$$(2T)^{-1}\int_{-T}^{+T}g(x+t)\overline{g(t)}\,dt,$$

est la cotransformée de Fourier d'une mesure positive portée par le spectre de Wiener de g (§ 3).

Même dans les cas qui semble les plus favorables, le spectre de Wiener est d'un mauvais usage pour faire la synthèse de g (§ 4).

§ 1. Définition du spectre de Wiener

Notations. Deux espaces vectoriels X^p et Y^p, isomorphes à R^p, sont mis en dualité par une forme bilinéaire réelle, non dégénérée, notée: $x\cdot y$. La topologie de X^p est définie par une norme, notée $|x|$ et la mesure d'un ensemble A de X^p, intégrable pour la mesure de Lebesgue, dx, sera notée mes (A).

Dans l'espace $L^1(X^p)$, des classes de fonctions, à valeurs complexes, dx-intégrables, est défini le produit de convolution, noté $f*g$, entre deux éléments f et g de $L^1(X^p)$. Un représentant de la classe $f*g$ est donné par la fonction dont la valeur, en presque tout x, est

$$\int_{X^p} f(x-\xi)g(\xi)\,d\xi.$$

La transformée de Fourier de f, dans $L^1(X^p)$, sera notée $\hat{f}$ et définie, sur Y^p, par

$$\hat{f}(y) = \int_{X^p} \exp(-iy\cdot x)f(x)\,dx.$$

On pose

$$\|\hat{f}\|_A = \|f\|_1 \tag{1}$$

et, si E est un fermé de Y^p:

$$\|\hat{f}\|_E = \inf\{\|g\|_1;\ \hat{g} = \hat{f}\ \text{sur}\ E;\ g\in L^1(X^p)\}. \tag{2}$$

L'algèbre de Banach $A(Y^p)$ est l'ensemble de ces transformées de Fourier quand la norme est définie par (1) et quand le produit est le produit des fonctions au sens usuel.

Les fonctions continues sur X^p, à valeurs complexes, nulles à l'infini forment l'espace de Banach $C_0(X^p)$ dont le dual est l'ensemble $M(X^p)$ des mesures complexes bornées. La convergence faible d'une famille $d\mu_t$, indéxée par un paramètre réel, d'éléments de $M(G)$, est définie par la condition: pour tous les f de $C_0(X^p)$, les nombres complexes

$$\int_{X^p} f(x)\,d\mu_t(x) \tag{3}$$

ont une limite finie quand t tend vers t_0.

La condition (3) nécessite que l'ensemble des normes des mesures $d\mu_t$ soit borné, au voisinage de t_0, et, si ceci est réalisé, il suffit de prouver (3) pour une partie totale dans $C_0(X^p)$; on peut choisir, par exemple, les éléments de $A(X^p)$ ou même, les carrés des modules des éléments de $A(X^p)$.

Les classes de fonctions, à valeurs complexes, mesurables et bornées sur X^p, forment $L^\infty(X^p)$. Pour tout g dans $L^\infty(X^p)$ et tout $T>0$, on pose:

$$g_T = g\cdot X_T \quad \text{où} \quad X_T(x) = 1,\ \text{si}\ |x|\leqslant T,\ 0\ \text{ailleurs}. \tag{4}$$

Définition et premières propriétés du spectre de Wiener

Définition 1. Un élément g dans $L^\infty(X^p)$ est dit *nul, en moyenne, à l'infini* si et seulement si

$$\lim_{T\to+\infty} T^{-p}\int_{|x|\leqslant T}|g|\,dx = 0 \quad \text{où} \quad \|T^{-p}g_T\|_1 \to 0 \quad (T\to+\infty). \tag{5}$$

Par exemple, si $\mu\in M(X^p)$, $\hat{\mu}$ est nulle, en moyenne, à l'infini, si et seulement si μ est continue. Si $g\in L^\infty(X^p)$ vérifie (5), pour tous les $f\in L^1(X^p)$, $f*g$ vérifie (5) et la limite uniforme, sur tout X^p, d'une suite d'éléments, vérifiant (5), vérifie aussi (5).

Définition 2. Le *cospectre* d'un idéal fermé I de $L^1(X^p)$ est le plus grand fermé de Y^p où s'annulent toutes les transformées de Fourier des éléments de I.

