STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

Порядок относительно меры и его применение к исследованию произведения обобщенных функций

П. АНТОСИК (Катовице)

Исходя из определения произведения обобщенных функций данного в [4] и [5] (стр. 250), в этой работе мы исследуем существование и свойства этого произведения в последовательной теории обобщенных функций. Вводя понятие порядка k относительно меры и понятие порядка l относительно непрерывной функции для обобщенных функций в их последовательной теории, где k и l — системы q целых чисел, мы доказываем, что если $(f, g) \in \mathscr{U}^k \times \mathscr{C}^l$ и $k+l \leqslant 0$, то произведение $f \cdot g$ существует, где $\mathscr{U}^k$ и $\mathscr{C}^l$ обозначают классы обобщенных функций соответственно порядка k относительно меры и порядка l относительно непрерывной функции. Исследуем также свойства произведения в зависимости от соотношений между порядками.

Аналогично тому, как это делается в функциональной теории, мы вводим понятие порядка $\leqslant m$ обобщенной функции в последовательной теории (стр. 250) и доказываем существование произведения обобщенной функции порядка $\leqslant m$ и функции, имеющей непрерывные производные порядка $\leqslant m$. В этом случае m целое и неотрицательное число.

1. Основные понятия и теоремы. Обозначения и символы, применяемые в этой работе, взяты, в основном, из [7]. Новые и менее употребительные обозначения будем объяснять по ходу изложения.

Напомним, что последовательность бесконечно-дифференцируемых функций φ_n является *основной* в открытом подмножестве O пространства R^q, если для всякого интервала I, замыкание которого принадлежит к O, существует система $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q)$ q-целых и неотрицательных чисел $\varkappa_i$, для $i = 1, \ldots, q$, и существует равномерно сходящаяся в I последовательность непрерывных функций $\Phi_n(x)$ такая, что

$$\Phi_n^{(k)}(x) = \frac{\partial^{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_q}}{\partial \xi_1^{\varkappa_1} \ldots \partial \xi_q^{\varkappa_q}} \Phi_n(x) = \varphi_n(x).$$

Две основные последовательности $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ *эквивалентны* в O, если последовательность

$$\varphi_1(x), \psi_1(x), \varphi_2(x), \psi_2(x), \ldots$$

основная в O. Тогда пишем $\varphi_n(x) \sim \psi_n(x)$.

Обобщенной функцией $f(x) = [\varphi_n(x)]$ в O является класс всех эквивалентных последовательностей в O (смотри [7]).

Под *δ-последовательностью* подразумеваем последовательность бесконечно-дифференцируемых и неотрицательных функций $\delta_n(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) существует последовательность положительных чисел α_n, имеющая своим пределом число нуль и такая, что если $|x| \geqslant \alpha_n$, то $\delta_n(x) = 0$, где $|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_q^2}$;

(ii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\,dx = 1$.

Пусть $f(x)$ обобщенная функция определенная в O. Последовательность функций $\varphi_n(x)$ вида

$$\varphi_n(x) = f(x) * \delta_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,\delta_n(t)\,dt,$$

где $\delta_n(x)$ произвольная δ-последовательность, есть регулярная последовательность для $f(x)$ (смотри [7], [4] и [5]).

Последовательность обобщенных функций $f_n(x)$ сходится в открытом множестве O, если для всякого интервала I, замыкание которого принадлежит к O, существует система $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q)$ q-целых и неотрицательных чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q$ и существует равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций $F_n(x)$ таких, что $F_n^{(k)}(x) = f(x)$.

Пусть $f(x)$ функция определенная в q-мерном открытом интервале I. Возьмем k чисел $i_1, \ldots, i_k$ из среди чисел $1, \ldots, q$, точку $x \in I$ и k положительных приращений $h_1, \ldots, h_k$ таких, чтобы точка $x + e_{i_1}h_1 + \ldots + e_{i_k}h_k \in I$, где e_{i_r} обозначает систему q-чисел равных нулю, кроме числа стоящего на месте с индексом i_r, которое равно единице. Например, если $i_r = 2$, то $e_{i_r} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, и $e_{i_r}h_r = (0, h_r, 0, \ldots, 0)$.

При этих условиях имеют смысл равенства

$$\Delta_{i_1}^{h_1} f(x) = f(x + e_{i_1}h_1) - f(x),$$

если $k = 1$ и

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-1}i_k}^{h_1,\ldots,h_{k-1}h_k} f(x) = \Delta_{i_k}^{h_k}[\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}^{h_1,\ldots,h_{k-1}} f(x)],$$

если $1 < k \leqslant q$.

Мы говорим, что функция $f(x)$ k-размерно не убывает в I, если

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_k}^{h_1,\ldots,h_k} f(x) \geqslant 0,$$

для всякой комбинации k чисел взятых из чисел натурального ряда от 1 до q, всякой точки $x \in I$ и всяких положительных приращений $h_1, \ldots, h_k$ таких, что $x + e_{i_1}h_1 + \ldots + e_{i_k}h_k \in I$.

Теорема 1.1. *Если для всякого $x \in I$, последовательность*

(1.1) $$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

ограничена, члены этой последовательности непрерывны и k-размерно неубывающие функции в I, для $k=1,2$ и $k=q$, то существует подпоследовательность $f_{m_n}(x)$ последовательности (1.1), *и существует функция $f(x)$, для которой множество точек разрыва покрыто не более чем счетным семейством гиперплоскостей* $(q-1)$*-измерений, перпендикулярных к координатным осям и такая, что*

(1.2) $$\lim_{n\to\infty} f_{m_n}(x) = f(x)$$

во всех точках непрерывности $f(x)$.

