By theorem 1, $\|\delta(x,t;f)\|_p \leqslant C\|f\|_p$.

If $g(x,t)$ is any function infinitely differentiable and with compact support in $E^n\times(0,\infty)$, then $\delta(x,t;g)=0$.

Therefore $\delta(x,t;f)=\delta(x,t;f-g)$. Selecting $g(x,t)$ so that $\|f-g\|_p$ is as small as we wish, it follows that $\|\delta(x,t;f)\|_p=0$, and theorem 2 follows.

References

[1] B. F. Jones, Jr., *A class of singular integrals*, Amer. J. Math. 86, no. 2 (1964), p. 441-462.

[2] E. B. Fabes, *Parabolic singular integrals with functions in L^1*, Abstract 65T-55, Notices of the Amer. Math. Soc., 12 (1965), p. 142.

[3] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 2nd ed., Cambridge 1959.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Reçu par la Rédaction le 1. 7. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

(F)-Räume mit absoluter Basis

von

A. PIETSCH (Berlin)

Eine Folge von Elementen $e_1, e_2, \ldots$ aus einem lokalkonvexen Raum E wird als *Basis* bezeichnet wenn sich jedes Element $x\in E$ mit einer eindeutig bestimmten Folge von Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ in der Form

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n$$

darstellen läßt, so daß die durch den Ansatz

$$\langle x, f_n\rangle = \xi_n$$

definierten Linearformen f_n stetig sind [1].

Eine Basis $\{e_n\}$ heißt *absolut*, wenn für jede stetige Halbnorm p und alle $x\in E$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, f_n\rangle| p(e_n) < +\infty$$

besteht. Die Existenz einer absoluten Basis hat für (F)-Räume weitreichende Konsequenzen, weil man den linearen Raum der zu den Elementen gehörigen Koeffizientenfolgen sehr einfach beschreiben und topologisieren kann. Man darf sich deshalb auf die Betrachtung von gewissen Folgenräumen beschränken. Insbesondere zeigt sich, daß alle Banachräume mit absoluter Basis zu dem Folgenraum l^1 isomorph sind.

Es erhebt sich folglich die Frage, ob es überhaupt (F)-Räume mit absoluter Basis gibt, deren starker topologischer Dual ebenfalls eine absolute Basis besitzt. Als Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit werden wir beweisen, daß dieser Sachverhalt gerade für nukleare Räume eintritt.

Eine Einführung in die von A. Grothendieck [4] begründete Theorie der nuklearen lokalkonvexen Räume findet man in meinem Buch [7], aus dem auch die Bezeichnungen und Definitionen übernommen werden.

---

[1] In (F)-Räumen sind die Linearformen f_n automatisch stetig. Vgl. [2].

1. Folgenräume. Als erstes geben wir ein einfaches Verfahren zur Konstruktion von (F)-Räumen mit absoluter Basis an. Zu diesem Zweck wird eine beliebige Doppelfolge von reellen Zahlen $\varrho_n^{[i]}$ betrachtet, die den Bedingungen

$$0 \leqslant \varrho_n^{[1]} \leqslant \varrho_n^{[2]} \leqslant \ldots \quad \text{und} \quad \sup\{\varrho_n^{[i]}: i = 1, 2, \ldots\} > 0$$

genügt. Dann ist der lineare Raum Λ aller Zahlenfolgen $\{\xi_n\}$ mit

$$q_i\{\xi_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \varrho_n^{[i]} < +\infty$$

ein (F)-Raum, wenn man ihn mit der zu den Halbnormen q_i gehörigen lokalkonvexen Topologie versieht (²). Außerdem bilden die Einheitsfolgen

$$\{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$$

eine absolute Basis in Λ.

Wir zeigen nun, daß man auf die angegebene Art bereits alle (F)-Räume mit absoluter Basis erhalten hat. Es gilt nämlich der folgende

Darstellungssatz. *Jeder (F)-Raum E mit einer absoluten Basis $\{e_n\}$ ist zu einem Folgenraum Λ isomorph.*

Beweis. Die Topologie von E kann aus einer Folge von Halbnormen p_i erzeugt werden, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als monoton wachsend voraussetzen darf. Weil die abgeschlossenen, absolutkonvexen und absorbierenden Mengen

$$U_i = \Big\{x \in E: \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle| p_i(e_n) \leqslant 1\Big\}$$

Nullumgebungen von E sind (³), müssen die Halbnormen

$$q_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle| p_i(e_n)$$

stetig sein. Deshalb folgt aus den Ungleichungen $p_i(x) \leqslant q_i(x)$, daß sich die Topologie von E auch aus den Halbnormen q_i gewinnen läßt.