Définition 3. Le *spectre d'un élément* g de $L^\infty(X^p)$, noté $\mathrm{sp}\,g$, est le cospectre de l'idéal I des éléments f de $L^1(X^p)$ tels que $f*g=0$. On dit que g *satisfait à la synthèse spectrale* si tous les f de $L^1(R)$ tels que $\hat{f}$ soit nulle sur $\mathrm{sp}\,g$ vérifient $f*g=0$.

Remarque. Si $\hat{f}$ est nulle sur un ouvert contenant $\mathrm{sp}\,g$, on a $f*g=0$.

Définition 4. Le *spectre de Wiener d'un élément* g de $L^\infty(X^p)$ est le cospectre de l'idéal fermé J de $L^1(X^p)$, ensemble des f tels que $f*g$ soit nulle, en moyenne, à l'infini. On le notera $\underline{\mathrm{sp}}\,g$.

Remarques. On a $\underline{\mathrm{sp}}\,g \subset \mathrm{sp}\,g$. Contrairement à ce qu'on peut espérer, le spectre de Wiener peut être vide sans que g soit nulle en moyenne à l'infini. C'est le cas si $p=1$ et $g(x)=\exp(ix^a)$ $(a>1)$.

Définition 5. Le *spectre réduit* de $g\in L^\infty(X^p)$ est le complémentaire, dans Y^p, de l'ensemble des y, tels que

$$T^{-p}\hat{g}_T(y) = T^{-p}\int_{|x|\leqslant T}\exp(-ixy)g(x)\,dx \to 0 \quad (T\to+\infty). \tag{6}$$

Le spectre de Wiener est compris entre le spectre et le spectre réduit. Cela résulte, compte tenu de l'inclusion $\underline{\mathrm{sp}}\,g\subset\mathrm{sp}\,g$, du:

Théorème 1. *Le spectre de Wiener de g est le plus petit fermé E de Y^p tel que sur tout compact K ne rencontrant pas E*

$$T^{-p}\|\hat{g}_T\|_K \to 0 \quad (T\to+\infty) \quad (\text{Voir (2)}). \tag{7}$$

Remarque. Le spectre de Wiener diffère du spectre réduit en ce que, sur tout compact du complémentaire, la convergence simple est remplacée par une convergence plus précise que la convergence uniforme. En fait, on peut construire une fonction, dans $L^\infty(R)$, uniformément continue, g, telle que, pour tout $y\in R$

$$\frac{1}{2T}\int_{X-T}^{X+T}\exp(-ixy)g(x)\,dx \to 0 \quad (T\to+\infty),$$

uniformément en X, et dont le spectre de Wiener est tout R.

Démonstration du théorème 1. Elle se fera à l'aide de la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Pour tous les f dans $L^1(X^p)$ et les g dans $L^\infty(X^p)$, la condition* (c) *ci-dessous entraîne les conditions équivalentes* (a) *et* (b):

(a) *$f*g$ est nulle, en moyenne, à l'infini.*

(b) $T^{-p}\|f*g_T\|_1\to 0$ $(T\to+\infty)$.

(c) *$\hat{f}$ est nulle sur un ouvert contenant* $\underline{\mathrm{sp}}\,g$.

Pour démontrer la proposition 1, nous utilisons le lemme:

LEMME 1. *Pour tous les éléments f de $L^1(X^p)$, on a:*

$$(8)\qquad T^{-p}\int_{|x|\geqslant T}|f*g_T|\,dx\to 0\qquad (T\to+\infty),$$

$$(9)\qquad T^{-p}\int_{|x|\leqslant T}|f*g-f*g_T|\,dx\to 0\qquad (T\to+\infty).$$

Démonstration. Appelons k la mesure de la boule unité de X^p et C_T la „couronne" définie par $T\leqslant|x|\leqslant T+A$. Alors

$$(10)\qquad T^{-p}\mathrm{mes}(C_T)\to 0\qquad (T\to+\infty).$$

Mais, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $h\in L^1(X^p)$, à support compact, (contenu par exemple dans $|x|\leqslant A$), tel que:

$$(11)\quad T^{-p}\int_{|x|\geqslant T}|(f-h)*g_T|\,dx\leqslant T^{-p}\|(f-h)*g_T\|_1\leqslant k\cdot\|g\|_\infty\|f-h\|_1\leqslant\varepsilon/2.$$

Le support de $h*g_T$ est contenu dans $|x|\leqslant A+T$ et l'on a

$$(12)\quad T^{-p}\int_{|x|\geqslant T}|h*g_T|\,dx=T^{-p}\int_{C_T}|h*g_T|\,dx\leqslant T^{-p}\|h\|_1\|g\|_\infty\mathrm{mes}(C_T).$$

D'après (10), le dernier membre de (12) peut être rendu inférieur à $\varepsilon/2$ en prenant T assez grand et en additionnant (11) et (12) on déduit que le premier membre de (8) est inférieur à ε dès que T est assez grand. On montre (9) de la même manière.

