STUDIA MATHEMATICA, T. XXVII. (1966)

Симметризуемые операторы в банаховых пространствах и их приложения

Д. Ф. ХАРАЗОВ (Ленинград)

Введение

1. Пусть X — банахово пространство над полем комплексных (или вещественных) чисел, а X^* — сопряженное пространство всех линейных непрерывных функционалов, определенных на X. Билинейную форму $f(x)$, порождаемую функционалом $f\in X^*$ и элементом $x\in X$ будем обозначать через (x,f). По аналогии с гильбертовыми пространствами умножение на скаляр λ в пространстве X^* определим следующим образом:

$$(x,\lambda f)=\bar{\lambda}(x,f).$$

Тогда форма (x,f) будет удовлетворять следующим условиям:

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,f)=\alpha_1(x_1,f)+\alpha_2(x_2,f),\qquad x_1,x_2\in X,\ f\in X^*,$$
$$(x,\beta_1f_1+\beta_2f_2)=\bar{\beta}_1(x,f_1)+\bar{\beta}_2(x,f_2),\qquad x\in X,\ f_1,f_2\in X^*.$$

Рассмотрим линейный (аддитивный и однородный, но не обязательно непрерывный в смысле нормы в X) оператор A, действующий в X: $A(X)\subseteq X$.

Будем говорить, что *комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству $\varrho(A)$ оператора A*, если оператор $I-\lambda A$ (I — оператор тождественного преобразования в X) имеет обратный оператор $(I-\lambda A)^{-1}$, определенный на X и непрерывный в смысле нормы пространства X. Дополнение множества $\varrho(A)$ до всей комплексной плоскости будем называть *спектром* оператора A и обозначать через $\sigma(A)$.

Будем говорить, что оператор A имеет *дискретный спектр*, если его спектр $\sigma(A)$ целиком состоит из множества собственных значений конечной кратности уравнения

$$x-\lambda Ax=0,\qquad x\in X, \tag{1}$$

не имеющего предельной точки в конечной части комплексной плоскости λ.

Оператор A будем называть *симметризуемым*, если существует линейный (аддитивный и однородный) оператор H, отображающий X в X^*, $H(X) \subseteq X^*$, такой, что для любых элементов $x, y \in X$

$$(y, Hx) = \overline{(x, Hy)}, \quad (y, HAx) = \overline{(x, HAy)}. \tag{2}$$

В случае, если X — гильбертово пространство, то наше определение совпадает с известным определением симметризуемого оператора в гильбертовом пространстве.

В настоящей работе мы покажем, что для симметризуемых операторов в банаховых пространствах, имеющих разве лишь дискретный спектр при различных предположениях относительно оператора H, справедлива теория Гильберта-Шмидта. В частном случае, когда X — гильбертово пространство и для любого $x \in X$, $(x, Hx) \geqslant 0$, поставленная задача решена в нашей работе [1]. Развивая предложенный в [1] метод, в первой части работы мы решаем задачу в общих банаховых пространствах, как при вышеуказанном условии относительно оператора H, так и при новом условии, что для любого $x \in X$

$$(x, HAx) > 0 \quad (x \neq 0). \tag{3}$$

Во второй части мы прилагаем полученные результаты к установлению теории Гильберта-Шмидта для интегральных уравнений в пространствах L_p и для граничных задач в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

2. Пусть A — линейный (вообще говоря не непрерывный) оператор, действующий в банаховом пространстве X, обладающий лишь дискретным спектром.

Оператор $T(\lambda)$, зависящий от комплексного параметра λ, действующий в X, будем называть *аналитическим относительно* λ в области D комплексной плоскости, если для любого $\lambda_0 \in D$ и любого $x \in X$, существует, в смысле топологии в X, следующий предел:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{-1}[T(\lambda) - T(\lambda_0)]x = B(\lambda_0)x. \tag{4}$$

Как известно (см. напр. [2]), для любого банахового пространства X имеет место

Лемма 1. *Для любой точки $\lambda_0 \in \varrho(A)$ найдется такая окрестность K_0: $|\lambda - \lambda_0| < r_0$, внутри которой оператор $(I - \lambda A)^{-1}$ аналитически зависит от λ.*

Из леммы 1 в частности следует, что оператор $(I - \lambda A)^{-1}$ непрерывно зависит от λ в K_0.

1. Симметризуемые операторы с дискретным спектром

3. Симметризуемый оператор A, который может иметь лишь дискретный спектр и удовлетворяет условию (¹)

$$(x, HAx) > 0 \quad \text{для любого} \quad x \in X \ (x \neq 0), \tag{5}$$

будем называть *оператором класса* (HA).

Лемма 2. *Если A — оператор класса (HA), то найдется такое $x_0 \in X$, что $(Ax_0, HAx_0) \neq 0$.*

Допуская противное, находим, что для любых $x, y \in X$ $(Ax, HAy) = 0$. Отсюда $\overline{(y, HAAx)} = 0$ и полагая $y = Ax$ найдем, что для любого $x \in X$ $(Ax, HAAx) = 0$, что противоречит условию (5).

Теорема 1. *Если A — оператор класса (HA), то существует, по крайней мере, одно собственное значение уравнения* (1), *все его собственные значения вещественны, а собственные элементы x_i, x_k, соответствующие различным собственным значениям удовлетворяют условию $(x_i, HAx_k) = 0$.*

Пусть λ_0 — собственное значение уравнения (1), а x_0 — соответствующий ему собственный элемент: $x_0 - \lambda_0 Ax_0 = 0$. В силу условий (2) (x_0, HAx_0) и (Ax_0, HAx_0) — вещественные числа и

$$\lambda_0 = \frac{(x_0, HAx_0)}{(Ax_0, HAx_0)}$$

также вещественное число.