Da die Doppelfolge $\{p_i(e_n)\}$ den oben angegebenen Bedingungen genügt, können wir den zugehörigen Folgenraum Λ bilden, der durch die Zuordnungen

$$K\{\xi_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \quad \text{und} \quad K^{-1}x = \{\langle x, f_n\rangle\}$$

isomorph auf E abgebildet wird.

(²) Diese Folgenräume nennt G. Köthe [6] *gestuft*.
(³) Jeder (F)-Raum ist tonneliert. Vgl. [6], S. 264, (3).

2. Die Banachräume $E(B)$. In einem beliebigen (F)-Raum E bezeichnen wir die Gesamtheit aller *abgeschlossenen und absolutkonvexen beschränkten Teilmengen* mit $\mathfrak{B}(E)$. Ein Teilsystem $\mathfrak{B}_0(E)$ von $\mathfrak{B}(E)$ heißt *fundamental*, wenn es zu jeder Menge $B \in \mathfrak{B}(E)$ eine Menge $B_0 \in \mathfrak{B}_0(E)$ mit $B \subset B_0$ gibt.

Jede Menge $B \in \mathfrak{B}(E)$ bestimmt einen Banachraum

$$E(B) = \{x \in E: x \in \varrho B \text{ für ein } \varrho > 0\}$$

mit der Norm

$$p_B(x) = \inf\{\varrho > 0: x \in \varrho B\}.$$

Wenn $\mathfrak{B}_{l^1}(E)$ die Gesamtheit derjenigen Mengen $B \in \mathfrak{B}(E)$ ist, für die $E(B)$ isometrisch auf den Banachraum l^1 aller absolutsummierbaren Folgen abgebildet werden kann, so gilt der

Satz 1. *Für jeden (F)-Raum E mit einer absoluten Basis $\{e_n\}$ ist $\mathfrak{B}_{l^1}(E)$ fundamental.*

Beweis. Nach Voraussetzung läßt sich die Topologie von E aus einer monoton wachsenden Folge von Halbnormen p_i erzeugen. Ist nun B eine beliebige Menge aus $\mathfrak{B}(E)$, so bestimmen wir positive Zahlen ϱ_i mit

$$q_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle| p_i(e_n) \leqslant \varrho_i \quad \text{für} \quad x \in B$$

sowie $p^i(e_n) \leqslant \varrho_i p_n(e_n)$ für $n = 1, 2, \ldots$ und setzen

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \varrho_i^{-1} p_i(e_n) > 0.$$

Dann gehört die Menge

$$L = \Big\{x \in E: \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle| \sigma_n \leqslant 1\Big\}$$

wegen

$$q_i(x) \leqslant 2^i \varrho_i \quad \text{für} \quad x \in L \text{ und } i = 1, 2, \ldots$$

zu $\mathfrak{B}(E)$, und es gilt $B \subset L$. Außerdem wird der Banachraum $E(L)$ durch die Zuordnung $x \to \{\xi_n\}$ mit

$$\xi_n = \langle x, f_n\rangle \sigma_n$$

isometrisch *auf* den Folgenraum l^1 abgebildet, denn jede Folge $\{\xi_n\} \in l^1$ ist Bild des Elementes

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sigma_n^{-1} e_n.$$

Wenn $\mathfrak{B}_m(E)$ die Gesamtheit derjenigen Mengen $B \in \mathfrak{B}(E)$ ist, für die $E(B)$ isometrisch auf den Banachraum $\boldsymbol{m}$ aller beschränkten Folgen abgebildet werden kann, so gilt der

SATZ 2. *Für jeden reflexiven (F)-Raum E, dessen starker topologischer Dual E'_b eine absolute Basis $\{f_n\}$ besitzt, ist $\mathfrak{B}_m(E)$ fundamental.*

Beweis. Wegen der vorausgesetzten Reflexivität von E gibt es Elemente $e_n \in E$ mit

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, a\rangle f_n \quad \text{für alle } a \in E'.$$

Hat man eine monoton wachsende Folge von Halbnormen p_i, aus denen sich die Topologie von E erzeugen läßt, so ist die Menge der Elemente

$$e_n^* = [p_n(e_n)+1]^{-1} e_n$$

wegen

$$p_i(e_n^*) < 1 \quad \text{für} \quad n \geqslant i$$

beschränkt. Deshalb gibt es zu jeder Menge $A \in \mathfrak{B}(E)$ eine Menge $B \in \mathfrak{B}(E)$ mit $A \subset B$, die auch noch alle Elemente e_n^* enthält.