Наметим краткое доказательство этой теоремы. В теории действительных функций и в теории вероятности обычно доказывается, что тогда из последовательности (1.1) можно извлечь подпоследовательность $f_{m_n}(x)$, для которой равенство (1.2) справедливо во всех точках непрерывности $f(x)$. Это доказывается при предположении, что для всякого $x \in I$ последовательность (1.1) ограничена, члены её суть левосторонне непрерывны и q-измеримо неубывающие функции в I. При этих предположениях функция $f(x)$ есть левосторонне непрерывная и q-измеримо неубывающая в I (смотри [3], разд. V). Оказывается, что если члены последовательности (1.1) дополнительно k-измеримо неубывающие функции для $k = 1, 2$, то $f(x)$ тоже k-измеримо неубывающая функция для $k = 1, 2$.

Но если функция k-измеримо не убывает для $k = 1, 2$, то множество точек разрыва этой функции покрыто не более чем счетным семейством гиперплоскостей $(q-1)$-измерений, перпендикулярных к координатным осям. Доказательство этого факта находится в [1]. Отсюда теорема 1.1.

2. Свойства сходящихся неотрицательных последовательностей. Пусть O означает открытое подмножество пространства R_q и

(2.1) $$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

такая последовательность функций $f_n(x)$, что для всякого интервала I, замыкание которого принадлежит к O, существует натуральное число n_0, такое что для $n \geqslant n_0$ функции $f_n(x)$ непрерывны и неотрицательны в I.

Теорема 2.1. *Если последовательность* (2.1.) *сходится в смысле обобщенных функций в открытом множестве* O, *тогда для всякого интервала* I, *замыкание которого принадлежит к* O, *последовательность чисел вида*

$$\int_I f_n(x)\,dx \tag{2.2}$$

определена и ограничена для n *больших некоторого* n_0.

Действительно, пусть $I = (a, b)$ такой интервал, что $\langle a, b\rangle \subset O$.

Возьмем интервал $I' = (a', b')$ и функцию $\varphi(x)$ такие, что $\langle a, b\rangle \subset (a', b')$, $\langle a', b'\rangle \subset O$ и $\varphi(x) \in C^\infty$, $\varphi(x) = 0$ для $x \notin I'$, $\varphi(x) = 1$ для $x \in I$. Тогда

$$\int_I f_n(x)\varphi(x)\,dx \leqslant \int_{I'} f_n(x)\varphi(x)\,dx, \tag{2.3}$$

так как $f_n(x) \geqslant 0$. Исходя из определения сходимости в смысле обобщенных функций в последовательной теории и применяя интегрирование по частям, легко показать, что последовательность чисел правой части (2.2) определена и ограничена для n больших некоторого n_0. Отсюда и из (2.3) следует теорема 2.1.

Исходя из последовательности (2.1), определим новую последовательность функций $F_n(w, v)$, $2q$-переменных, определенных формулой

$$F_n(w, v) = \int_{-\eta_1}^{\zeta_1} d\tau_1 \ldots \int_{-\eta_q}^{\zeta_q} f_n(\tau_1, \ldots, \tau_q)\,d\tau_q = \int_{-w}^{v} f_n(x)\,dx, \tag{2.4}$$

где $w = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$, $v = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$ такие точки пространства R_q, что $-w < v$ $(-\eta_i < \zeta_i$ для $i = 1, \ldots, q)$ и интервал $\langle -w, v\rangle \subset O$. Таким образом, функции $F_n(w, v)$ определены на некоторых подмножествах пространства R_{2q}. Пусть D — подмножество R_{2q}, определенное условием

$$D = [(w, v)\colon (-w < v)\cdot(\langle -w, v\rangle \subset O)],$$

где O открытое подмножество R_q, участвующие в определении последовательности (2.1). Относительно последовательности функций $F_n(w, v)$ утверждаем следующее:

(i) для всякого интервала $2q$-измерений $I_{2q} = \langle (w_1, v_1), (w_2, v_2)\rangle \subset D$ существует натуральное число n_0 такое, что для $n \geqslant n_0$ функции $F_n(w, v)$ определены, непрерывны и k-измеримо неубывают в I_{2q} для $k = 1, \ldots, q$;

(ii) если последовательность (2.1) сходится в O в обобщенном смысле, то последовательность функций вида (2.4) ограничена в I_{2q};

(iii) если последовательность (2.1) сходится в O, то последовательность (2.4) сходится в D (сходимость в смысле обобщенных функций).

Действительно, из условия $I_{2q} \subset D$ следует, что $-w_2 < v_2$ и $\langle -w_2, v_2\rangle \subset O$. Пусть $(w, v) \in I_{2q}$. Тогда $-w < v$, $w < w_2$ и $v < v_2$, поэтому $-w_2 < -w$, $-w < v < v_2$. Отсюда $\langle -w, v\rangle \subset \langle -w_2, v_2\rangle \subset O$. На основании определения (2.1) существует число n_0 такое, что для $n \geqslant n_0$ функции $f_n(x)$ непрерывны и неотрицательны в $I = \langle -w_2, v\rangle$, тем более в $\langle -w, v\rangle$, поэтому функции $F_n(w, v)$ определены в I_{2q} для $n \geqslant n_0$. Непрерывность $F_n(w, v)$ в I_{2q} очевидна, k-измеримое неубывание функции $F_n(w, v)$ в I_{2q}, для $n \geqslant n_0$, непосредственно следует из формулы (2.5) и того, что $f_n(x) \geqslant 0$ в $\langle -w_2, v_2\rangle$ для $n \geqslant n_0$. Свойство (ii) следует из хода доказательства (i) и теоремы 2.1.

Очевидное доказательство (iii) пропускаем.

Сформулируем и докажем теперь теорему, играющую основную роль в дальнейшем.