Пусть $\lambda_i \neq \lambda_k$ — собственные значения и x_i, x_k — соответствующие им собственные элементы уравнения (1). Тогда, так как в силу (2) $\overline{(x_i, HAx_k)} = (x_k, HAx_i)$ и $\overline{(Ax_i, HAx_k)} = (Ax_k, HAx_i)$, обычным приемом убеждаемся в том, что $(\lambda_k - \lambda_i)(x_k, HAx_i) = 0$. Отсюда $(x_k, HAx_i) = 0$.

Пусть для некоторого $x_0 \in X$, $(Ax_0, HAx_0) \neq 0$ (см. лемму 2). В силу условия (5), $(x_0, HAx_0) \neq 0$. Рассмотрим число

$$\gamma = \frac{(x_0, HAx_0)}{(Ax_0, HAx_0)}.$$

Допустим сперва, что $(Ax_0, HAx_0) > 0$; тогда и $\gamma > 0$. Предположим, что интервал $(0, \gamma]$ свободен от собственных значений уравнения (1). Тогда, $x_0 - \gamma Ax_0 \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$x - \lambda Ax = x_0 - \gamma Ax_0. \tag{6}$$

(¹) Результаты пунктов 3, 4 и 5 остаются справедливыми при следующих условиях: $(x, HAx) \geqslant 0$, $x \in X$; из $Hx = 0$ следует $x = 0$; $A^2 \neq 0$ и $(x, HAx) \neq 0$ для собственных элементов уравнения (1), если таковые существуют.

Для любого λ, не принадлежащего спектру оператора A, решение уравнения (6) запишем в виде

$$x(\lambda) = (I-\lambda A)^{-1}(x_0-\gamma Ax_0)$$

и рассмотрим функцию вещественного переменного r

$$y(r) = \big(x(r), HAx(r)\big) - r\big(Ax(r), HAx(r)\big).$$

Для любого $r \in \varrho(A)$ и достаточно малого h,

$$\frac{y(r+h)-y(r)}{h} = \big(Ax(r), HAx(r+h)\big). \tag{7}$$

Действительно, для любых $r\in\varrho(A)$ и $r+h\in\varrho(A)$ справедливо равенство

$$x(r)-rAx(r) = x(r+h)-(r+h)Ax(r+h) = x_0-\gamma Ax_0.$$

В силу этого равенства и условий (2) найдем, что

$$y(r) = \big(Ax(r), H[x(r)-rAx(r)]\big) = \\ = \big(Ax(r), H[x(r+h)-(r+h)Ax(r+h)]\big)$$

и

$$y(r+h) = \big(Ax(r+h), H[x(r+h)-(r+h)Ax(r+h)]\big) = \\ = \big(Ax(r+h), H[x(r)-rAx(r)]\big).$$

В силу условий (2) число $y(r+h)$ — вещественное, а потому снова на основании (2) получим, что

$$y(r+h) = \overline{\big(Ax(r+h), H[x(r)-rAx(r)]\big)} = \\ = \big(x(r), HAx(r+h)\big) - r\big(Ax(r), HAx(r+h)\big) = \\ = \big(Ax(r), H[x(r+h)-rAx(r+h)]\big).$$

Вычитая теперь из $y(r+h)$ значение $y(r)$, получим формулу (7).

В силу леммы 1 существует предел при $h\to 0$ функции, стоящей справа в (7) и

$$y'(r) = \big(Ax(r), HAx(r)\big).$$

Но, $x(\gamma) = x_0$ и $y'(\gamma) = (Ax_0, HAx_0) > 0$. Следовательно, $y(r)$ возрастает в точке $r=\gamma$. Так как $y(\gamma)=0$, то для левой окрестности точки $r=\gamma$, $y(r)<0$. В силу допущения, интервал $(0,\gamma]\in\varrho(A)$. Отсюда следует, что $y(0)<0$, ибо допуская противное видим, что в интервале $(0,\gamma)$ найдется такая точка μ, для которой $y'(\mu)=0$ и $y(\mu)<0$, но так как $y(\mu) = \big(x(\mu), HAx(\mu)\big) > 0$ получаем противоречие. Неравенство же $y(0)<0$ противоречит следующему

$$y(0) = \big(x_0-\gamma Ax_0, HA(x_0-\gamma Ax_0)\big) > 0,$$

что доказывает существование в $(0,\gamma]$ хотя бы одного положительного собственного значения уравнения (1). Если же $(Ax_0, HAx_0) < 0$, то аналогично убеждаемся в существовании отрицательного собственного значения, что и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Если A — оператор класса (HA), то множество положительных (отрицательных) собственных значений его $\lambda_1^+ \leqslant \lambda_2^+ \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^+ \leqslant \ldots$ $(\lambda_1^- \geqslant \lambda_2^- \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n^- \geqslant \ldots)$, которым соответствуют собственные элементы $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+, \ldots$ $(x_1^-, x_2^-, \ldots, x_n^-, \ldots)$, удовлетворяющие условиям обобщенной ортонормированности $(x_i, HAx_k) = \delta_{ik}$ $(i,k = 1,2,\ldots)$ имеет следующие экстремальные свойства: на множестве элементов $x\in X$, удовлетворяющих условиям $(x, HAx) = 1$, $(x, HAx_k^+) = 0$ $\big((x, HAx_k^-) = 0\big)$ $(k = 1,2,\ldots,n-1)$, функционал (Ax, HAx) достигает на элементе $x = x_n^+$ $(x = x_n^-)$ положительного максимума (отрицательного минимума) равного $1/\lambda_n^+$ $(1/\lambda_n^-)$ $(n = 1,2,\ldots)$.*

