proved if

$$\int_{x-\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2} \frac{(t-x)^{k+j}}{(k+j)!} D_t^k K_n^a(t,x)\,dt \to 1 \quad \text{as} \quad k\to\infty .$$

Again integrating by parts k times we find that

$$\int_{x-\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2} \frac{(t-x)^{j}}{j!} K_n^a(t,x)\,dt \to 1 \quad \text{as} \quad n\to\infty ,$$

which it does by hypothesis (iii).

References

[1] G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Budapest 1961.

[2] J. Korevaar, *Distributions defined from the point of view of applied mathematics*, Nederl. Acad. Wetench. Proc. Ser. A 58 (1955), pp. 368-389, 483-503, 633-674.

[3] — *Pansions and the theory of Fourier transforms*, Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), p. 53-101.

[4] S. Łojasiewicz, *Sur la valeur et la limite d'une distribution dans un point*, Studia Math. 16 (1957), p. 1-36.

[5] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions (I)*, Warszawa 1957.

[6]. L. Schwartz, *Théorie des distributions, I, II*, Paris 1950, 1951.

[7] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunctions expansions*, Part One, Oxford 1962.

[8] G. Walter, *Expansion of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[9] Z. Zieleźny, *Über die Mengen der regulären und singulären Punkte einer Distribution*, Studia Math. 19 (1960), p. 27-52.

[10] A. Zygmund, *Trigonometric series, I, II*, Cambridge 1959.

Reçu par la Rédaction le 26. 1. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

Nicht verbesserbare Strukturbedingungen

von

LÁSZLÓ LEINDLER (Szeged)

Einleitung. Das Haarsche System ist im Intervall $[0,1]$ folgenderweise definiert: $\chi_0^{(0)}(x) = 1$ und für $n = 0, 1, \ldots$ und $k = 1, 2, \ldots, 2^n$

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{für} \quad x \in \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} & \text{für} \quad x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen

$$\chi_0^{(0)}(x) = \chi_1(x) \quad \text{und} \quad \chi_n^{(k)}(x) = \chi_m(x),$$

wobei $m = 2^n + k$ $(n = 0, 1, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ ist.

Sei $f(x)$ eine $L[0,1]$-integrierbare Funktion mit der folgenden Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m \chi_m(x).$$

Kürzlich haben Ciesielski und Musielak [1], Uljanov [4] und Golubov [2] u. a. für die Konvergenz der Reihen von der Form

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^{\beta} m^{\delta} \quad (\beta > 0)$$

hinreichende Strukturbedingungen und für $\sum_{m=k}^{l} |c_m|^{\beta} m^{\delta}$ in verschiedenen Spezialfällen Größenordnungen gegeben.

In dieser Arbeit geben wir zuerst für die Konvergenz der Reihe $\sum |c_m|^{\beta} \lambda(m)$ eine hinreichende Strukturbedingung, woraus fast alle bekannten Ergebnisse, die sich auf die Behauptungen bezüglich der Reihen von der Form (1) beziehen, als Korollare folgen. Unsere Behauptungen leiten wir aus dem allgemeinen Hilfssatz II ab, den wir durch Anwendung der Ergebnisse von Golubov [2] beweisen.

Aus dem Hilfssatz II ergibt sich unmittelbar

Satz I. *Sei* $\lambda(x)$ $(x \geqslant 1)$ *eine positive, monotone Funktion mit* $K\lambda(2^n) \geqslant \lambda(2^{n-1}) \geqslant K^{-1}\lambda(2^n)$ $(K \geqslant 1,\ n = 1, 2, \ldots)$. *Genügt* $f(x)$ *der Bedingung*

$$(2)\qquad I(f, \lambda, p, \beta) = \int_0^1 \frac{\lambda(1/x)}{x^{2-\beta/2}} \Big(\int_0^{1-x} |f(x+t)-f(t)|^p dt\Big)^{\beta/p} dx < \infty$$

mit $p \geqslant 1$ *und* $0 < \beta \leqslant p$, *so konvergiert die Reihe*

$$(3)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^\beta \lambda(m).$$

Ist

$$(4)\qquad \int_0^1 \frac{\lambda(1/x) x^{\alpha\beta}}{x^{2-\beta/2}} dx = \infty,$$

so gibt es eine Funktion $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *für deren Koeffizienten die Reihe* (3) *divergiert.*