Теорема 2.2. *Если последовательность* (2.1) *сходится в обобщенном смысле в* O, *то последовательность функций* (2.4) *сходится по точкам в* D, *исключая, в крайнем случае, некоторое подмножество множества* D, *которое покрыто не более чем счетным семейством гиперплоскостей* $(2q-1)$*-измерений, перпендикулярных к координатным осям.*

Действительно, в виду (i) и (ii) в каждом интервале $I_{2q} \subset D$ применима к последовательности функций (2.4) теорема 1.1. Поэтому, для всякого интервала $I_{2q} \subset D$ существует подпоследовательность $F_{m_n}(w, v)$ последовательности (2.4) и существует функция $F(w, v)$, для которой множество точек разрыва покрыто не более чем счетным семейством гиперплоскостей $(2q-1)$ измерений перпендикулярных к координатным осям и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} F_{m_n}(w, v) = F(w, v)$$

во всех точках непрерывности $F(w, v)$.

Для завершения доказательства теоремы (2.2) достаточно показать, что во всех точках непрерывности $F(w, v)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} F_n(w, v) = F(w, v). \tag{2.5}$$

Предположим, что это не так. Тогда, для некоторой точки $z_0 = (w_0, v_0)$ непрерывности функций $F(z)$, где $z = (w, v)$, существует последовательность $F_{p_n}(z)$ и число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|F_{p_n}(z_0) - F(z_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Не уменьшая общности рассуждений, принимаем, что

$$F_{p_n}(z_0) - F(z_0) \geqslant \varepsilon. \tag{2.6}$$

Из неубывания функции $F_{p_n}(z)$, непрерывности $F(z)$ в точке z_0 и (2.6) следует, что

$$F_{p_n}(z) - F(z) \geqslant \varepsilon/2, \tag{2.7}$$

для всех z из некоторого интервала $\langle z_0, z_0 + \delta 1\rangle$, где δ — число больше нуля и 1 — система $2q$-чисел равных единице. На основании теоремы 1.1 из последовательности $F_{p_n}(z)$ можем извлечь такую подпоследовательность $F_{m_{p_n}}(z)$, что

$$\lim_{n\to\infty} F_{m_{p_n}}(z) = F_1(z),$$

во всех точках непрерывности функции $F_1(z)$, для которой множество точек разрыва покрыто не более чем счетным семейством гиперплоскостей $(2q-1)$ измерений. Отсюда и из (2.7) следует, что

$$F_1(z) - F(z) \geqslant \varepsilon/2, \tag{2.8}$$

когда $z \in \langle z_0, z_0 + \delta 1\rangle$. Следовательно, последовательность функций (2.4) не может сходится в обобщенном смысле в D, что противоречит утверждению (iii). Из полученного противоречия следует, что имеет место равенство (2.5), что и требовалось доказать.

В дальнейшем будет играть важную роль следующее, легко получаемое следствие из теоремы 2.2:

Следствие 2.1. *Если последовательность* (2.1) *сходится в обобщенном смысле в O, тогда существует не более чем счетное семейство $\mathcal{M}$ гиперплоскостей H $(q-1)$ измерений, перпендикулярных к координатным осям, такое что если $x_0 \in O - \bigcup_{H\in\mathcal{M}} H$, то последовательность функций*

$$\Phi_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$$

сходится во всех точках x таких, что $x \in O - \bigcup_{H\in\mathcal{M}} H$, $x_0 < x$ и интервал $\langle x_0, x\rangle \subset O$.

3. Последовательности k-мерные и k-основные. Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \tag{3.1}$$

основная последовательность в открытом множестве $O \subset R_q$.

Будем говорить, что (3.1) *нуль-мерная последовательность* в O, если в каждом интервале I, замыкание которого принадлежит O, можно ее представить в виде разницы сходящихся в обобщенном смысле последовательностей непрерывных и неотрицательных в I функций $f_{1,n}(x)$ и $f_{2,n}(x)$.

Если $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q)$ представляет собой систему q-целых чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q$ тогда, на основании определения, $k^+ = (\max(\varkappa_1, 0), \ldots, \max(\varkappa_{q,0}, 0))$ и $k^- = (-k)^+$.

Последовательность (3.1) будем называть *k-мерной* в O, если для всякого открытого интервала I, замыкание которого принадлежит O, существует последовательность функций $\Phi_n(x)$ такая, что

1* $\Phi_n^{(k^+)}(x) = \varphi_n(x)$ в I,

2* для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant -k^-$, $\Phi_n^{(j)}(x)$ — нульмерная последовательность в I.

Последовательность (3.1) будем называть *k-основной*, если для всякого открытого интервала I, замыкание которого принадлежит O, существует такая последовательность функций $\Phi_n(x)$, что

1** $\Phi_n^{(k^+)}(x) = \varphi_n(x)$ в I,

2** для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant -k^-$, последовательность непрерывных функций $\Phi_n^{(j)}(x)$ сходится почти равномерно в I.

Очевидно, что всякая k-основная последовательность в O является одновременно и k-мерной последовательностью в O; очевидно также, что обратное утверждение неверно.

Лемма 3.1. *Всякая линейная комбинация нуль-мерных (k-мерных, k-основных) последовательностей есть нульмерная (k-мерная, k-основная) последовательность.*

Лемма 3.2. *Если последовательность* (3.1) *есть нуль-мерная, k-мерная или к-основная в O, то последовательность*

$$\varphi_1^{(e_i)}(x), \varphi_2^{(e_i)}(x), \ldots \tag{3.2}$$

соответственно e_i-мерная, $(k+e_i)$-мерная, $(k+e_i)$-основная последовательность в O.