В силу теоремы 1, если для некоторого $x\in X$, $(Ax, HAx) > 0$, $(x, HAx) = 1$ и λ_1^+ наименьшее положительное значение уравнения (1), то $\lambda_1^+ \leqslant 1/(Ax, HAx)$. Если же x_1^+ — собственный элемент, соответствующий λ_1^+, то $\lambda_1^+ = 1/(Ax_1^+, HAx_1^+)$. Следовательно, при любом $x\in X$, для которого $(Ax, HAx) > 0$,

$$(Ax, HAx) \leqslant \frac{1}{\lambda_1^+}.$$

Допустим теперь, что $\lambda_1^+ \leqslant \lambda_2^+ \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^+$ — положительные собственные значения уравнения (1) с собственными элементами $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_{n-1}^+$, удовлетворяющими условиям $(x_i^+, HAx_k^+) = \delta_{ik}$ $(i,k = 1,\ldots,n-1)$ и функционал (Ax, HAx) на множестве элементов x, для которых $(x, HAx) = 1$, $(x, HAx_k^+) = 0$ $(k = 1,\ldots,m-1;\ m\leqslant n-1)$ достигает на x_m^+ максимума равного $1/\lambda_m^+$ $(m = 1,2,\ldots,n-1)$. Рассмотрим множество $X_{n-1}^+ \subset X$ элементов x, для которых $(x, HAx_k^+) = 0$ $(k = 1,\ldots,n-1)$. Множество X_{n-1}^+ является подпространством банахового пространства X. Пусть $x\in X_{n-1}^+$, тогда в силу (2)

$$(Ax, HAx_k^+) = \overline{(Ax_k^+, HAx)} = \frac{1}{\lambda_k^+}(x, HAx_k^+) = 0 \qquad (k = 1,\ldots,n-1).$$

Следовательно и $Ax\in X_{n-1}^+$. Рассматривая теперь уравнение (1) в X_{n-1}^+ и допуская, что множество $x\in X_{n-1}^+$, для которых $(Ax, HAx) > 0$ не пусто, убеждаемся в существовании собственного значения λ_n^+, $\lambda_{n-1}^+ \leqslant \lambda_n^+$, для которого, при любом $x\in X_{n-1}^+$, удовлетворяющем условию

$$(x, HAx) = 1, \qquad (Ax, HAx) \leqslant \frac{1}{\lambda_n^+}, \qquad (Ax_n^+, HAx_n^+) = \frac{1}{\lambda_n^+},$$

где x_n^+ — собственный элемент, соответствующий λ_n^+.

Для отрицательных собственных значений теорема доказывается аналогично.

4. Расположим теперь все собственные значения уравнения (1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ в порядке возрастания их абсолютных значений $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$, выписывая каждое из них столько раз, сколько линейно-независимых собственных элементов ему соответствует. Из теоремы 2 вытекает, что абсолютное значение функционала (Ax, HAx) на множестве элементов $x \in X$, удовлетворяющих условиям $(x, HAx) = 1$, $(x, HAx_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ (где x_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ — собственные элементы, соответствующие первым $n-1$ собственным значениям, нормированные условиями $(x_i, HAx_k) = \delta_{ik}$) достигает на собственном элементе $x = x_n$ максимума равного $1/|\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 3. *Если A — оператор класса (HA), то для любых элементов $f, g \in X$ имеет место равенство*

$$(Ag, HAf) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{(f, HAx_k)}(g, HAx_k)}{\lambda_k}. \tag{8}$$

Рассмотрим произвольный элемент $f \in X$ и положим

$$f_k = (f, HAx_k) \quad (k = 1, \ldots, n-1), \qquad u_n = f - \sum_{k=1}^{n-1} f_k x_k.$$

Тогда $(u_n, HAx_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ и $u_n \in X_{n-1}$, где X_{n-1} множество элементов $x \in X$, для которых $(x, HAx_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Поэтому имеет место неравенство

$$|(Au_n, HAu_n)| \leqslant \frac{(u_n, HAu_n)}{|\lambda_n|}. \tag{9}$$

Но

$$(u_n, HAu_n) = (f, HAf) - \sum_{k=1}^{n-1} |f_k|^2 \tag{10}$$

и

$$(Au_n, HAu_n) = (Af, HAf) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k}.$$

Отсюда, в силу (9), для любого $f \in X$,

$$(Af, HAf) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, HAx_k)|^2}{\lambda_k}. \tag{11}$$

(Если при некотором n, для любого $x \in X_{n-1}$, $(Ax, HAx) = 0$ то уравнение (1) имеет конечное число собственных значений и в (11) будет конечная сумма).

Из равенства (11), при помощи тождества

$$(Ag, HAf) = \tfrac{1}{4}\{(Ag+Af, H(Ag+Af)) - (Ag-Af, H(Ag-Af)) + \\ + i[(Ag+iAf, H(Ag+iAf)) - (Ag-iAf, H(Ag-iAf))]\},$$

для любых элементов $f, g \in X$ находим, что

$$(Ag, HAf) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{(f, HAx_k)}(g, HAx_k)}{\lambda_k}.$$

5. В этом пункте мы будем считать, что X — гильбертово пространство (вообще говоря не полное). Через $\overline{X}$ обозначим пополнение пространства X по норме $\|x\| = (x, x)^{1/2}$.

Теорема 4. *Если A — оператор класса (HA) и оператор $(HA)^{-1}$ определен на всем X, то для любого $f \in X$*

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, HAx_k)}{\lambda_k} x_k, \tag{12}$$

где ряд справа сходится слабо в X.

В силу (2) и (8) для любых $f, g \in X$

$$(g, HAAf) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(g, \frac{f_k}{\lambda_k} HAx_k\right).$$

Отсюда, для любого $x \in X$, полагая $g = (HA)^{-1}x$, в силу предыдущего равенства найдем, что

$$(x, Af) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x, \frac{f_k}{\lambda_k} x_k\right).$$

Лемма 3. *Если A — оператор класса (HA), то для любого $f \in X$,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, HAx_k)|^2}{\lambda_k^2} < +\infty.$$

Действительно, в силу (5) и (10), для любого $f \in X$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < +\infty. \tag{13}$$

Но $|\lambda_k| \to +\infty$ при $k \to \infty$ и справедливость леммы 3 следует из (13).