Aus dem Satz I ergeben sich z. B. die folgenden bekannten Ergebnisse:

Satz A (Ciesielski-Musielak [1]). *Genügt* $f(x)$ *der Bedingung*

$$(5)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_\mu^\beta\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\beta/2-\gamma}} < \infty \qquad \Big(\omega_r(\delta) = \sup_{0 \leqslant h < \delta} \Big(\int_0^{1-h} |f(t+h)-f(t)|^r dt\Big)^{1/r}\Big)$$

mit $\beta > 0$, $\gamma \geqslant 0$ *und* $\mu = \max(\beta, 1)$, *so ist die Reihe*

$$(6)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma |c_n|^\beta$$

konvergent.

Die Bedingung (5) ist offensichtlich mit

$$\int_0^1 \frac{\omega_\mu^\beta(x)}{x^{2-\beta/2+\gamma}} dx < \infty$$

äquivalent. Daraus folgt $I(f, \lambda, p, \beta) < \infty$ mit $\lambda(x) = x^\gamma$ und $p = \mu$, also (6) folgt aus (3).

Aus dem Satz I folgt weiter die Folgerung I, welche die Unverschärfbarkeit des Satzes A behauptet:

Folgerung I. *Ist* $\beta \leqslant 2(1+\gamma)/(1+2\alpha)$ *mit* $\gamma \geqslant 0$ *und* $0 < \alpha \leqslant 1$, *so gibt es eine Funktion* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, *für deren Koeffizienten die Reihe* (6) *divergiert.*

Diese Folgerung enthält zwei Ergebnisse von Golubov [2] (Satz VIII).

Satz B (Golubov [2]). 1) *Ist* $p \geqslant 1$ *und*

$$V_p(f) = \Big\{\sup_{\mathfrak{B}} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\Big\}^{1/p} < \infty$$

$$\textit{mit}\quad \mathfrak{B}(0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1),$$

so gilt für jedes $\beta > 2p/(2+p)$ *bzw. für jedes* $\gamma < 1/p - \frac{1}{2}$

$$(7)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^\beta < \infty \quad \textit{bzw.} \quad \sum_{m=1}^{\infty} m^\gamma |c_m| < \infty.$$

2) *Für beliebiges* $p \geqslant 1$ *gibt es eine Funktion* $f_p(t)$ *mit* $V_p(f_p) < \infty$, *für die die Ungleichungen* (7) *mit* $\beta = 2p/(2+p)$ *bzw.* $\gamma = 1/p - \frac{1}{2}$ *nicht erfüllt sind.*

Da die Beziehung

$$\Big\{\int_0^{1-x} |f(t+x)-f(t)|^p dt\Big\}^{1/p} \leqslant 3^{1/p} V_p(f) x^{1/p}$$

gilt (s. [2], S. 1292), so besteht mit $\lambda(x) \equiv 1$ und $\beta > 2p/(2+p)$

$$I(f, 1, p, \beta) \leqslant \int_0^1 \frac{O(1) x^{\beta/p}}{x^{2-\beta/2}} dx = O(1) \int_0^1 x^{\beta(1/2+1/p)-2} dx < \infty,$$

bzw. mit $\lambda(x) = x^\gamma$ und $\gamma < 1/p - \frac{1}{2}$

$$I(f, x^\gamma, p, 1) \leqslant \int_0^1 \frac{O(1) x^{-\gamma} x^{1/p}}{x^{2-1/2}} dx = O(1) \int_0^1 x^{1/p-1/2-\gamma-1} dx < \infty,$$

woraus sich die Behauptungen (7) nach dem Satz I ergeben.