Wird die Halbnorm p'_B durch den Ansatz

$$p'_B(a) = \sup\{|\langle x, a\rangle|: x \in B\} \quad \text{für} \quad a \in E'$$

definiert, so gehört die Menge

$$M = \{x \in E: |\langle x, f_n\rangle| \leqslant p'_B(f_n)\}$$

zu $\mathfrak{B}(E)$, denn für jede Linearform $a \in E'$ gilt die Ungleichung

$$|\langle x, a\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, a\rangle\langle x, f_n\rangle|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, a\rangle| p'_B(f_n) < +\infty \quad \text{für} \quad x \in M.$$

Außerdem hat man $A \subset B \subset M$.

Wegen $e_n^* \in B$ gilt

$$p'_B(f_n) \geqslant |\langle e_n^*, f_n\rangle| = [p_n(e_n)+1]^{-1} > 0.$$

Nun zeigt sich, daß der Banachraum $E(M)$ durch die Zuordnung $x \to \{\xi_n\}$ mit

$$\xi_n = p'_B(f_n)^{-1}\langle x, f_n\rangle$$

isometrisch *auf* den Folgenraum $\boldsymbol{m}$ abgebildet wird. Weil E schwach folgenvollständig ist (vgl. [6], S. 301, (2)), existiert nämlich für jede Folge $\{\xi_n\} \in \boldsymbol{m}$ das Element

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n p'_B(f_n) e_n.$$

3. Nukleare (F)-Räume. Wir bezeichnen einen (F)-Raum E als *nuklear*, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt (vgl. [7], 4.1.5 und 4.3.3):

Zu jeder Menge $A \in \mathfrak{B}(E)$ gibt es eine Menge $B \in \mathfrak{B}(E)$ mit $A \subset B$, so daß die identische Abbildung von $E(A)$ in $E(B)$ nuklear ist.

Es gilt dann der

SATZ 3. *Jeder (F)-Raum E, in dem die Systeme $\mathfrak{B}_{l^1}(E)$ und $\mathfrak{B}_m(E)$ fundamental sind, ist nuklear.*

Beweis. Ausgehend von einer Menge $A \in \mathfrak{B}(E)$ bestimmen wir Mengen $M_1, M_2 \in \mathfrak{B}_m(E)$ und $L_1, L_2 \in \mathfrak{B}_{l^1}(E)$ mit $A \subset M_1 \subset L_1 \subset M_2 \subset L_2$. Weil dann die identische Abbildung von $E(M_1)$ in $E(L_2)$ vom Typus

$$m \to l^1 \to m \to l^1$$

ist, muß sie auf Grund eines von A. Grothendieck stammenden Satzes nuklear sein (vgl. [5], S. 65, oder [3]). Damit ist aber unsere Behauptung bereits bewiesen, denn wir haben eine zu $\mathfrak{B}(E)$ gehörige Menge $B = L_2$ mit $A \subset B$ gefunden, so daß die identische Abbildung von $E(A)$ in $E(B)$ nuklear ist.

Als Hauptergebnis erhalten wir nun das folgende

THEOREM. *Für jeden (F)-Raum E mit einer absoluten Basis $\{e_n\}$ sind die nachstehenden Aussagen äquivalent:*

(1) *E ist nuklear.*

(2) *Die zu der Basis $\{e_n\}$ gehörigen Linearformen f_n bilden eine absolute Basis in E'_b.*

(3) *Es gibt in E'_b eine absolute Basis $\{f'_n\}$.*

Beweis. Da (2) $\to$ (3) trivial ist, und (1) $\to$ (2) aus der Tatsache folgt, daß in E'_b alle schwachsummierbaren Folgen sogar absolutsummierbar sind (vgl. [7], 4.2.2), haben wir nur noch (3) $\to$ (1) zu zeigen.