Теорема 5. *Если A — оператор класса (HA), удовлетворяющий условию*

$$(x, HAx) \geqslant \gamma(x, x), \quad \gamma > 0, x \in X, \tag{14}$$

то равенство (12) *справедливо в смысле сильной сходимости в* X.

Из условия (14) вытекает, что существует ограниченный оператор $(HA)^{-1}$ определенный на всем $\overline{X}$.

Положим

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{\lambda_k} x_k.$$

Тогда, в силу (14), для любых $m, n, m > n$,

$$\|F_m - F_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\gamma} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k^2}.$$

Следовательно, в силу леммы 3, последовательность $\{F_n\}$ сходится по норме в $\overline{X}$ к некоторому элементу $F \in \overline{X}$. Но, в силу теоремы 4, последовательность $\{F_n\}$ сходится слабо в X к элементу Af. Отсюда, $F = Af$.

Операторы, удовлетворяющие условиям теоремы 5 часто встречаются в приложениях (см. п.п. 9,10).

Теорема 6. *Если оператор A принадлежит классу (HA) и оператор HA ограничен в X, то для любого $f \in X$,*

$$HA(Af) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, HAx_k)}{\lambda_k} HAx_k,$$

где ряд справа сходится по норме в X.

Для положительного ограниченночо оператора HA имеет место неравенство (см. [3])

$$(HAx, HAx) \leqslant \|HA\|(x, HAx). \tag{15}$$

Полагая

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} HAx_k,$$

в силу (15), для любых m и n, $m > n$, найдем, что

$$\|\Phi_m - \Phi_n\|^2 \leqslant \|HA\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k^2}.$$

Отсюда, в силу теоремы 3, так же, как при доказательстве теоремы 5, следует сходимость последовательности Φ_n по норме в X к элементу $HA(Af)$.

Теорема 7. *Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 5, то при любом $\lambda \in \varrho(A)$ решение (единственное) уравнения $x - \lambda Ax = y$ имеет вид*

$$x = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, HAx_k)}{\lambda_k - \lambda} x_k + y, \tag{16}$$

где ряд сходится по норме в X.

Действительно, в силу теоремы 5

$$x = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, HAx_k)}{\lambda_k} x_k + y.$$

Но, как легко подсчитать

$$\frac{(x, HAx_k)}{\lambda_k} = \frac{(y, HAx_k)}{\lambda_k - \lambda},$$

откуда и следует справедливость представления (16).

Замечание. Всякий оператор A, симметризуемый ограниченным оператором H и вполне непрерывный в гильбертовом пространстве X имеет дискретный спектр. Поэтому, если такой оператор A удовлетворяет условию (5), то для оператора A справедливы теоремы 1,2,3 и 6. Из наших результатов, в частности, вытекает, что для симметризуемых, вполне непрерывных в гильбертовом пространстве операторов, удовлетворяющих условию (5), справедлива теория Гильберта-Шмидта.

6. В этом пункте снова рассмотрим общий случай банахового пространства X.

Симметризуемый оператор A (см. условия (2)), который может иметь лишь дискретный спектр и удовлетворяет следующим условиям: 1) $(x, Hx) \geqslant 0$ для любого $x \in X$; 2) $(x, Hx) \neq 0$ для любого собственного элемента уравнения (1), если таковые существуют; 3) $HAx \neq 0$ хотя бы для одного $x \in X$, будем называть *оператором класса* (H).

Лемма 4. *Если A — оператор класса (H), то найдется такое $x_0 \in X$, что $(x_0, HAx_0) \neq 0$.*

Допуская противное, найдем, что для любых $x, y \in X$ $(y, HAx) = 0$. Отсюда $HAx = 0$ для любого $x \in X$, что приводит к противоречию с условиями леммы.

Лемма 5. *Если A — оператор класса (H), $(x_0, HAx_0) \neq 0$, то и $(x_0, Hx_0) \neq 0$.*

Допуская противное, при любом $x \in X$ и вещественном ε из условия $\big(x_0 + \varepsilon x, H(x_0 + \varepsilon x)\big) \geqslant 0$ найдем, что $(x, Hx_0) = 0$. Отсюда, полагая $x = Ax_0$, получаем противоречие.

Теорема 8. *Если A — оператор класса (H), то существует, по крайней мере, одно собственное значение уравнения (1), все его собственные значения вещественны, а собственные элементы x_i и x_k, соответствующие различным собственным значениям удовлетворяют условию $(x_i, Hx_k) = 0$.*

Эта теорема доказывается так же, как теорема 1, при помощи лемм 4,5 и функции вещественного переменного r

$$y(r) = \big(x(r), Hx(r)\big) - r\big(x(r), HAx(r)\big).$$

Теорема 9. *Если A — оператор класса (H), то множество положительных (отрицательных) собственных значений его $\lambda_1^+ \leqslant \lambda_2^+ \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^+ \leqslant \ldots$ $(\lambda_1^- \geqslant \lambda_2^- \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n^- \geqslant \ldots)$, которым соответствуют собственные элементы $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+, \ldots$ $(x_1^-, x_2^-, \ldots, x_n^-, \ldots)$, удовлетворяющие условиям обобщенной ортонормированности $(x_i, Hx_k) = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$, обладает следующими экстремальными свойствами: на множестве элементов $x \in X$, удовлетворяющих условиям $(x, Hx) = 1$, $(x, Hx_k^+) = 0$ $((x, Hx_k^-) = 0)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ функционал (x, HAx) достигает на элементе $x = x_n^+$ $(x = x_n^-)$ положительного максимума (отрицательного минимума) равного $1/\lambda_n^+$ $(1/\lambda_n^-)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Эта теорема доказывается так же, как теорема 2, при помощи рассмотрения подпространства $X_{n-1}^+ \subset X$ элементов $x \in X$, для которых $(x, Hx_k^+) = 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$.

Расположим теперь все собственные значения уравнения (1) в порядке возрастания их абсолютных значений $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$ и рассмотрим соответствующие им собственные элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, удовлетворяющие условиям $(x_i, Hx_k) = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$.