La proposition 1 est alors immédiate. Pour en déduire le théorème 1, supposons d'abord que K et $E=\underline{\mathrm{sp}}\,g$ soient disjoints. On trouve, dans $A(Y^p)$, $\hat{f}$ égale à 1 sur K et de support disjoint de E. Grâce au (c) de la proposition 1, on a $f\in J$ (déf. 4) et, dans $A(Y^p)$, $T^{-p}\hat{f}\hat{g}_T$ tend vers 0, ce qui entraîne (7). Si le spectre de Wiener n'était pas le plus petit fermé tel que (7) ait lieu, il existerait un x_0 dans E et un voisinage compact K de x_0 tel que (7) ait lieu. Si $\hat{f}$ dans $A(Y^p)$ vaut 1 en x_0 et est nulle hors de K, (7) entraîne

$$T^{-p}\|\hat{f}\hat{g}_T\|_A\to 0\qquad (T\to+\infty)$$

qui implique que $\hat{f}$ soit nulle sur E, contrairement à $\hat{f}(x_0)=1$.

§ 2. Relation avec la définition de Wiener

Dans cette partie, nous posons, si $p=+1$ et si g est dans $L^\infty(R)$,

$$\sqrt{2\pi}\,s_2(y)=\int_{-1}^{+1}g(x)\,[\exp(-iyx)-1]/-ix\,dx,$$

et nous définissons $\sqrt{2\pi}\,s_1(y)$ comme la transformée de Fourier de la fonction, dans $L^2(R)$, égale à 0 sur $[-1,+1]$ et à $g(x)/-ix$ ailleurs. Alors

$$s(y)=s_1(y)+s_2(y)$$

est localement dans $L^2(R)$ et

$$\sqrt{2\pi}\big(s(y+\varepsilon)-s(y-\varepsilon)\big)$$

est la transformée de Fourier de

$$2\,\frac{\sin(\varepsilon x)}{x}\cdot g(x);$$

ce sont les seules propriétés que nous utiliserons. La dérivée, au sens des distributions, de $\sqrt{2\pi}\,s(y)$ est la transformée de Fourier de $g(x)$, au sens des distributions. Wiener se préoccupe de la suite bornée des mesures positives:

$$(4\pi\varepsilon)^{-1}\big|\big(s(y+\varepsilon)-s(y-\varepsilon)\big)\big|^2.$$

Il prouve, dans [5], p. 181, formule (23.03), que cette suite converge faiblement, sur $C_0(R)$, vers une mesure $d\sigma(y)$ dont le support est $\underline{\mathrm{sp}}\,g$. Nous allons dissocier ce résultat en un énoncé faible prouvé ci-dessous en toute généralité et un résultat fort démontré au § 3.

THÉORÈME 2. *Le plus petit fermé E de R tel que, sur tout compact de $\complement E$, $(\varepsilon)^{-1/2}\big(s(y+\varepsilon)-s(y-\varepsilon)\big)$ converge, au sens L^2, vers 0, est le spectre de Wiener de g. Il revient au même de dire que la suite des mesures*

$$\varepsilon^{-1}|s(y+\varepsilon)-s(y-\varepsilon)|^2$$

converge faiblement vers 0 sur les éléments de $C_0(R)$ nuls sur E.

Le théorème 2 résulte d'un lemme et du théorème 3 ci-dessous.

LEMME 2. *Pour toutes les mesures complexes bornées μ, l'existence de la limite*

$$(\mathrm{a})\qquad \lim_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}}(4\pi\varepsilon)^{-1}\int_R|s(y+\varepsilon)-s(y-\varepsilon)|^2|\hat{\mu}|^2\,dy$$

est équivalence à l'existence de la limite

$$(\mathrm{b})\qquad \lim_{T\to+\infty}(4\pi T)^{-1}\int_R|\hat{g}_T|^2|\hat{\mu}|^2\,dy$$

et les deux limites sont égales quand elles existent.