Леммы 3.1 и 3.2 непосредственно следуют из соответственных определений.

Лемма 3.3. *Если $\varphi_n(x)$ — k-мерная последовательность в O и $m \geqslant k$, то $\varphi_n(x)$ — m-мерная последовательность в O.*

Лемма 3.3 следует из соответствующих определений и следствия 2.1.

Теорема 3.1. *Если $\varphi_n(x)$ — k-мерная последовательность в O, $\psi_n(x)$ — l-мерная в O, то сумма $\varphi_n(x) - \psi_n(x)$ — m-мерная в O, где $m = \max(k, l) = (\max(\varkappa_1, \lambda_1), \ldots, \max(\varkappa_q, \lambda_q))$, если $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q)$ и $l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$.*

Эта теорема следует из леммы 3.3.

Теорема 3.2. *Если $\varphi_n(x)$ — k-мерная последовательность в O, $\psi_n(x)$ — l-основная последовательность в O и $k+l\leqslant 0$, то произведение $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ — m-мерная последовательность в O, где $m=\max(k,l)$.*

Действительно, пусть $I=(a,b)$ — произвольный открытый интервал такой, что $\langle a,b\rangle\subset O$.

Мы должны показать, что для этого интервала существует последовательность функций $H_n(x)$ таких, что $H_n^{(m^+)}=\varphi_n(x)\psi_n(x)$ в I и $H_n^{(j)}(x)$ — нуль-мерная последовательность в I, для $e\leqslant j\leqslant -m^-$.

При доказательстве этого положения используем принцип математической индукции. Пусть $k\leqslant 0$ и $l\leqslant 0$. Отметим, что тогда $m=m^+=(0,\ldots,0)$. В этом случае, в качестве функций $H_n(x)$ берем произведение $\varphi_n(x)\psi_n(x)$. Тогда $\big(\varphi_n(x)\psi_n(x)\big)^{(m^+)}=\varphi_n(x)\psi_n(x)$. Пусть j и s — произвольным образом фиксированные системы q-неотрицательных и целых чисел такие, что $0\leqslant j\leqslant -m^-$ и $0\leqslant s\leqslant j$. Отметим, что тогда $0\leqslant j-s\leqslant -m^-\leqslant -k^-$ и $0\leqslant s\leqslant -l^-$. Рассмотрим последовательность функций вида

$$\varphi_n^{(j-s)}(x)\,\psi_n^{(s)}(x). \tag{3.3}$$

Докажем, что функции (3.3) составляют нуль-мерную последовательность в O.

Действительно, пусть $I=(a,b)$ — открытый интервал такой, что $\langle a,b\rangle\subset O$. Возьмем интервал $I'=(a',b')$, удовлетворяющий условиям $\langle a,b\rangle\subset(a',b')\subset\langle a',b'\rangle\subset O$. При этих условиях, согласно 2* и 2**, можем написать равенства

$$\varphi_n^{(j-s)}(x)=f_n(x)-g_n(x)\quad\text{ и }\quad\psi_n^{(s)}(x)=u_n(x)-v_n(x), \tag{3.4}$$

где $f_n(x)$, $g_n(x)$, $u_n(x)$ и $v_n(x)$ неотрицательные в I' последовательности и, кроме того, последовательности $f_n(x)$ и $g_n(x)$ сходятся в смысле обобщенных функций в I', а последовательности $u_n(x)$ и $v_n(x)$ сходятся почти равномерно в I'. Из (3.4) получаем

$$\varphi_n^{(j-s)}(x)\,\psi_n^{(s)}(x)=f_n(x)u_n(x)+g_n(x)v_n(x)-\big(f_n(x)v_n(x)+g_n(x)u_n(x)\big). \tag{3.5}$$

Отсюда и из следствия 2.1 следует существование счетного множества гиперплоскостей $H_n(q-1)$ измерений таких, что если $x_0,x\subset D$, где

$$D=I'-\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n,$$

то последовательность

$$\int_{x_0}^{x}f_n(t)\,dt$$

сходится. Зафиксируем точку x_0 таким образом, чтобы $x_0\in D$ и $a'<x_0<a$ и рассмотрим последовательность функций

$$F_n(x)=\int_{x_0}^{x}f_n(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Понятно, что последовательность функций (3.6) сходится на множестве

$$D_1=\langle x_0,b\rangle-\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n,$$

и на основании теоремы 2.1 эта последовательность ограничена в $\langle x_0,b\rangle$ некоторым постоянным положительным числом M. Докажем, что в каждой точке множества D_1 последовательность функций

$$\int_{x_0}^{x}f_n(t)\,u_n(t)\,dt \tag{3.7}$$

удовлетворяет необходимому и достаточному условию сходимости.

Действительно,

$$\Big|\int_{x_0}^{x}[f_n(t)u_n(t)-f_m(t)u_m(t)]\,dt\Big|\leqslant \tag{3.8}$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}|u_n(t)-u(t)|f_n(t)\,dt+\int_{x_0}^{x}|u_m(t)-u(t)|f_m(t)\,dt+$$

$$+\Big|\int_{x_0}^{x}u(t)[f_n(t)-f_m(t)]\,dt\Big|,$$

где $u(t)$ — предельная функция почти равномерно сходящейся в I' последовательности $u_n(x)$. Легко понять, что сумма двух первых слагаемых не превосходит числа $\frac{1}{2}\varepsilon$, для всех $x\in\langle x_0,b\rangle$, $\varepsilon>0$ и $n,m>N$, где N некоторое постоянное, натуральное число. Пусть x — фиксированная точка множества D_1. Возьмем число $\delta>0$ такое, что если $t_1,t_2\in\langle x_0,x\rangle$ и $|t_1-t_2|<\delta$, то

$$|u(t_2)-u(t_1)|<\frac{\varepsilon}{2M}, \tag{3.9}$$

и разобьем интервал $\langle x_0,x\rangle$ на конечное число r_0 интервалов $\langle a_r,b_r\rangle$ таких, что $|b_r-a_r|<\delta$ и $a_r,b_r\in D_1$ для $r=1,\ldots,r_0$. Отметим, что тогда последовательности чисел

$$\int_{a_r}^{b_r}f_n(t)\,dt \tag{3.10}$$

сходятся для $r = 1, \ldots, r_0$.