Из теоремы 9 следует, что абсолютное значение функционала (x, HAx) на множестве элементов $x \in X$, удовлетворяющих условиям $(x, Hx) = 1$, $(x, Hx_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, достигает на собственном элементе $x = x_n$ максимума равного $1/|\lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. При помощи этого замечания, так же как теорема 3, доказывается

Теорема 10. *Если A — оператор класса (H), то для любых элементов $f, g \in X$ имеет место равенство*

$$(g, HAf) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{(f, Hx_k)}(g, Hx_k)}{\lambda_k}.$$

7. В этом пункте рассмотрим случай гильбертова пространства X и докажем ряд предложений, дополняющих результаты, полученные в [1].

Теорема 11. *Если A — оператор класса (H) и оператор H^{-1} существует и определен на всем X, то для любого $f \in X$*

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, Hx_k)}{\lambda_k} x_k, \tag{17}$$

где равенство (17) *справедливо в смысле слабой сходимости в X.*

Эта теорема доказывается на основании утверждения теоремы 10 так же, как теорема 4 была доказана при помощи теоремы 3.

Лемма 6. *Если A — оператор класса (H), то для любого $f \in X$,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, Hx_k)|^2}{\lambda_k^2} < +\infty.$$

Эта лемма доказывается на основании положительности оператора H, так же как лемма 3 была доказана на основании условия (5).

Теорема 12. *Если A — оператор класса (H), удовлетворяющий условию*

$$(x, Hx) \geqslant \gamma(x, x), \quad \gamma > 0, x \in X, \tag{18}$$

то равенство (17) *справедливо в смысле сходимости по норме в X.*

Эта теорема доказывается на основании условия (18) и леммы 6 так же, как была доказана теорема 5 на основании условия (14) и леммы 4.

Теорема 13. *Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 12, то при любом $\lambda \in \varrho(A)$ решение (единственное) уравнения $x - \lambda Ax = y$ имеет вид*

$$x = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, Hx_k)}{\lambda_k - \lambda} x_k + y,$$

где ряд сходится по норме в X.

Теорема 13 доказывается так же, как теорема 7.

В заключение заметим, что аналог теоремы 6 для операторов класса (H) в гильбертовом пространстве X доказан в работе [1].

8. Замечание. Как известно (см. напр. [2]) оператор A вполне непрерывный в банаховом пространстве X может иметь лишь дискретный спектр.

Следовательно: 1) всякий линейный вполне непрерывный в банаховом пространстве X симметризуемый оператор A, удовлетворяющий условию (5), принадлежит классу (HA) и для него справедливы теоремы 1, 2 и 3 и 2) любой линейный вполне непрерывный в банаховом пространстве X симметризуемый оператор A, удевлетворяющий условиям 1), 2) и 3) п. 6, принадлежит классу (H) и для него справедливы теоремы 8, 9 и 10.

2. Приложения

9. Граничные задачи теории дифференциальных уравнений. Пусть $L(u)$ и $M(u)$ — линейные самосопряженные в смысле Лагранжа дифференциальные операторы в некоторой области T n-мерного $(n\geqslant 1)$ пространства точек $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с границей S, имеющие соответственно порядки $2k$ и $2m$, $m\leqslant k-1$, $k\geqslant 1$; $U_i(u) (i=1,\ldots,k)$—линейные дифференциальные операторы не выше $(2k-1)$-го порядка, заданные на границе S; $f(x)$ — функция непрерывная в области T. Рассмотрим задачу: *найти решение $u(x)$ дифференциального уравнения*

$$L(u)=\lambda M(u)+f(x) \tag{19}$$

в области T, удовлетворяющее на границе S условиям

$$U_i(u)=0 \quad (i=1,\ldots,k). \tag{20}$$

Если $n=1$, то (19) будет обыкновенным дифференциальным уравнением и под условиями (20) надо понимать $2k$ условий на концах интервала (a, b), являющегося в этом случае областью T, в которой ищется решение, если же $n>1$, то (19) является дифференциальным уравнением с частными производными.

Обозначим через $C^{(2k)}$ совокупность функций $u(x)$ непрерывных в $T+S$ вместе со своими частными производными до $2k$-го порядка, удовлетворяющих на S условиям (20). Это множество плотно в пространстве $L_2(T)$-функций с суммируемым квадратом в области T, в смысле метрики $L_2(T)$.

Будем считать выполненными следующие условия:

1) для любых функций $u, v\in C^{(2k)}$

$$\int_T [vL(u)-uL(v)]dx=0,\quad \int_T [vM(u)-uM(v)]dx=0,$$

где $\int_T$ обозначает n-кратный интеграл по области T;

2) для любой функции $u\in C^{(2k)}$, $u\not\equiv 0$,

$$\int_T uM(u)\,dx>0;$$

3) уравнение $L(u)=g(x)$ при любой непрерывной в области T функции $g(x)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (20), представленное в виде

$$u(x)=\int_T G(x;y)g(y)dy,$$

где $G(x,y)$ — функция Грина оператора $L(u)$ в области T, соответствующая граничным условиям (20).

При наших условиях, задача (19), (20) эквивалентна на множестве $C^{(2k)}$ уравнению

$$u=\lambda L^{-1}M(u)+L^{-1}f, \tag{21}$$

где

$$L^{-1}v=\int_T G(x,y)v(y)dy.$$

Оператор $L^{-1}M$ симметризуем на $C^{(2k)}$ оператором L, ибо в силу условия 1), M — оператор симметрический на $C^{(2k)}$.

Лемма 7. *Если $u(x)$ — решение уравнения*

$$u=\lambda L^{-1}M(u), \tag{22}$$

то функция $M[u(x)]$ — решение уравнения

$$\varphi=\lambda ML^{-1}\varphi. \tag{23}$$

Если же $\varphi(x)$ — решение уравнения (23), *то функция $u=\lambda L^{-1}\varphi$ будет решением уравнения* (22).