(Rappelons que $g_T = g$ sur $|x| \leqslant T$, 0 ailleurs).

Démonstration. Les expressions en (a) et (b) valent respectivement:

$$(1)\qquad (\pi\varepsilon)^{-1}\int_R \left|\left(\frac{\sin(\varepsilon x)}{x}g\right)*\mu\right|^2 dx,$$

$$(2)\qquad \frac{1}{2T}\int |g_T*\mu|^2 dx.$$

Nous allons voir que la différence entre (1) et (3) converge toujours vers 0, avec $\varepsilon > 0$, de même que celle entre (2) et (4), avec $1/T$, où l'on pose

$$(3)\qquad (\pi\varepsilon)^{-1}\int_R \frac{\sin^2\varepsilon x}{x^2}|g*\mu|^2 dx,$$

$$(4)\qquad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|g*\mu|^2 dx.$$

Comparer (3) et (4) revient à appliquer un théorème Taubérien de Wiener (p. ex. Wiener [5], p. 139, th. 21, ou Bochner [1], ch. II, th. 9).

Reste à montrer que la différence entre (1) et (3) ou entre les fonctions bornées de ε,

$$\left\|\left(\frac{\sin\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon}x}g\right)*\mu\right\|_2 \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\sin\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon}\,x}\cdot(g*\mu)\right\|_2,$$

tend vers 0, avec $\varepsilon > 0$. Or

$$\left\|\left(\frac{\sin\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon}\,x}g\right)*\mu - \frac{\sin\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon}\,x}\cdot(g*\mu)\right\|_2$$

est majoré par

$$(5)\qquad \|g\|_\infty \int_R \left\|\frac{\sin\varepsilon(x-t)}{\sqrt{\varepsilon}(x-t)} - \frac{\sin\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon}x}\right\|_2 d(|\mu|)$$

où $d(|\mu|)$ est la variation totale de $d\mu$. Mais

$$\left\|\frac{\sin\varepsilon(x-t)}{\sqrt{\varepsilon}(x-t)} - \frac{\sin\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon}\,x}\right\|_2 = \left\|\frac{\sin(x-\varepsilon t)}{x-\varepsilon t} - \frac{\sin x}{x}\right\|_2$$

et la continuité de la translation dans L^2 montre que cette dernière quantité converge vers 0, sur tout compact; (5) est uniformément bornée en ε et la convergence de (5) vers 0 résulte, par exemple, du théorème de

Lebesgue. On prouvera de même que la différence entre (2) et (4) tend vers 0 avec $1/T$.

Théorème 3. *Si g est dans $L^\infty(R^p)$, le spectre de Wiener de g est le plus petit fermé tel que, sur tout compact ne le rencontrant pas, la famille des fonctions de y,*

$$(6)\qquad T^{-p/2}\int_{|x|\leqslant T}\exp(-ixy)\,g(x)\,dx$$

converge, au sens L^2, vers 0, quand T tend vers $+\infty$.

Le théorème 3 résulte immédiatement de la proposition 2 et du lemme 3.

Proposition 2. *Si g est dans $L^\infty(R^p)$, f dans $L^1(R^p)$, les conditions ci-dessous sont équivalentes:*

$$(7)\qquad T^{-p}\|f*g_T\|_1 \to 0 \quad (T\to+\infty),$$

$$(8)\qquad T^{-p/2}\|f*g_T\|_2 \to 0 \quad (T\to+\infty).$$

Démonstration. Si (7) est vérifié, (8) l'est parce que

$$\int_{X^p}|f*g_T|^2 dx \leqslant \|f*g_T\|_\infty \|f*g_T\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty\|f*g_T\|_1.$$

Si (8) est vérifié, l'inégalité de Schwarz donne

$$\Big(\int_{|x|\leqslant T}|f*g_T|\,dx\Big)^2 \leqslant \operatorname{mes}[|x|\leqslant T]\cdot\|f*g_T\|_2^2$$

et cette inégalité entraîne

$$T^{-p}\int_{|x|\leqslant T}|f*g_T|\,dx \to 0 \quad (T\to+\infty),$$

d'où l'on déduit (7) grâce au lemme 2.