Рассмотрим очевидное неравенство

$$(3.11)\qquad \Big|\int_{x_0}^{x} u(t)[f_n(t)-f_m(t)]\,dt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{r=1}^{r_0} \int_{a_r}^{b_r} |u(t)-u(t_r)|\,|f_n(t)-f_m(t)|\,dt + \sum_{r=1}^{r_0} |u(t_r)|\,\Big|\int_{a_r}^{b_r} [f_n(t)-f_m(t)]\,dt\Big|,$$

где t_r — некоторая фиксированная точка интервала $\langle a_r, b_r\rangle$. Из неравенств (3.11), (3.9) и сходимости последовательностей чисел (3.10) следует, что для достаточно больших n и m третье слагаемое правой части неравенства (3.8) тоже меньше $\varepsilon/2$. Таким образом мы показали, что последовательность функций (3.6) удовлетворяет условию Больцано-Коши во всех точках множества D_1, поэтому она сходится в D_1 или иначе, сходится почти всюду в $\langle x_0, b\rangle$. Мы показали также, что она является ограниченной последовательностью в $\langle x_0, b\rangle$ числом M.

Отсюда заключаем, что последовательность (3.7) сходится в I в смысле обобщенных функций. Подобным образом доказывается, что сходятся в I, в том же смысле, последовательности $g_n(x)v_n(x)$, $f_n(x)v_n(x)$ и $g_n(x)u_n(x)$.

В виду того, в силу равенства (3.6), произвольности интервала и определения, $\varphi_n^{(j-s)}(x)\psi_n^{(s)}(x)$ — нуль-мерная последовательность в O.

Докажем теперь, что для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant -m^-$, $\big(\varphi_n(x)\psi_n(x)\big)^{(j)}$ — нуль-мерная последовательность в O. Действительно,

$$(3.12)\qquad (\varphi_n\psi_n)^{(j)} = \sum \binom{j}{s} \varphi_n^{(j-s)}\psi_n^{(s)}.$$

В силу доказанного, последовательности, составленные из соответствующих слагаемых правой части равенства (3.12), являются нуль-мерными в O. Поэтому, на основании леммы 3.1, $(\varphi_n\psi_n)^{(j)}$ — нуль-мерная последовательность в O.

Таким образом мы доказали, что в случае $k \leqslant 0$ и $l \leqslant 0$ теорема 3.2 верна.

Пусть k_0 и l_0 — фиксированные системы неотрицательных и целых q-чисел. Предполагаем, что теорема 3.2 верна для всех k и l таких, что $k^+ = k_0$, $l^+ = l_0$ и $k+l \leqslant 0$. Докажем, что из принятого предположения следует верность теоремы 3.2, если вместо k возьмем $k+e_i$, или в место l возьмем $l+e_i$, при условии, что $k+l+e_i \leqslant 0$.

Проверим это в случае замены k на $k+e_i$. Может оказаться, что $\varkappa_i < 0$, тогда $(k+e_i)^+ = k^+ = k_0$ и теорема остается верной в силу принятого предположения. Пусть $\varkappa_i \geqslant 0$ и $\varphi_n(x)$ $(k+e_i)$-мерная последовательность, а $\psi_n(x)$ l-основная в O, и пусть I — интервал, замыкание которого принадлежит O. Возьмем последовательность функций $\Phi_n(x)$ таких, что $\Phi_n^{(k+e_i)^+}(x) = \varphi_n(x)$ и для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant (k+e_i)^-$, $\Phi_n^{(j)}(x)$ является нуль-мерной последовательностью в I.

Тогда легко проверить, что последовательность функций

$$X_n(x) = \Phi_n^{(k^+)}(x)$$

k-мерная в I, и имеет место равенство

$$(3.13)\qquad \varphi_n(x)\psi_n(x) = \big(X_n(x)\psi_n(x)\big)^{(e_i)} - X_n(x)\psi_n^{(e_i)}(x) \quad \text{в} \quad I.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$\max(k, l) = \max(k, l+e_i) = m, \qquad (l+e_i)^+ = l^+ \quad \text{и} \quad k+l+e_i \leqslant 0.$$

Поэтому, на основании принятого предположения, последовательность $X_n(x)\psi_n(x)$ m-мерная в I и, следуя лемме 3.2, $\big(X_n(x)\psi_n(x)\big)^{(e_i)}$ $(m+e_i)$-мерная последовательность в O, а $X_n(x)\psi_n^{(e_i)}(x)$ m-мерная в O. Поэтому, на основании теоремы 3.1 и равенства (3.13) последовательность функций $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ $(m+e_i)$-мерная в I, отсюда следует, что $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ $(m+e_i)$-мерная последовательность в O, что и требовалось доказать.

Подобным образом доказывается случай, когда вместо l взято $l+e_i$.

4. Порядок обобщенной функции относительно меры и относительно непрерывной функции. Обобщенную функцию $f(x)$ будем называть *неотрицательной* в открытом интервале I, если существует для нее основная последовательность функций $\varphi_n(x) \geqslant 0$.

Если обобщенная функция $f(x)$ может быть представлена в виде разности двух неотрицательных обобщенных функций, то будем говорить, что $f(x)$ *мера* в I.