Действительно, если $u(x)$ — решение уравнения (22), то

$$M(u)=\lambda ML^{-1}M(u).$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ — решение уравнения (23), тогда, если $u=\lambda L^{-1}\varphi$ то, $\varphi=\lambda ML^{-1}\varphi=M(u)$ и функция u удовлетворяет уравнению (22). Следовательно, спектр оператора $L^{-1}M$ (спектр однородной задачи (19), (20)) совпадает со спектром оператора ML^{-1}. Но оператор ML^{-1}, как интегральный оператор с непрерывным ядром, может иметь только дискретный спектр.

В силу условия 2) оператор $L^{-1}M$ удовлетворяет на $C^{(2k)}\subset L_2(T)$ условию (5). Таким образом, оператор $A=L^{-1}M$ на множестве $C^{(2k)}$ является оператором класса (HA) (в нашем случае $H=L$, $HA=LL^{-1}M=M$) и для него справедливы результаты п.п. 3 и 4. В рассматриваемом случае $X=C^{(2k)}$, $\overline{X}=L_2(T)$. Следовательно справедлива

Теорема 14. *Если операторы $L(u)$ и $M(u)$ удовлетворяют условиям 1), 2), 3), то существует счетное множество собственных значений $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_m| \leqslant \ldots$ однородной задачи* (19), (20), *все ее собственные значения вещественны, собственные функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x), \ldots$ удовлетворяют условиям обобщенной ортогональности*

$$\int_T u_i(x)M[u_k(x)]\,dx = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, 2).$$

Абсолютное значение функционала

$$\int_T\int_T G(x, y)M[u(x)]M[u(y)]\,dxdy$$

на множество функций $u(x) \in C^{(2k)}$, удовлетворяющих условиям

$$\int_T u(x)M[u(x)]\,dx = 1, \qquad \int_T u(x)M[u_k(x)]\,dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

достигает на функции $u_m(x)$ максимума равного $1/|\lambda_m|$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Для любых функций $u(x), v(x) \in C^{(2k)}$ имеет место равенство

$$(24) \qquad \int_T\int_T G(x, y)M[v(y)]M[u(x)]\,dxdy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_T u(x)M[u_k(x)]\,dx \int_T v(x)M[u_k(x)]\,dx}{\lambda k}.$$

Все утверждения этой теоремы, кроме существования счетного множества собственных значений, непосредственно следуют из теорем 1, 2 и 3. Существование счетного множества собственных значений является следствием равенства (24) и условия 2).

Возьмем теперь вместо условия 2) более сильное условие

4) $\int_T u(x)M[u(x)]\,dx \geqslant \gamma\int_T u^2(x)\,dx, \gamma > 0$.

Из теоремы 7 следует

Теорема 15. *Если операторы $L(u)$ и $M(u)$ удовлетворяют условиям 1), 3) и 4), то для любого λ, не являющегося собственным значением однородной задачи* (19), (20), *решение неоднородной задачи* (19), (20) *имеет вид*

$$u(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_T f(x)M[u_k(x)]\,dx}{\lambda_k - \lambda} u_k(x) + f(x),$$

где ряд сходится по норме в $L_2(T)$.

10. Интегро-дифференциальные уравнения. Пусть $L(u)$ — линейный дифференциальный оператор порядка $2k$ в области T n-мерного $(n \geqslant 1)$ пространства точек $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с границей S; $U_i(u)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — линейные дифференциальные операторы не выше $(2k-1)$-го порядка, заданные на S; $B(x; y)$ — симметрическое относительно точек $x, y \in T$ ядро, с суммируемым квадратом в $T \times T$; $f(x)$ — функция непрерывная в T. Рассмотрим задачу: *найти решение интегро-дифференциального уравнения*

$$(25) \qquad L(u) = \lambda B(u) + f(x),$$

где

$$B(u) = \int_T B(x; y)u(y)\,dy,$$

в области T, удовлетворяющее на S условиям

$$(26) \qquad U_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Пусть выполнены следующие условия:

1) для любых функций $u, v \in C^{(2k)}$

$$\int_T [vL(u) - uL(v)]\,dx = 0;$$

2) оператор $L(u)$ удовлетворяет условию 3) п. 9;

3) ядро $B(x; y)$ положительно на $C^{(2k)}$:

$$\int_T\int_T B(x; y)u(x)u(y)\,dxdy > 0, \quad u(x) \in C^{(2k)}, u(x) \not\equiv 0.$$

В силу условия 2) задача (25), (26) эквивалентна на $C^{(2k)}$ интегральному уравнению

$$u = \lambda L^{-1}B(u) + L^{-1}f,$$

где

$$L^{-1}v = \int_T G(x; y)v(y)\,dy.$$

Следовательно, однородная задача (25), (26) может иметь лишь дискретный спектр. Оператор $L^{-1}B$ симметризуем на $C^{(2k)}$ оператором L, так как $B(u)$ — симметричный оператор. В силу условия 3) оператор $L^{-1}B$ удовлетворяет на $C^{(2k)} \subset L_2(T)$ условию (5). Таким образом оператор $A = L^{-1}B$ принадлежит на $C^{(2k)}$ классу (HA) $(H = L, HA = LL^{-1}B = B)$ и на основании результатов п.п. 3 и 4 справедлива

Теорема 16. *Если выполняются условия* 1), 2), 3), *то существует счетное множество собственных значений $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_m| \leqslant \ldots$*

однородной задачи (25), (26), *все ее собственные значения вещественны, собственные функции* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x), \ldots$ *удовлетворяют условиям обобщенной ортогональности*

$$\int_T\int_T B(x;y)u_i(x)u_k(y)\,dx\,dy = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Абсолютное значение функционала

$$\int_T\int_T G(x;y)\Big(\int_T B(x,t)u(t)\,dt\Big)\Big(\int_T B(y;t)u(t)\,dt\Big)dx\,dy$$

