STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques

par

Yitzhak KATZNELSON (Stanford)

On se propose de démontrer, par des méthodes très simples, le théorème suivant:

THÉORÈME [1]. *Pour chaque $p \in]1, \infty[$, on a l'alternative suivante: ou toutes les séries de Fourier des $f \in L^p$ sont convergentes presque partout, ou il en existe une qui diverge partout.*

En passant, quelques résultats plus généraux seront obtenus.

T désigne, comme d'ordinaire, le cercle trigonométrique, et $L^1(T)$ l'espace de Banach constitué par les fonctions à valeurs complexes sommables sur T. Nous considérons un sous-espace vectoriel B de $L^1(T)$, qui est un espace de Banach complexe pour une certaine norme $\| \|_B$ (qui n'est pas plus faible que celle de $L^1(T)$), avec les propriétés suivantes:

(H 1) *Si $f \in B$ et $u \in T$, alors $f_u \in B$ et $\|f_u\|_B = \|f\|_B$ (ici $f_u(t) = f(t-u)$).*

(H 2) *Si $f \in B$, $\lim\limits_{u \to 0} \|f_u - f\|_B = 0$.*

(H 3) *Si $f \in B$, $e^{int} f(t) \in B$, et $\|e^{int} f(t)\|_B = \|f\|_B$.*

Exemples. $B = L^p(T)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $B = C(T)$, espace des fonctions continues sur T.

Pour $f \in L^1(T)$, on pose

$$f \sim \sum_{-m}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}, \qquad S_m(f, t) = \sum_{-m}^{m} \hat{f}(n) e^{int},$$

$$\sigma_m(f, t) = \frac{1}{m}\big(S_0(f, t) + \ldots + S_{m-1}(f, t)\big), \qquad S^*(f, t) = \sup_m |S_m(f, t)|.$$

Le théorème classique de Féjer exprime la convergence dans B de σ_m vers f, lorsque $f \in B$, sous les seules hypothèses (H 1) et (H 2).

---

[1] *Note sur épreuve.* Depuis la rédaction de cette note, L. Carleson a prouvé la convergence presque partout des séries de Fourier des fonctions de carré sommable. En particulier, les ensembles de divergence des séries de Fourier des fonctions continues sont de mesure nulle. Notre résultat constitue une réciproque: étant donné un ensemble de mesure nulle, il existe une fonction continue (à valeurs complexes) dont la série de Fourier y soit divergente.

Nous dirons qu'une partie E de T est un *ensemble de divergence* pour B s'il existe une $f \in B$ dont la série de Fourier diverge en tout point de E.

PROPOSITION 1. *Sous les seules hypothèses* (H 1) *et* (H 1), *il revient au même de dire que*

a) *E est ensemble de divergence pour B,*

b) *il existe une $f \in B$ et une suite $\{\omega_j\}$ positive tendant vers l'infini* $(j = 1, 2, \ldots)$, *telle que*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{|S_j(f,t)|}{\omega_j} = \infty \quad \textit{quand} \quad t \in E. \tag{1}$$

Preuve. Comme l'implication b) ⇒ a) est évidente, démontrons a) ⇒ b). Soit $g \in B$ une fonction dont la série de Fourier diverge sur E. On peut définir une suite telle que, pour tout n, $\|\sigma_{\lambda_n}(g) - g\|_B < 2^{-n}$. Posons

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \big(g - \sigma_{\lambda_n}(g)\big).$$

On vérifie que $\hat{f}(j) = \Omega_j \hat{g}(j)$, avec $\Omega_j \uparrow \infty$ quand $j \to \infty$. La transformation d'Abel montre que, pour toute suite $\{\omega_j\}$ telle que

$$\sum_{1}^{\infty} (\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\,\omega < \infty,$$

on a (1).

PROPOSITION 2. *Sous les hypothèses* (H 1), (H 2) *et* (H 3), *il revient au même de dire que*

a) *E est ensemble de divergence pour B,*

c) *il existe une suite de polynômes trigonométriques $p_j \in B$ tels que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|p_j\|_B < \infty, \tag{2}$$

$$\sup_j S^*(p_j, t) = \infty \quad \textit{quand} \quad t \in E. \tag{3}$$

Preuve. Pour démontrer c) ⇒ a), considérons $h(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\varkappa_j t} p_j(t)$, avec $\varkappa_j$ — degré $p_j > \varkappa_{j-1}$ + degré p_{j-1}. D'après (2) et (H 3), la série est convergente dans B, et la condition sur les $\varkappa_j$ entraîne

$$S_{\varkappa_j+n}(h,t) - S_{\varkappa_j-n}(h,t) = e^{i\varkappa_j t} S_n(p_j, t)$$

lorsque $n \leqslant$ degré p_j, donc, d'après (3), la divergence de la série de Fourier de h sur E.

Démontrons maintenant b) ⇒ c). Posons

$$p_j = 2\sigma_{2\mu_j}(f) - \sigma_{\mu_j}(f) - \sigma_{\nu_j}(f),$$

ν_j et μ_j étant choisis de sorte que

$$\|f - \sigma_\nu(f)\|_B < 2^{-j} \quad \text{pour} \quad \nu \geqslant \nu_j,$$

$$\mu_j > \mu_{j-1} > \nu_j,$$

$$\sup_t |\sigma_{\nu_j}(f,t)| < \frac{\omega_n}{2} \quad \text{pour} \quad n > \mu_{j-1}.$$

On voit que $\|p_j\|_B < 4 \cdot 2^{-j}$, ce qui entraîne (2). D'autre part

$$S_n(p_j, t) = S_n(f,t) - \sigma_{\nu_j}(f,t) \quad \text{pour} \quad \nu_j \leqslant n \leqslant \mu_j.$$

Or, si $t \in E$, il existe des n arbitrairement grands tels que $|S_n(f,t)| > \omega_n$; en choisissant j tel que $\mu_{j-1} < n \leqslant \mu_j$, on a

$$|S_n(p_j, t)| > \omega_n - \frac{\omega_n}{2},$$

ce qui démontre (3).