Lemme 3. *Soit h_T une famille bornée dans $L^2(Y^p)$, $\|h_T\|_2 \leqslant 1$. Alors pour les éléments f de $C_0(Y^p)$, les conditions*

$$(9)\qquad \|f\cdot h_T\|_2 \to 0 \quad (T\to+\infty),$$

$$(10)\qquad f \text{ est nul sur } E$$

sont équivalentes, quand E est le plus petit fermé tel que, sur tout compact ne le rencontrant pas, h_T tend, au sens L^2, vers 0 $(T\to+\infty)$.

Démonstration. La condition (9) définit un idéal fermé de C_0, c'est-à-dire du type (10), pour un fermé E de Y^p. On raisonne comme dans la démonstration du théorème 1 pour préciser E.

Remarque. Nous avons ainsi défini le spectre de Wiener de g grâce à la convergence vers 0, sur tout compact du complémentaire du spectre, des mesures bornées $(4\pi\varepsilon)^{-1}|s(y+\varepsilon)-s(y-\varepsilon)|^2dy$ ou $(4\pi T)^{-1}|\hat{g}_T|^2dy$ et l'équivalence entre ces deux convergences résulte du lemme 2.

Si nous savons ce qui se passe en dehors du spectre, nous ne savons pas obtenir une analyse de g sur le spectre. Ce sera l'objet de la troisième partie.

§ 3. La classe S de Wiener

Wiener définit S comme l'ensemble des fonctions mesurables, à valeurs complexes, définies sur R, g, telles qu'en posant:

$$p(T, x) = (2T)^{-1}\int_{-T}^{+T} g(x+t)\overline{g(t)}\,dt \tag{1}$$

la limite $\varphi(x)$ de $p(T, x)$, quand T tend vers l'infini, existe et soit finie pour tout x. La fonction $\varphi(x)$ est mesurable et définie positive. D'après un théorème de F. Riesz (voir p. ex. Loève [3], p. 209, th. A') $\varphi(x)$ est égale, presque partout à $\hat{\sigma}(-x)$, où σ est une mesure positive, bornée, ayant pour support le spectre de Wiener de g. Si par exemple,

$$g = \sum_1^n a_p \exp(iy_p x), \qquad \sigma = \sum_1^n |a_p|^2\delta(y_p),$$

où $\delta(y_p)$ est la masse unité en y_p.

Nous allons placer ce résultat dans un cadre un peu différent, grâce aux résultats suivants.

LEMME 4. *Si $g \in L^\infty(R)$, pour la topologie faible, sur $L^\infty(R)$, définie par la dualité avec $L^1(R)$, toute limite faible $p(x)$ d'une suite extraite de* (1) *($T \to +\infty$) est égale, presque partout à $\hat{\sigma}(-x)$ où σ est une mesure positive, limite faible, sur $C_0(R)$, d'une suite extraite de $(4\pi T)^{-1}|\hat{g}_T|^2 dy$ ($T \to +\infty$) et réciproquement.*

On peut alors poser la:

DÉFINITION 7. Si $g \in L^\infty(R)$, soit σ la borne inférieure des mesures bornées supérieures à toutes les limites faibles de $(4\pi T)^{-1}|\hat{g}_T|^2 dy$. La corrélation $\varphi(x)$ de g est par définition $\hat{\sigma}(-x)$. Quand on munit l'ensemble des fonctions continues définies positives sur R de la relation d'ordre canonique [1], $\varphi(x)$ est la plus petite fonction continue définie positive majorant toutes les limites faibles de (1).

Remarque. La mesure σ est portée par $\operatorname{sp} g$.

THÉORÈME 4. *Pour tous les éléments g, dans $L^\infty(R)$, les énoncés* (a), (b), (c), (d), *ci-dessous sont équivalents quand ε tend vers 0 ou T vers l'infini:*

[1] Si φ et ψ sont définies-positives, on écrit $\varphi < \psi$ si et seulement si $\psi - \varphi$ est définie-positive.

(a) *les mesures $(4\pi\varepsilon)^{-1}|s(y+\varepsilon) - s(y-\varepsilon)|^2 dy$ convergent faiblement, sur $C_0(R)$, vers la mesure σ;*

(b) *les mesures $(4\pi T)^{-1}|\hat{g}_T|^2 dy$ convergent faiblement, sur $C_0(R)$, vers la mesure σ;*

(c) *les $p(T, x)$ de $L^\infty(R)$ convergent faiblement, sur $L^1(R)$, vers $\varphi(x)$;*

(d) *pour tous les f de $L^1(R)$,*

$$\lim_{T\to+\infty} (2T)^{-1}\int_{-T}^{+T} |g*f|^2 dx$$

existe et est finie; quand (a), (b), (c), (d) *sont réalisée, la limite faible de* (c) *est $\hat{\sigma}(-x)$ et la limite de* (d) *est*

$$\int_R |\hat{f}|^2 d\sigma(y).$$

Démonstration du théorème 4 et du lemme 4. Les conditions (a), (b) et (d) sont équivalentes, grâce au lemme 2 et aux remarques faites sur la convergence faible faites dans le § 1.