Пусть $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q)$ — система q-целых чисел. Мы говорим, что обобщенная функция $f(x)$ имеет *порядок k относительно меры в открытом множестве O*, если для всякого интервала I, замыкание которого принадлежит O, существует мера $F(x)$ такая, что $F^{(k^+)}(x) = f(x)$ в I, и для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant (-k)^+$, $F^{(j)}(x)$ мера в I.

Множество всех обобщенных функций порядка k в O обозначаем символом $\mathscr{U}^k$.

Обобщенная функция $f(x)$ имеет порядок l относительно непрерывной функции в открытом множестве O, если для всякого интервала I, замыкание которого принадлежит к O, существует непрерывная функция $F(x)$ такая, что $F^{(l^+)}(x) = f(x)$ в I, и для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant (-l)^+$, $F^{(j)}(x)$ непрерывная функция в I.

Множество всех обобщенных функций порядка l относительно непрерывной функции обозначаем символом $\mathscr{C}^l$.

Следует отметить, что определение порядка k относительнк меры и порядка l относительно иепрерывной функции — неоднозначны. Например, обобщенная функция $\delta'(x+y)$, согласно с этими определениями, имеет порядки $(1,0)$, $(3,-2)$, $(-1,2)$, $(-2,3)$, ... относительно меры и порядки $(3,0)$, $(7,-4)$, $(-5,8)$, ... относительно непрерывной функции.

Однако, если обобщенная функция $f(x)$ имеет порядок k и $k\leqslant k_1$, то $f(x)$ имеет порядок k_1.

Лемма 4.1. *Всякая регулярная пcоледовательность для $f(x)\in\mathscr{U}^k$ ($f(x)\in\mathscr{C}^l$) есть k-мерная (l-основная) в O.*

Лемма 4.2. *Если $\varphi_n(x)$ k-мерная (l-основная) в O, то обобщенная функция $f(x)=[\varphi(x)]$ имеет порядок k в O относительно меры (порядок l относительно непрерывной функции).*

Очевидные доказательства лемм 4.1 и 4.2 пропускаем.

Обобщенная функция $f(x)$ имеет порядок $\leqslant m$ в открытом множестве O, где m неотрицательное и целое число, если для всякого интервала I, замыкание которого принадлежит O, существует система $f_k(x)$ мер в I такая, что

$$f(x)=\sum_{|k|\leqslant m} f_k^{(k)}(x),$$

где $k\geqslant 0$ и $|k|=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_q$.

Это определение порядка $\leqslant m$ соответствует определению порядка $\leqslant m$ в функциональной теории обобщенных функций, например в [8].

5. Произведение обобщенных функций и условия его существования. *Произведением обобщенных функций* $f(x)$ и $g(x)$, определенных в открытом множестве O, называем обобщенную функцию $[\varphi_n(x)\psi_n(x)]$, где $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ суть регулярные последовательности соответственно для $f(x)$ и $g(x)$, при условии, что $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ основная последовательность в O.

Для корректности этого определения достаточно показать, что если существует произведение $f(x)g(x)$, то оно не зависит от того, какие мы берем регулярные последовательности $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ соответственно для $f(x)$ и $g(x)$.

Выполнение этого условия следует из того, что если $\varphi_n(x)$ и $\tilde{\varphi}_n(x)$, $\psi_n(x)$ и $\tilde{\psi}_n(x)$ регулярные последовательности соответственно для $f(x)$ и $g(x)$, то такими же являются последовательности

$$\varphi_1(x),\tilde{\varphi}_1(x),\varphi_2(x),\ldots,$$
$$\psi_1(x),\tilde{\psi}_1(x),\psi_2(x),\ldots$$

Поэтому, если существует произведение $f(x)g(x)$, то согласно с его определением последовательность

$$\varphi_1(x),\tilde{\varphi}_1(x),\psi_1(x),\tilde{\psi}_1(x),\varphi_2(x),\ldots$$

основная, отсюда $[\varphi_n(x)\psi_n(x)]=[\tilde{\varphi}_n(x)\tilde{\psi}_n(x)]$.

Теорема 5.1. *Если одна из обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных в открытом множестве O, принадлежит к классу $\mathscr{U}^k$, а вторая к классу $\mathscr{C}^l$ и $k+l\leqslant 0$, то существует произведение $f(x)g(x)$ и $f(x)g(x)\in\mathscr{U}^m$, где $m=\max(k,l)$.*

Действительно, пусть $f(x)\in\mathscr{U}^k$ а $g(x)\in\mathscr{C}^l$. Тогда на основании леммы 4.1 всякая регулярная последовательность $\varphi_n(x)$ для $f(x)$ есть k-мерная в O и всякая регулярная последовательность $\psi_n(x)$ для $g(x)$ есть l-основная в O.

Отсюда, из условия $k+l\leqslant 0$ и теоремы 3.2 следует, что $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ m-мерная последовательность в O, где $m=\max(k,l)$. Поэтому $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ основная последовательность в O и, на основании леммы 4.2, $[\varphi_n(x)\psi_n(x)]\in\mathscr{U}^k$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.2. *Если обобщенная функция $f(x)$ имеет порядок $\leqslant m$ в O и производные порядка $\leqslant m$ функции $g(x)$ непрерывны, где m — целое и неотрицательное число, тогда существует произведение $f(x)g(x)$.*

Из определения порядка $\leqslant m$ следует, что в каждом интервале I, замыкание которого принадлежит к O, регулярная последовательность $\varphi_n(x)$ для $f(x)$ может быть представлена в виде суммы

$$\varphi_n(x)=\sum_{|k|\leqslant m}\varphi_{k,n}(x),$$

где $\varphi_{k,n}(x)$ k-мерная последовательность в I.