PROPOSITION 3. *On suppose* (H 1), (H 2) *et* (H 3). *Soient E_j* $(j = 1, 2, \ldots)$ *des ensembles de divergence pour B. Alors la réunion $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E$ est un ensemble de divergence pour B.*

Preuve. Soit $\{p_{j,n}\}$ une suite de polynômes trigonométriques correspondant à E_j (cf. proposition 2). Quitte, pour chaque j, à supprimer un nombre fini de termes, on a

$$\sum_{j,n} \|p_{j,n}\|_B < \infty,$$

$$\sup_{j,n} S^*(p_{j,n}, t) = \infty \quad \text{quand} \quad t \in E,$$

donc E est un ensemble de divergence pour B.

PROPOSITION 4. *On suppose* (H 1), (H 2), (H 3). *S'il existe un ensemble de divergence pour B de mesure positive, il en existe un de mesure 2π. En d'autres termes, ou bien toutes les séries de Fourier des $f \in B$ convergent presque partout, ou bien il en existe une qui diverge presque partout.*

Preuve. Si E est de mesure positive et qu'on choisit au hasard, indépendamment les uns des autres, des translatés E_j de E, on sait que leur réunion recouvre T presque sûrement presque partout. Or (H 2) si E est ensemble de divergence pour B, tout E_j l'est aussi. Il suffit alors d'appliquer la proposition 3.

Considérons maintenant la condition suivante sur B:

(H 4) *Tout ensemble de mesure nulle est ensemble de divergence pour B.*

Des propositions 3 et 4 résulte immédiatement:

PROPOSITION 5. *Moyennant les hypothèses* (H 1), (H 2), (H 3) *et* (H 4), *ou bien toutes les séries de Fourier des $f \in B$ convergent presque partout, ou bien il en existe une qui diverge partout.*

(On applique la proposition 3 avec $E_1 =$ ensemble de mesure 2π, $E_2 =$ complémentaire de E_1).

Reste, dans chaque cas particulier, à vérifier la condition (H 4). On se borne ici à la vérification la plus simple.

PROPOSITION 6. *Pour $1 \leqslant p < \infty$, $L^p(T)$ vérifie* (H 4).

Preuve. Soit E un ensemble de mesure nulle. On peut le recouvrir une infinité de fois par des ensembles fermés E_n qui sont des réunions finies d'intervalles, de mesures arbitrairement petites, par exemple, $|E_n| < 2^{-n}$. Soit χ_n la fonction caractéristique d'un voisinage de E_n, de mesure $\leqslant 2^{-n+1}$, $q_n = \sigma_N(\chi_n)$ une somme de Féjer de χ_n d'ordre $N = N(n)$ assez grand pour que $q_n(t) > \frac{1}{2}$ sur E_n, et $p_n(t) = nq_n(t)$. On a

$$\|p_n\|_{L^p(T)} \leqslant n(2^{-n+1})^{1/p}, \qquad p_n(t) > \frac{n}{2} \quad \text{sur} \quad E_n$$

donc (proposition 2) E est ensemble de divergence pour $L^p(T)$.

Des propositions 5 et 6 résulte le théorème. Dans le cas $p = 1$, les propositions 3 et 6 permettent de passer aisément du premier exemple de Kolmogoroff, d'une fonction sommable dont la série de Fourier diverge p. p., à l'existence d'une fonction sommable dont la série de Fourier diverge partout (deuxième exemple de Kolmogoroff)([2]).

([2]) A. Zygmund, *Trigonometric series, I*, Cambridge 1959.

Reçu par la Rédaction le 1.7. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques

par

Jean-Pierre KAHANE (Paris) et Yitzhak KATZNELSON (Stanford)

En application de l'article précédent (p. 301-304), on se propose de démontrer:

THÉORÈME. *On a l'alternative suivante: ou toutes les séries de Fourier des fonctions continues convergent presque partout, ou il en existe une qui diverge partout.*

La démonstration consiste à appliquer la proposition 5 (p. 304), après avoir vérifié que l'espace $C(T)$ des fonctions continues sur T vérifie la condition (H 4).

Pour cela, E étant un ensemble de mesure nulle, on le recouvre, une infinité de fois, par des ensembles E_n, réunions d'un nombre fini d'intervalles, de mesures $|E_n| < 2^{-2^n}$ Il suffit alors de procéder comme pour la démonstration de la proposition 6 (p. 304), en appliquant à E_n le lemme suivant:

LEMME. *Soit F une réunion finie d'intervalles sur T, de mesure $a\pi$ $(0 < a < 1)$. Il existe un polynome trigonométrique p, de norme $\leqslant 1$ dans $C(T)$, tel que*

$$S^*(p, t) \geqslant \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{a} \quad \textit{pour} \quad t \in F.$$

Preuve. Supposons F fermé; soit G un voisinage de F, de mesure $2a\pi$, et $\chi(e^{it})$ la fonction caractéristique de G. Soit $\varphi(z)$ la fonction analytique dans le disque $|z| < 1$ dont la partie réelle est le prolongement harmonique de χ à l'intérieur du disque, normalisée de façon que $\varphi(0) = a$. Posons, pour $|z| < 1$,

$$f(z) = \arg\varphi(z), \qquad g(z) = \log|\varphi(z)|$$

avec

$$-\frac{\pi}{2} < f(z) < \frac{\pi}{2}; \tag{1}$$