на множестве функций $u(x)\in C^{(2k)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\int_T\int_T B(x;y)u(x)u(y)\,dx\,dy = 1, \qquad \int_T\int_T B(x;y)u(x)u_k(y)\,dx\,dy = 0$$
$$(k = 1, \ldots, m-1)$$

достигает на функции $u_m(x)$ *максимума, равного* $1/|\lambda_m|$ $(m = 1, 2, \ldots)$. *Для любых функций* $u(x), v(x)\in C^{(2k)}$ *имеет место равенство*

$$\int_T\int_T G(x;y)\Big(\int_T B(x;t)u(t)\,dt\Big)\Big(\int_T B(y;t)v(t)\,dt\Big)dx\,dy =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_T\int_T B(x;y)u(x)u_k(y)\,dx\,dy\int_T\int_T B(x;y)v(x)u_k(y)\,dx\,dy}{\lambda_k}.$$

Вместо условия 3) возьмем более сильное условие

4) $\int_T\int_T B(x;y)u(x)u(y)\,dx\,dy \geqslant \gamma\int_T u^2(x)\,dx$, $\gamma > 0$.

Тогда, из теоремы 7 следует

Теорема 17. *Если выполняются условия* 1), 2) *и* 4), *то для любого* λ, *неявляющегося собственным значением однородной задачи* (25), (26), *решение неоднородной задачи* (25), (26) *имеет вид*

$$u(x) = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_T\int_T B(x;y)f(x)u_x(y)\,dx\,dy}{\lambda_k-\lambda}u_k(x)+f(x),$$

где ряд сходится по норме в $L_2(T)$.

11. Интегральные уравнения в пространствах Банаха L_p. Пусть функции $K(x,y)$ и $H(x,y)$ определены в прямоугольнике R: $a\leqslant x, y\leqslant b$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $\int_a^b\{\int_a^b|K(x,y)|^q dy\}^{p/q}dx < +\infty$, $p>1$, $1/p+1/q=1$,

2) $\int_a^b\{\int_a^b|H(x,y)|^q dy\}dx < +\infty$;

3) $H(y,x) = H(x,y)$, $H(x,t)K(t,y) = H(y,t)K(t,x)$ для почти всех точек прямоугольника R;

4) $(Hu, u) = \int_a^b\int_a^b H(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy \geqslant 0$ для любой функции $u(x)\in L_p$ и $(Hu,u)\neq 0$ для любой собственной функции $u(x)$ интегрального уравнения

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)u(y)\,dy = 0, \quad u(x)\in L_p, \tag{27}$$

если таковая существует;

5) $\int_a^b H(x,t)\int_a^b K(t,y)u(y)\,dy\,dt \neq 0$ хотя бы для одной функции $u(x)\in L_p$.

Мы покажем, что оператор

$$K(u) = \int_a^b K(x,y)u(y)\,dy \tag{28}$$

принадлежит классу (H) в пространстве L_p (см. п. 6), причем его симметризатором H является оператор

$$H(v) = \int_a^b H(x,y)v(y)\,dy. \tag{29}$$

В силу условия 1) на основании неравенства

$$\Big|\int_a^b K(x,y)u(y)\,dy\Big|^p \leqslant \Big\{\int_a^b|K(x,y)|^q dy\Big\}^{p/q}\int_a^b|u(y)|^p dy, \qquad u(x)\in L_p,$$

видим, что оператор (28) отображает L_p в L_p. Из условия 1), как показали Э. Хилле и Я. Тамаркин [4], следует полная непрерывность оператора $K(u)$ в L_p. Отсюда вытекает, что оператор (28) может иметь лишь дискретный спектр.

На основании условия 2) и неравенства

$$\Big|\int_a^b H(x,y)v(y)\,dy\Big|^q \leqslant \int_a^b|H(x,y)|^q dy\Big\{\int_a^b|v(y)|^p dy\Big\}^{q/p}, \qquad v(y)\in L_p,$$

убеждаемся в том, что оператор $H(v)$ отображает L_p в сопряженное пространство L_q.

Из условия 2) следует суммируемость функции $H(x,y)u(x)v(y)$ в прямоугольнике R, откуда на основании 3) для любых $u, v \in L_p$,

$$(Hu, v) = \int_a^b\int_a^b H(x,y)u(y)v(x)\,dy\,dx =$$

$$= \int_a^b\int_a^b H(y,x)v(x)u(y)\,dx\,dy = (u, Hv).$$

В силу условий 1) и 2), для почти всех $x \in (a,b)$ существует повторный интеграл

$$\int_a^b |H(x,t)|\,dt \int_a^b |K(t,y)u(y)|\,dy.$$

Отсюда, на основании теоремы Тоннели, следует суммируемость функции $H(x,t)K(t,y)u(y)$ в прямоугольнике $a \leqslant t, y \leqslant b$ для почти всех $x \in (a,b)$. Тогда, в силу теоремы Фубини и условия 3)

$$\int_a^b H(x,t)\Big(\int_v^b K(t,y)u(y)\,dy\Big)\,dt = \int_a^b u(y)\Big(\int_a^b H(x,t)K(t,y)\,dt\Big)\,dy =$$

$$= \int_a^b u(y)\Big(\int_a^b H(y,t)K(t,x)\,dt\Big)\,dy.$$

Отсюда, для любых $u(x), v(x) \in L_p$,

$$(HKu, v) = \int_a^b\Big[\int_a^b H(x,t)\Big(\int_a^b K(t,y)u(y)\,dy\Big)dt\Big]v(x)\,dx = \tag{30}$$

$$= \int_a^b\Big[\int_a^b u(y)\Big(\int_a^b H(y,t)K(t,x)\,dt\Big)dy\Big]v(x)\,dx.$$