На основании леммы 4.1 и теоремы 3.2 последовательность $\varphi_{k,n}(x)\psi_n(x)$ основная в O, если $\psi_n(x)$ регулярная для $g(x)\in\mathscr{C}^m$. Отсюда и из последнего равенства получаем, что $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ основная в O, что и требовалось доказать.

Теорема 5.2 дает возможность перемножать в последовательной теории все те обобщенные функции через непрерывные функции, для которых может быть естественным образом определено произведение в функциональной теории обобщенных функций.

6. Свойства произведения. Непосредственно из определения произведения и действий на обобщенных функциях следуют формулы:

закон переместительности

$$f(x)g(x)=g(x)f(x); \tag{6.1}$$

закон разделительности

$$f(x)\big(g(x)+h(x)\big)=f(x)g(x)+f(x)h(x); \tag{6.2}$$

формула для производной из произведения

(6.3) $$\big(f(x)g(x)\big)^{(e_i)} = f^{(e_i)}(x)g(x) + f(x)g^{(e_i)}(x).$$

Все эти равенства следует понимать в том смысле, что если обе стороны какого то из этих равенств определены, то они равны между собой. Понятно, что если в равенстве (6.1) определена хотя бы одна из сторон, то определена уже и вторая, чего нельзя сказать в общем случае относительно равенств (6.2) и (6.3).

Интересно отметить, что при предположении определенности выражений $\big(g(x)f(x)\big)h(x)$ и $g(x)\big(f(x)h(x)\big)$ нельзя утверждать, в общем случае, что имеет место равенство

(6.4) $$\big(g(x)f(x)\big)h(x) = g(x)\big(f(x)h(x)\big).$$

Это показывает хорошо известный пример, а именно,

$$\left(\frac{1}{x}x\right)\delta(x) = \delta(x), \quad \text{но} \quad \frac{1}{x}\big(x\,\delta(x)\big) = 0,$$

где x действительная переменная и $1/x = (\ln|x|)'$.

Прежде чем сформулируем условие, при котором имеет место равенство (6.4), докажем следующую лемму, имеющую исключительное значение для этого вопроса:

Лемма 6.1. *Если $f_n(x)$ — k-мерная последовательность в O, $f(x) = [f_n(x)]$ и $\varphi_n(x)$ — регулярная последовательность для $f(x)$, тогда*

(6.5) $$\varphi_1(x), f_1(x), \varphi_2(x), f_2(x), \ldots$$

является k-мерной последовательностью в O.

Действительно, пусть I будет интервалом, замыкание которого принадлежит к O и $F_n(x)$ такой последовательностью, что $F_n^{(k^+)}(x) = f_n(x)$ в I', и для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant -k^-$, $F_n^{(j)}(x)$ есть нуль-мерная последовательность в I', где I' открытый интервал, замыкание которого содержится в O и которому принадлежит замыкание I. Точнее: для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant -k^-$, существуют неотрицательные в I' последовательности $f_{j,n}(x)$ и $g_{j,n}(x)$, имеющие своими пределами, в обобщенном смысле, неотрицательные в I' обобщенные функции $f_j(x)$ и $g_j(x)$, кроме того, $F_n^{(j)}(x) = f_{j,n}(x) - g_{j,n}(x)$ и $F^{(j)}(x) = f_j(x) - g_j(x)$, где $F(x) = [F_n(x)]$.

Отсюда и из свойств регулярной последовательности $\varphi_n(x)$ следует, что для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant k^-$, при достаточно больших n, имеют место равенства

(6.6) $$\big(F(x)*\delta_n(x)\big)^{(j)} = F^{(j)}(x)*\delta_n(x) = f_j(x)*\delta_n(x) - g_j(x)*\delta_n(x)$$

в I и

(6.7) $$\varphi_n(x) = \big(F(x)*\delta_n(x)\big)^{(k^+)}.$$

Возьмем последовательность

(6.8) $$F(x)*\delta_1(x), F_1(x), F(x)*\delta_2(x), F_2(x), \ldots$$

В силу равенства (6.7) и определения последовательности $F_n(x)$, производная порядка k^+ из (6.8) есть (6.5), кроме того, для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant k$, производная порядка j из (6.8) в силу (6.6) и равенства $F_n^{(j)}(x) = f_{j,n}(x) - g_{j,n}(x)$ есть последовательность вида

(6.9) $$f_j(x)*\delta_1(x) - g_j(x)*\delta_1(x),\ f_{j,1}(x) - g_{j,1}(x), \ldots,$$

точнее, является разностью двух неотрицательных в I последовательностей: последовательности

(6.10) $$f_j(x)*\delta_1(x),\ f_{j,1}(x),\ f_j(x)*\delta_2(x),\ f_{j,2}(x), \ldots$$

и последовательности

(6.11) $$g_j(x)*\delta_1(x),\ g_{j,1}(x),\ g_j(x)*\delta_2(x),\ g_{j,2}(x), \ldots,$$

которые сходятся в обобщенном смысле в I. Отсюда следует лемма 6.1.

Сформулируем и докажем теперь достаточное условие, при котором имеет место закон ассоциативности для умножнеия.

Если одна из трех обобщенных функций $g(x), f(x)$ и $h(x)$ определенных в открытом множестве O, имеет порядок k в O относительно меры, а две остальные имеют соответственно порядки l, m в O относительно непрерывной функции и $k+l \leqslant 0$, $k+m \leqslant 0$, $l+m \leqslant 0$, тогда имеет место равенство (6.4).