Zuerst beweisen wir, daß jede Linearform $a \in E'_b$ Grenzwert von einer Folge endlicher Linearkombinationen

$$a_m = \sum_{n=1}^{m} a_{mn} f'_n$$

mit rationalen Koeffizienten a_{mn} ist. Zu diesem Zweck stellen wir a in der Form

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f'_n$$

dar. Weil die rechtsstehende Reihe absolutkonvergent ist, gibt es dann in E'_b eine beschränkte Teilmenge B mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_B(a_n f'_n) < +\infty$$

(vgl. [4], S. 135, Cor. 4, oder [7], 1.5.8).

Nun bestimmen wir die rationalen Zahlen a_{mn} so, daß

$$p_B(a_n f'_n - a_{mn} f'_n) \leqslant m^{-2}$$

gilt. Da es zu jeder auf E'_b stetigen Halbnorm p eine positive Zahl ϱ mit

$$p(b) \leqslant \varrho p_B(b) \quad \text{für alle } b \in E'(B)$$

gibt, hat man

$$p(a-a_m) \leqslant \sum_{n=1}^{m} p(a_n f'_n - a_{mn} f'_n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} p(a_n f'_n)$$
$$\leqslant \varrho\Big[m^{-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_B(a_n f'_n)\Big].$$

Deshalb gilt in E'_b, wie behauptet, die Beziehung

$$\lim a_m = a.$$

Da wir soeben gezeigt haben, daß E'_b folgenseparabel ist, muß der nach dem Darstellungssatz zu einem Folgenraum Λ isomorphe (F)-Raum E auf Grund von [6], S. 421, (4), reflexiv sein. Nun folgt aber aus Satz 1 und Satz 2, daß die Systeme $\mathfrak{V}_{\mu 1}(E)$ und $\mathfrak{V}_m(E)$ fundamental sind. Somit ist E nach Satz 3 nuklear.

Literaturnachweis

[1] I. Amemiya and K. Shiga, *On tensor products of Banach spaces*, Kodai Math. Sem. Report 9 (1957), S. 161-178.

[2] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Properties of bases in spaces of type B_0*, Prace Mat. 3 (1959), S. 123-141.

[3] P. Cartier, *Classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach*, Séminaire Bourbaki, Exposé 211 (1960/61).

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[5] — *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boletim Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956), S. 1-79.

[6] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[7] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1965.

Reçu par la Rédaction le 4. 4. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

The extended spectrum of completely non-unitary contractions and the spectral mapping theorem

by

C. FOIAŞ (Bucharest) and W. MLAK (Kraków)

Let H^∞ be the algebra of bounded functions, analytic in the open unit disk $\Delta = \{z: |z| < 1\}$. Suppose T is a completely non-unitary contraction [5] in the complex Hilbert space $\mathscr{H}$. There was developed in [6] the functional calculus for H^∞ and such T. More precisely, it was shown that there is a unique representation $u \to u(T)$ $(u \in H^\infty)$ of H^∞ into a certain operator algebra on $\mathscr{H}$, such that

(i) $u_0(T) = I$ for $u_0(z) = 1$, $u_1(T) = T$ for $u_1(z) = z$.

(ii) $|u(T)| \leqslant \sup\limits_{|z|<1} |u(z)|$ for $u \in H^\infty$ (1).

(iii) If $u_n(e^{i\lambda}) \to u(e^{i\lambda})$ boundedly, almost everywhere on $\langle 0, 2\pi)$, then $u_n(T) \to u(T)$ strongly.

The restriction of the mapping $u \to u(T)$ to $u \in A$, the algebra of functions analytic on Δ and continuous on $\overline{\Delta}$, coincides with the functional calculus of J. von Neumann for T and S-analytic functions with $S = \overline{\Delta}$ (for details see [1]). Let $\sigma(V)$ stand for the spectrum of the operator V. It is known (see [1]) that for von Neumann calculus the spectral mapping theorem holds true, i.e.

$$(*) \qquad \sigma[u(T)] = u[\sigma(T)] \quad \text{for} \quad u \in A.$$

It is then natural to ask, how the things are going on with $\sigma[u(T)]$ and $u[\sigma(T)]$ in case where $u \in H^\infty$.

The present paper attempts to give a certain solution of this problem. We always assume, if otherwise not stated explicitely, that T is completely non-unitary contraction.

1. We notice first that $u(e^{i\lambda})$ for $u \in H^\infty$ is defined only almost everywhere by formula

$$u(e^{i\lambda}) = \lim_{r \to 1-} u(re^{i\lambda}).$$

(1) $|V|$ stands for the norm of the linear bounded operator $|V|$ in $\mathscr{H}$.