Ist $f(x) \in \mathrm{Lip}\,1/p$, so ist $V_p(f)$ endlich. Aus diesem Grunde folgt die Behauptung 2) des Satzes B aus der Folgerung I.

Aus dem Hilfssatz II mit $\lambda(x) \equiv 1$ ergibt sich noch der bekannte

Satz C (Golubov [2]). *Sei* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *mit* $0 < \alpha \leqslant 1$. *Dann gelten die folgenden Ungleichungen für* $p \geqslant 1$:

im Falle $\alpha > 1/p - \frac{1}{2}$

$$\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^p\Big)^{1/p} = O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1/2-1/p}}\Big);$$

im Falle $\alpha < 1/p - \frac{1}{2}$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^p\Big)^{1/p} = O(n^{1/p-1/2-\alpha});$$

im Falle $\alpha = 1/p - \frac{1}{2}$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^p\Big)^{1/p} = O\Big(\big(\log (n+1)\big)^{1/p}\Big)$$

und die Abschätzungen sind nicht verbesserbar.

Aus dem Hilfssatz II mit $\beta = p = 1$ und $\lambda(x) = l(x)^{1/\gamma}/x^{1/2}$, mit Rücksicht darauf, daß der $(m+1)$-te Koeffizient des Rademacherschen Systems $(r_m(x) = \operatorname{sgn}\sin 2^m \pi x)$

$$a_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k \qquad \Big(c_k = \int_0^1 f(t)\chi_k(t)\,dt\Big)$$

ist, können wir den folgenden Satz ableiten:

Satz II. *Sei* $l(x)$ $(x \geq 1)$ *eine positive, monotone Funktion mit* $Kl(2^n) \geq l(2^{n+1}) \geq K^{-1}l(2^n)$ $(K \geq 1,\ n = 1, 2, \ldots)$ *und* $\gamma > 0$. *Genügt* $f(x)$ *der Bedingung*

$$J(f, l, \gamma) = \int_0^1 \frac{l(1/x)}{x} \Big(\int_0^{1-x} |f(x+t) - f(t)|\,dt\Big)^\gamma dx < \infty,$$

so konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} l(2^m)\,|a_m|^\gamma \qquad \Big(a_m = \int_0^1 f(t) r_m(t)\,dt\Big). \tag{8}$$

Dieser Satz enthält zwei weitere Sätze von Ciesielski und Musielak [1] (Satz 4 und 5). Das können wir ähnlich einsehen als im Falle des Satzes A.

Aus dem Satz II mit $l(x) = (\log x)^\beta$ ergibt sich noch

Folgerung II. *Ist* $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, *oder* $V_p(f) < \infty$ *mit* $p \geq 1$, $\beta \geq 0$ *und* $\gamma > 0$, *so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\beta |a_m|^\gamma.$$

Wir haben in [3] u. a. bewiesen den

Satz D. *Sei* $0 < \beta \leq 2$ *und* γ *eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt die Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^\beta + |b_n|^\beta) n^\gamma < \infty \qquad \left(\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \int_0^{2\pi} f(t) \begin{matrix} \cos nt \\ \sin nt \end{matrix}\, dt\right) \tag{9}$$

aus

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2+\gamma-\beta/2}} \Big(\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(t)|^2 dt\Big)^{\beta/2} dx < \infty.$$

Endlich beweisen wir die Unverschärfbarkeit des Satzes D, d. h. den

Satz III. *Ist* $\beta \leq 2(1+\gamma)/(1+2\alpha)$ *mit* $\gamma \geq 0$ *und* $0 < \alpha \leq 1$, *so gibt es eine Funktion* $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, *für deren Fourierkoeffizienten die Reihe* (9) *divergiert.*

Der Satz formt bezüglich der Fourierreihen das Analogon der Folgerung I.

§ 1. Hilfssätze.