Действительно, пусть $f(x) \in \mathscr{U}^k$, $g(x) \in \mathscr{C}^l$ и $h(x) \in \mathscr{C}^m$. В силу неравенств $k+l \leqslant 0$ и $k+m \leqslant 0$, и теоремы 5.1, $g(x)f(x) \in \mathscr{U}^r$ и $f(x)h(x) \in \mathscr{U}^p$, где $r = \max(k, l)$ и $p = \max(k, m)$. Заметим, что из неравенств $k+m \leqslant 0$ и $l+m \leqslant 0$ следуют неравенства $r+m \leqslant 0$ и $l+p \leqslant 0$, поэтому осуществимы умножения $\big(g(x)f(x)\big)h(x)$ и $g(x)\big(f(x)h(x)\big)$. Пусть $\psi_n(x), \varphi_n(x), \chi_n(x)$ — регулярные последовательности соответственно для $g(x), f(x)$ и $h(x)$. Возьмем регулярные последовательности $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$, соответственно для произведений $g(x)f(x)$ и $f(x)h(x)$.

Согласно с определением умножения имеем:

$$g(x)f(x) = [\psi_n(x)\varphi_n(x)], \quad f(x)h(x) = [\varphi_n(x)\chi_n(x)],$$
$$\big(g(x)f(x)\big)h(x) = [\alpha_n(x)\chi_n(x)], \quad g(x)\big(f(x)h(x)\big) = [\psi_n(x)\beta_n(x)].$$

На основании леммы 6.1 последовательность

(6.12) $$\alpha_1(x),\ \psi_1(x)\varphi_2(x),\ \alpha_2(x),\ \psi_2(x)\varphi_2(x), \ldots$$

есть r-мерной в O. Отсюда и из теоремы 3.2 следует, что

$$a_1(\chi)\chi_1(x),\ \psi_1(x)\varphi_1(x)\chi_1(x),\ a_2(x)\chi_2(x),\ \ldots$$

есть основной последовательностью в O и поэтому

$$a_n(x)\chi_n(x) \sim \psi_n(x)\varphi_n(x)\chi_n(x).$$

Подобным образом доказывается, что $\psi_n(x)\beta_n(x) \sim \psi_n(x)\varphi_n(x)\chi_n(x)$. На основании транзитивности $a_n(x)\chi_n(x) \sim \psi_n(x)\beta_n(x)$; это дает равенство (6.4), что и требовалось доказать.

Литература

[1] П. Антосик, *Исследование непрерывности функций многих переменных*, Prace Matematyczne 1965.

[2] H. König, *Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen*, Archiv der Mathematik, 1955.

[3] S. Mazurkiewicz, *Podstawy rachunku prawdopodobieństwa*, Warszawa 1956.

[4] J. Mikusiński, *Irregular operations on distributions*, Studia Mathematica 20 (1961), p. 163-169.

[5] — *Criteria of the existence and of the associativity of the product of distributions*, ibidem 21 (1962), p. 253-259.

[6] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions I*, Rozprawy Matematyczne 12 (1957).

[7] — *The elementary theory of distributions II*, Rozprawy Matematyczne 25 (1961).

[8] L. Schwartz, *Théorie des distributions I*, Paris 1950.

[9] — *Théorie des distributions II*, Paris 1951.

[10] — *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*, C. R. 1954.

[11] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste I*, Warszawa 1958.

[12] — *Funkcje rzeczywiste II*, Warszawa 1959.

[13] — *Integrals of distributions*, Studia Mathematica 20 (1961), p. 119-139.

Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

On semi-groups of contractions in Hilbert spaces

by

W. MLAK (Kraków)

Suppose we are given a complex Hilbert space H. Let $f, g, h, \ldots$ stand for vectors of H and $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ for complex scalars. (f, g) is the inner product of f and g, $|f|$ is the norm of f. By $|V|$ we understand the norm of the linear bounded operator in H. V^* stands for the adjoint of V and I for the identity operator in H. By $V|Z$ we mean the restriction of the operator V to the subset $Z \subset H$. A contraction is a linear bounded operator V in H such that $|V| \leqslant 1$.

Let G be an abelian group. The inner group operations in G are written additively. Suppose that the semi-group G_+ orders G, that is

(i) $$G_+ \cup (-G_+) = G,$$

(ii) $$G_+ \cap (-G_+) = \{0\}.$$

We write $\xi \leqslant \eta$ if $\eta - \xi \in G_+$ and $\xi < \eta$ if $\xi \leqslant \eta$ but $\xi \neq \eta$.

A contraction valued function $T(\xi)$ determined for $\xi \in G_+$ is called a *semi-group of contractions* (s.g.c. for brevity) if

(iii) $$T(0) = I, \quad T(\xi+\eta) = T(\xi)T(\eta) \quad \text{for} \quad \xi, \eta \in G_+.$$

Let $U_\xi: K \to K$ be a unitary representation of G into the Hilbert space K and assume that $H \subset K$. Write P for the orthogonal projection of K onto H. We say that U_ξ is a *unitary dilation* [7] of the s.g.c. $T(\xi)$ if

(iv) $$T(\xi)f = PU_\xi f \quad \text{for} \quad f \in H \text{ and } \xi \in G_+.$$

The minimality condition $K = \bigvee_{\xi \in G} U_\xi H$ (1) determines U_ξ and K uniquely up to a unitary isomorphism. U_ξ is called then the *minimal unitary dilation* of s.g.c. $T(\xi)$.

A few examples are now in order.

Example 1. Let T be a contraction and $G = N$ — the additive group of integers. Then $T(n) = T^n$ ($T^0 = I$ by convention) for $n \geqslant 0$ is an s.g.c. G_+ is the set of non-negative integers.

(1) $\bigvee S_\alpha$ stands for the closed linear span of the union of S_α.