Pour montrer le lemme 4 et l'équivalence de (b) et (c), posons $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$ et

$$h(T, x) = (2T)^{-1}\int_{-T}^{+T} g(x+t)\overline{g(t)}\,dt - (2T)^{-1} g_T * \tilde{g}_T.$$

Alors $\|h(T, x)\|_\infty$ est borné uniformément en T et sur tout compact de R, $h(T, x)$ tend uniformément vers 0 ($T \to +\infty$). La convergence faible sur $L^1(R)$, vers 0 de $h(T, x)$ en découle et celle de $(2T)^{-1} g_T * \tilde{g}_T$ est équivalente à celle des transformées de Fourier, $(2T)^{-1}|\hat{g}_T|^2$, sur $C_0(R)$. Donc (b) et (d) sont équivalents.

Nous allons maintenant donner des énoncés plus précis, grâce à la

DÉFINITION 6. Pour une suite de mesures positives, bornées, μ_n ($n \geqslant 1$) et une mesure positive, bornée, μ, *la convergence faible stricte de μ_n vers μ* ($n \to +\infty$) signifie

$$\int_R f\,d\mu_n \to \int_R f\,d\mu \quad \text{pout toute } f \text{ dans } C_0(R), \tag{2}$$

$$\int_R d\mu_n \to \int_R d\mu \tag{3}$$

et les conditions (2) et (3) réunies sont équivalentes à chacune des conditions (4), (5) et (6):

$$\int_R f\,d\mu_n \to \int_R f\,d\mu \quad \text{pour toute } f \text{ dans } L^\infty(R), \text{ continue;} \tag{4}$$

(5) $\hat{\mu}_n(y) \to g(y)$, pour tout y dans R, et g est continue à l'origine;

(6) $\hat{\mu}_n(y) \to g(y)$ uniformément sur tout compact

(voir par exemple Loève [3], p. 189 et suivantes).

Nous pouvons alors énoncer le

THÉORÈME 5. *Pour tous les éléments g dans $L^\infty(R)$, les énoncés* (a), (b), (c) *sont équivalents et entraînent l'énoncé* (d):

(a) $(4\pi\varepsilon)^{-1}|s(y+\varepsilon)-s(y-\varepsilon)|^2dy$ *converge vers une mesure bornée* $d\sigma$, *au sens de la convergence faible stricte*;

(b) $(4\pi T)^{-1}|\hat{g}_T|^2dy$ *converge vers une mesure bornée* $d\sigma$, *au sens de la convergence faible stricte*;

(c) $g \in S'$, *c'est-à-dire* $\varphi(x)$ *définie par* (1) *est continue sur* R;

(d) $\lim\limits_{T\to+\infty}(2T)^{-1}\int\limits_{-T}^{+T}|g*\mu|^2dx$ *existe et est finie, pour toute* μ *dans* $M(R)$, *et vaut* $\int\limits_R|\hat{\mu}|^2d\sigma(y)$.

Si (a), (b), (c) *sont réalisés*, $\varphi(x) = \hat{\sigma}(-x)$ (comparer avec Wiener [5], p. 181, théorème 31).

La démonstration du théorème 5 est analogue à celle du théorème 4. La continuité de φ à l'origine entraîne $g \in S'$.

Remarques. Si μ est une mesure discrète somme absolument convergente de masses ponctuelles, l'existence de la corrélation $\varphi(x)$ de g entraîne l'existence du premier membre de (d). Si $g = \exp(ix^2)$ et si μ est continue, on a

$$|g*\mu(x)| = |\hat{\nu}(2x)|, \quad \text{où} \quad \nu(x) = \exp(ix^2)\mu(x).$$

Donc $g*\mu$ est nulle en moyenne à l'infini. Ceci prouve que, pour toute μ dans $M(R)$, si $g = \exp(ix^2)$, (d) est vérifié. Voilà pourquoi (d) n'entraîne pas (a).