Wir geben den

Hilfssatz I. *Die Funktion*

$$\varphi(x) = \varphi_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\alpha i} \cos 2^{i+1} \pi x \qquad (0 < \alpha < 1)$$

gehört zur Klasse $\operatorname{Lip}\alpha$. *Bezeichnet* N_m *die Anzahl der Indizes* k *zwischen* 2^m *und* 2^{m+1}, *für die*

$$|c_k(\varphi)| \geq \frac{2^\alpha}{2\pi} 2^{-m(\alpha+1/2)}$$

erfüllt ist, so gilt die Ungleichung

$$N_m \geq K(\alpha) 2^m$$

mit $K(\alpha)$, *wobei* $K(\alpha)$ *eine nur von* α *abhängige Konstante ist.*

Die Behauptungen des Hilfssatzes I sind in [2], S. 1284, auffindbar.

Hilfssatz II. *Sei* $\lambda(x)$ $(x \geq 1)$ *eine positive monotone Funktion mit* $K\lambda(2^n) \geq \lambda(2^{n-1}) \geq K^{-1}\lambda(2^n)$ $(K \geq 1,\ n = 1, 2, \ldots)$. *Dann gilt die Ungleichung*

$$\sum_{\nu=n}^{n+l} \Big(\sum_{m=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \lambda(m)|c_m|^\beta\Big)^\gamma \leq C_1(\beta, \gamma, K) \int_{1/2^{n+l+3}}^{1/2^{n+1}} \frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\gamma\beta/2+1}} \Big(\int_0^{1-x} |f(x+t) - f(t)|^p dt\Big)^{\gamma\beta/p} dx, \tag{1.1}$$

wobei $0 < \beta \leq p$, $\gamma > 0$ *und* n, l *beliebige natürliche Zahlen sind.*

Es gibt eine Funktion $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, für deren Koeffizienten gilt die Ungleichung

$$\sum_{\nu=n}^{n+l}\Big(\sum_{m=2^\nu+1}^{2^\nu+1}\lambda(m)|c_m|^\beta\Big)^\gamma \geqslant C_2(\alpha,\beta,\gamma,K)\int\limits_{1/2^{n+l}}^{1/2^n}\frac{\lambda^\gamma(1/x)x^{\alpha\beta\gamma}}{x^{\gamma-\gamma\beta/2+1}}\,dx. \tag{1.2}$$

Beweis. Nach der Definition von $\lambda(x)$ ergibt sich durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}}\lambda(m)|c_m|^\beta \leqslant K\lambda(2^{n+1})\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}}|c_m|^\beta \tag{1.3}$$

$$\leqslant K\lambda(2^{n+1})2^{n(p-\beta)/p}\Big\{\sum_{m+2^n+1}^{2^{n+1}}|c_m|^p\Big\}^{\beta/p}.$$

Nach der Definition der Koeffizienten gilt die Gleichung

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}}|c_m|^p = 2^{np/2}\sum_{k=1}^{2^n}\left|\int\limits_{(2k-2)/2^{n+1}}^{(2k-1)/2^{n+1}}\Big(f(t)-f\Big(t+\frac{1}{2^{n+1}}\Big)\Big)\,dt\right|^p,$$

und so besteht auch

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}}|c_m|^p$$

$$\leqslant 2^{np/2}\sum_{k=1}^{2^n}\left\{\Big(\int\limits_{(2k-2)/2^{n+1}}^{(2k-1)/2^{n+1}}\Big|f(t)-f\Big(t+\frac{1}{2^{n+1}}\Big)\Big|^p dt\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{(2k-2)/2^{n+1}}^{(2k-1)/2^{n+1}}dt\Big)^{1-1/p}\right\}^p$$

$$\leqslant 2^{n(1-p/2)}\int\limits_0^{1-1/2^{n+1}}\Big|f(t)-f\Big(t+\frac{1}{2^{n+1}}\Big)\Big|^p dt.$$