Так как для любой функции $u(y) \in L_p$,

$$\Phi(x) = \int_a^b |H(x,t)|\Big(\int_a^b |K(t,y)u(y)|\,dy\Big)\,dt \in L_q,$$

то для любой $v(x) \in L_p$ существует интеграл

$$\int_a^b |v(x)|\,\Phi(x)\,dx,$$

откуда, на основании теоремы Тоннели и условия 3) заключаем о суммируемости в R функции

$$v(x)u(y)\int_a^b H(y,t)K(t,x)\,dt.$$

Тогда, в силу теоремы Фубини и равенства (30)

$$(HKu, v) = \int_a^b\Big[\int_a^b v(x)\Big(\int_a^b H(y,t)K(t,x)\,dt\Big)dx\Big]u(y)\,dy =$$

$$= \int_a^b\Big[\int_a^b H(y,t)\Big(\int_a^b K(t,x)v(x)\,dx\Big)dt\Big]u(y)\,dy = (u, HKv).$$

Последнее равенство показывает, что оператор (29) симметризует в L_p оператор (28). В силу условий 4) и 5) выполняются условия 1), 2) и 3) п. 6.

Следовательно, оператор (28) принадлежит в L_p классу (H) и, в силу теорем 8, 9 и 10 справедлива

Теорема 18. *Если для интегрального уравнения* (27) *выполняются условия* 1), 2), 3), 4), 5), *то существует, по крайней мере, одно собственное значение уравнения* (27), *все его собственные значения* $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$ *вещественны, собственные функции* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ *удовлетворряют условиям обобщенной ортогональности*

$$\int_a^b\int_a^b H(x,y)u_i(x)u_k(y)\,dx\,dy = \delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,\ldots).$$

Абсолютное значение функционала

$$\int_a^b\Big[\int_a^b H(x,t)\Big(\int_a^b K(t,y)u(y)\,dy\Big)dt\Big]u(x)\,dx$$

на множестве функций L_p, *удовлетворяющих условиям*

$$\int_a^b\int_a^b H(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy = 1, \qquad \int_a^b\int_a^b H(x,y)u(x)u_k(y)\,dx\,dy = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

достигает на функции $u_n(x)$ *максимума равного* $1/|\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Для любых функций* $u(x), v(x) \in L_p$ *имеет место равенство*

$$\int_a^b\Big[\int_a^b H(x,t)\Big(\int_a^b K(t,y)u(y)\,dy\Big)dt\Big]v(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_a^b\int_a^b H(x,y)u(x)u_k(y)\,dx\,dy\int_a^b\int_a^b H(x,y)v(x)u_k(y)\,dx\,dy}{\lambda_k}.$$

Примеры. Легко проверить, что условия 1), 2), 3), 4) и 5) этого пункта выполняются, например, для интегрального уравнения

$$u(x)-\lambda\int_a^b r(x)G(x,y)u(y)\,dy = 0$$

в следующих двух случаях:

1. 1) $|r(x)|\leqslant M,\ r(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b]$;
   2) $\int_a^b\left(\int_a^b|G(x,y)|^q dy\right)^\mu dx < +\infty,\ p>1,\ 1/p+1/q=1$, $\mu=\max(1,p/q)$;
   3) $G(y,x)=G(x,y)$ для почти всех точек прямоугольника R;
   4) $\int_a^b\int_a^b G(x,y)u(x)u(y)\,dxdy\geqslant 0$ для любой функции $u(x)\in L_p$.
2. 1) $r(x)\in L_p,\ p>1,\ 1/p+1/q=1,\ r(x)\geqslant 0$ для почти всех $x\in(a,b)$;
   2) $G(y,x)=G(x,y),\ |G(x,y)|\leqslant M$ в прямоугольнике R;
   3) $\int_a^b\int_a^b G(x,y)u(x)u(y)\,dxdy\geqslant 0$ для любой функции $u(x)\in L_p$.

Цитированная литература

[1] Д. Ф. Харазов, *О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта-Шмидта*, УМН 12, в. 4 (76) (1957), стр. 201-207.

[2] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Москва 1962.

[3] W. Reid, *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space*, Duke Math. Journ. 18, N1 (1951), стр. 41-56.

[4] E. Hille, I. Tamarkin, *On the theory of linear integral equations. II*, Ann. of Math. 35, N3 (1934), стр. 445-455.

Reçu par la Rédaction le 6. 11. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVII. (1966)

Le spectre de Wiener

par

Yves MEYER (Strasbourg)

Introduction

Pour une fonction bornée, g, d'une variable réelle, deux spectres peuvent être envisagés. Le premier est le complémentaire de l'ensemble des y réels pour lesquels

$$(2T)^{-1}\int_{-T}^{+T}\exp(-iyx)g(x)\,dx$$

tend vers 0, quand T tend vers l'infini. L'autre est le plus petit fermé E tel que si f est dans $L^1(R)$ et si le support de sa transformée de Fourier est disjoint de $E, f*g$ soit nul.

La première définition ne fait appel qu'au comportement à l'infini de g. Le spectre de Wiener d'une fonction bornée g (considéré par Wiener dans un cas particulier) est plus précis que le premier et moins que le second; il ne fait appel qu'au comportement à l'infini de g (§ 1 et § 2). La corrélation de g, limite, quand T tend vers l'infini, en un sens à préciser, de

$$(2T)^{-1}\int_{-T}^{+T} g(x+t)\overline{g(t)}\,dt,$$

est la cotransformée de Fourier d'une mesure positive portée par le spectre de Wiener de g (§ 3).

Même dans les cas qui semble les plus favorables, le spectre de Wiener est d'un mauvais usage pour faire la synthèse de g (§ 4).

§ 1. Définition du spectre de Wiener

Notations. Deux espaces vectoriels X^p et Y^p, isomorphes à R^p, sont mis en dualité par une forme bilinéaire réelle, non dégénérée, notée: $x\cdot y$. La topologie de X^p est définie par une norme, notée $|x|$ et la mesure d'un ensemble A de X^p, intégrable pour la mesure de Lebesgue, dx, sera notée mes (A).