Si g est dans S', si $\underline{\mathrm{sp}}\,g$ est vide, g est nulle en moyenne à l'infini. Il n'en est pas de même si g est dans S.

La fonction $g(x)$ égale à $\exp(in\,x)$ sur $[2^{2n}, 2^{2n+1}]$, 0 ailleurs ($n \geqslant 0$), vérifie les conditions (a), (b), (c), (d) du théorème 4 sans appartenir à S.

La fonction g égale à 1 sur $[0, +\infty[$ à -1 ailleurs appartient à S'. Son spectre de Wiener est $\{0\}$. On ne peut évidemment trouver une suite P_n de polynômes trigonométriques de spectre contenu dans $\{0\}$, soit des constantes, convergente en moyenne à l'infini vers g. On pourrait aussi prendre g nulle sur $]-\infty, 1]$, égale à $(-1)^n$ sur $[2^n, 2^{n+1}[$ ($n \geqslant 0$) pour exclure la possibilité d'une convergence, à droite, de la suite P_n vers g, en moyenne à l'infini (le spectre de Wiener est $\{0\}$ dans ce dernier cas).

§ 4. La classe T

Les mesures de „répartition spectrale“ $d\sigma$ associées aux fonctions g des classes S ou S' ne dépendent que du comportement moyen à l'infini de g. La seule possibilité de reconstituer g à l'aide de son spectre de Wiener était de former une suite P_n de polynômes trigonométriques vérifiant:

$$\mathrm{sp}\,P_n \subset \underline{\mathrm{sp}}\,g,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|g-P_n|\,dx = 0.$$

Nous avons vu que c'est impossible en général; que dire maintenant des éléments g de $L^\infty(R)$ tels que le comportement, à distance finie, dépende du comportement moyen à l'infini et quelles possibilités de synthèse peut-on espérer dans ce cas? Pour être plus précis, posons la

DÉFINITION 8. *L'élément g de $L^\infty(R)$ appartient à T* si, pour tous les f de $L^1(R)$,

(1) $f*g$ nulle en moyenne à l'infini $\Rightarrow f*g = 0$.

Remarque. T peut aussi être défini comme l'ensemble des g de $L^\infty(R)$ admettant la synthèse spectrale et dont le spectre est le spectre de Wiener.

THÉORÈME 6. *On peut construire une fonction, h, uniformément continue, dans $L^\infty(R)$, appartenant à T, qui, pour la topologie faible sur $L^\infty(R)$, considéré comme dual de $L^1(R)$, n'est limite d'aucune suite P_n de polynômes trigonométriques vérifiant* $\mathrm{sp}\,P_n \subset \mathrm{sp}\,h$.

Suivant une idée de Koosis ([2]), la construction de h repose sur l'existence d'un compact indépendant K support d'une mesure positive μ dont la transformée de Fourier est nulle à l'infini.

Nous commencerons par prouver la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *On peut trouver, dans $L^\infty(R)$, une fonction g, uniformément continue, admettant la synthèse spectrale, nulle en moyenne à l'infini, dont le spectre est un compact indépendant et qui n'est pas la transformée de Fourier d'une mesure bornée.*

Démonstration. Nous définissons $B(R)$ comme l'ensemble des transformées, $\hat{\mu}$, de Fourier des éléments μ de $M(R)$ et posons $\|\hat{\mu}\|_B = \|\mu\|$. Rudin a montré l'existence (voir par exemple [2], p. 106, th. II) d'un compact indépendant K, support d'une mesure positive μ, telle que $g_1(x) = \hat{\mu}(-x)$ soit nulle à l'infini. Il existe donc une suite croissante

([2]) P. Koosis (travail inédit, communication orale de J.-P. Kahane).

x_k $(k \geqslant 1)$ telle que:

(a) $x_k - x_{k-1}$ tend en croissant vers $+\infty$,

(b) $|g_1(x)| \leqslant k^{-2}$ dès que $|x| \geqslant 2^{-1}(x_k - x_{k-1})$.