Daraus und aus (1.3) bekommen wir

$$\sum_{\nu=n}^{n+l}\Big(\sum_{m=2^\nu+1}^{2^\nu+1}\lambda(m)|c_m|^\beta\Big)^\gamma \tag{1.4}$$

$$\leqslant K^\gamma\sum_{\nu=n}^{n+l}\lambda^\gamma(2^{\nu+1})2^{\nu(1-\beta/p)\gamma}2^{\nu\gamma(\beta/p-\beta/2)}\Big(\int\limits_0^{1-2^{-\nu-1}}\Big|f(t)-f\Big(t+\frac{1}{2^{\nu+1}}\Big)\Big|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}$$

$$\leqslant K^\gamma\sum_{\nu=n}^{n+l}\lambda^\gamma(2^{\nu+1})2^{\nu(1-\beta/2)\gamma}\Big(\int\limits_0^{1-2^{-\nu-1}}|f(t)-f(t+2^{-\nu-1})|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}$$

$$\leqslant O(1)\sum_{\nu=n}^{n+l}\int\limits_{2^{-\nu-3}}^{2^{-\nu-2}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big(\int\limits_0^{1-2^{-\nu-1}}|f(t)-f(t+2^{-\nu-1})|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}dx$$

$$\leqslant O(1)\sum_{\nu=n}^{n+l}\int\limits_{2^{-\nu-3}}^{2^{-\nu-2}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big[\Big(\int\limits_0^{1-2^{-\nu-1}}|f(t+2^{-\nu-1})-f(x+t)|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}+$$

$$+\Big(\int\limits_0^{1-2^{-\nu-1}}|f(x+t)-f(t)|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}\Big]dx$$

$$\leqslant O(1)\sum_{\nu=n}^{n+l}\int\limits_{2^{-\nu-3}}^{2^{-\nu-2}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big(\int\limits_0^{1-2^{-\nu-1}}|f(t+2^{-\nu-1})-f(x+t)|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}dx+$$

$$+O(1)\sum_{\nu=n}^{n+l}\int\limits_{2^{-\nu-3}}^{2^{-\nu-2}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big(\int\limits_0^{1-x}|f(x+t)-f(t)|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}dx.$$

Jetzt abschätzen wir das erste Integral

$$\int\limits_{2^{-\nu-3}}^{2^{-\nu-2}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big(\int\limits_0^{1-2^{-\nu-1}}\Big|f(t+2^{-\nu-1})-f(x+t)\Big|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}dx$$

mit $t=u-x$

$$=\int\limits_{2^{-\nu-3}}^{2^{-\nu-2}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big(\int\limits_x^{1-2^{-\nu-1}+x}|f(u+2^{-\nu-1}-x)-f(u)|^p du\Big)^{\beta\gamma/p}dx$$

mit $x=2^{-\nu-1}-y$

$$\leqslant O(1)\int\limits_{2^{-\nu-2}}^{2^{-\nu-1}}\frac{\lambda^\gamma(1/y)}{y^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big(\int\limits_{2^{-\nu-1}-y}^{1-y}|f(u+y)-f(u)|^p du\Big)^{\beta\gamma/p}dy$$

mit $y=x$ und $u=t$

$$=O(1)\int\limits_{2^{-\nu-2}}^{2^{-\nu-1}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\Big(\int\limits_0^{1-y}|f(t+x)-f(t)|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}dx.$$

Daraus und aus (1.4) erhalten wir

$$\sum_{\nu+n}^{n+l}\Big(\sum_{m=2^\nu+1}^{2^\nu+1}\lambda(m)|c_m|^\beta\Big)^\gamma$$

$$\leqslant C_1(\beta,\gamma,K)\sum_{\nu=n}^{n+l}\int\limits_{2^{-\nu-3}}^{2^{-\nu-1}}\frac{\lambda^\gamma(1/x)}{x^{\gamma-\gamma\beta/2+1}}\Big(\int\limits_0^{1-x}|f(t+x)-f(t)|^p dt\Big)^{\beta\gamma/p}dx,$$