La série

$$\sum_1^{+\infty} a_k g_1(x - x_k) \tag{2}$$

définit $g(x)$, nulle en moyenne à l'infini uniformément continue, sur tout R, et bornée, si $|a_k| \leqslant 1$. Les sommes partielles de (2) sont uniformément bornées dans L^∞ et convergent uniformément sur tout compact vers $g(x)$. Si f est dans $L^1(R)$, si $\hat{f}$ est nulle sur K, il en résulte que $f * g = 0$. Réciproquement, si $f*g = 0$ et si a_k ne tend pas vers 0 quand k tend vers $+\infty$, montrons que $f*g_1 = 0$. Mais les fonctions $g(x+x_k) - a_k g_1(x)$ forment une suite, bornée dans L^∞, qui converge uniformément vers 0, sur tout compact. Si $f*g = 0$ on aura $a_k f * g_1 \to 0$ $(k \to +\infty)$ et donc $f*g_1 = 0$; soit $\hat{f}$ est nulle sur K.

Reste à voir que l'on peut choisir les a_k pour que g n'appartienne pas à $B(R)$. Sinon, en appliquant le théorème du graphe fermé à l'application linéaire de l^∞ dans $B(R)$ que définit (2), on aurait, pour une constante A

$$\Big\|\sum_1^n a_k g_1(x - x_k)\Big\|_B \leqslant A \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k|.$$

En particulier, si les a_k sont les fonctions $r_k(t)$ de Rademacher on en déduit:

$$\int_R \Big|\sum_1^n r_k(t) \exp(-i x_k y)\Big| d\mu(y) \leqslant A.$$

En intégrant, par rapport à t, compte tenu de l'inégalité

$$\Big(\sum_1^n |a_k|^2\Big)^{1/2} \leqslant 2 \int_2^1 \Big|\sum_1^n a_k r_k(t)\Big| dt$$

(voir par exemple Rudin [4], formule (6), p. 128), on aurait $\sqrt{n}\|\mu\| \leqslant 2A$ soit $\mu = 0$.

Si la seule façon de sortir de $B(R)$ était de choisir une suite a_k tendant vers 0 quand k tend vers l'infini,

$$g = \sum_1^{+\infty} g_1(x - x_k)$$

appartiendrait à $B(R)$ et en additionnant, on pourrait choisir une suite a_k, tendant vers 1, quand k tend vers l'infini.

Pour déduire le théorème 6 de la proposition 3, appelons y_k $(k \geqslant 1)$, une suite réelle, dense dans K, et posons

$$g'(x) = \sum_1^{+\infty} 2^{-k} \exp(i y_k x). \tag{3}$$

La fonction h, égale à $g + g'$, convient pour le théorème 6. En premier lieu, le spectre de Wiener de h est K. En effet, si $f*h$ est nulle en moyenne à l'infini, pour un f dans $L^1(R)$, il en est de même de

$$f*g'(x) = \sum_1^{+\infty} 2^{-k} \exp(i y_k x) \hat{f}(y_k)$$

et il résulte, des propriétés des fonctions presque périodiques uniformément continues, que $\hat{f}(y_k) = 0$ $(k \geqslant 1)$. Alors $\hat{f}$ est nulle sur K. Le spectre de h est contenu dans K et donc égal à K ($\operatorname{sp} g \supset \overline{\operatorname{sp} g} = K$). Si h était limite faible d'une suite $P_n(x) = \hat{\mu}_n(-x)$ de polynômes trigonométriques de spectre dans K (les mesures μ_n sont une suite de combinaisons linéaires finies de mesures de Dirac portées par K), le théorème de Banach et Steinhaus donnerait, pour une constante A

$$\|\hat{\mu}_n\|_\infty \leqslant A.$$

Mais puisque K est indépendant, on en déduit

$$\|\mu_n\| = \|\hat{\mu}_n\|_\infty \leqslant A$$

et la suite bornée μ_n contient une sous-suite, convergente vers une mesure ν, sur les fonctions de $C_0(R)$. La sous-suite correspondante des $\hat{\mu}_n(-x)$ convergerait faiblement, sur $L^1(R)$, vers $\hat{\nu}(-x)$ et l'on aurait

$$h(x) = \hat{\nu}(-x),$$

contrairement à la proposition 3 et à la définition de $h(x)$.

Travaux cités

[1] S. Bochner, *Lectures on Fourier integrals*, Annals of Mathematics Studies 42 (1959).

[2] J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris 1963.

[3] M. Loève, *Probability theory*, 1963.

[4] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, 1962.

[5] N. Wiener, *The Fourier integral*, Cambridge 1933.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE, STRASBOURG

Reçu par la Rédaction le 23. 11. 1965