woraus die Behauptung (1.1) offenbar folgt.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $0<\alpha<1$, so sei $f(x)=\varphi(x)$, wobei $\varphi(x)$ die im Hilfssatz I definierte Funktion ist. Nach dem Hilfssatz I gilt die Ungleichung

$$(1.5)\qquad \Big(\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}}\lambda(m)|c_m|^\beta\Big)^\gamma \geqslant K^{-\gamma}\lambda^\gamma(2^n)N_n^\gamma\frac{2^\alpha}{2\pi}2^{-n(\alpha+1/2)\beta\gamma}$$
$$\geqslant K^{-\gamma}K(\alpha)\frac{2^\alpha}{2\pi}\lambda^\gamma(2^n)2^{n\gamma}\cdot 2^{-n(\alpha+1/2)\beta\gamma}$$
$$\geqslant C_3(\alpha,\beta,K)\int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n}\frac{\lambda^\gamma(1/x)x^{\alpha\beta\gamma}}{x^{\gamma-\gamma\beta/2+1}}\,dx.$$

Im Falle $\alpha=1$ sei $f(x)=1-2x$. Es ist klar, daß $f(x)\in\mathrm{Lip}\,1$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$c_m(f)=2^{-1}\cdot 2^{-3n/2}\qquad\text{für}\qquad 2^n<m\leqslant 2^{n+1}$$

ist. Daraus folgt

$$(1.6)\qquad \Big(\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}}\lambda(m)|c_m|^\beta\Big)^\gamma \geqslant K^{-\gamma}\lambda^\gamma(2^n)2^{n\gamma}2^{-\beta\gamma}2^{-\frac{3\beta\gamma}{2}n}$$
$$\geqslant C_4(1,\beta,K)\int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n}\frac{\lambda^\gamma(1/x)x^{\beta\gamma}}{x^{\gamma-\beta\gamma/2+1}}\,dx.$$

Aus den Ungleichungen (1.5) und (1.6) ergibt sich (1.2) mit $C_2(\alpha,\beta,K)=\min(C_3,C_4)$ offenbar.

Damit haben wir den Hilfssatz II vollständig bewiesen.

§ 2. Beweise von Sätzen II und III.

Beweis des Satzes II. Aus dem Hilfssatz II mit $\lambda(x)=l^{1/\gamma}(x)x^{-1/2}$ und $p=\beta=1$ bekommen wir, daß

$$\sum_{\nu=n}^{n+l}l(2^\nu)|a_\nu|^\gamma\leqslant\sum_{\nu=n}^{n+l}l(2^\nu)\cdot 2^{-\nu\gamma/2}\Big(\sum_{m=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}|c_m|\Big)^\gamma$$
$$\leqslant K\sum_{\nu=n}^{n+l}\Big(\sum_{m=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\frac{l(m)^{1/\gamma}}{m^{1/2}}|c_m|\Big)^\gamma$$
$$\leqslant O(1)\int_{1/2^{n+l+3}}^{1/2^{n+1}}\frac{l(1/x)}{x}\Big(\int_0^{1-x}|f(x+t)-f(t)|\,dt\Big)^\gamma dx$$

gilt, woraus die Behauptung des Satzes II offenbar folgt.

Beweis des Satzes III. Seien

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\log n}}{n^{1/2+\alpha}}e^{inx}\qquad\text{und}\qquad f_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{in\log n}}{(n\log n)^{3/2}}e^{inx}.$$

Bekanntlich sind $f_1(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ und $f_2(x)\in\mathrm{Lip}\,1$ (s. [5], S. 243). Für die Koeffizienten dieser Funktionen die Reihe (9) divergiert, weil wegen $\beta\leqslant(1+\gamma)/(\frac{1}{2}+\alpha)$ die Ungleichungen

$$n^{-(1/2+\alpha)\beta}\cdot n^\gamma\geqslant n^{-1}\qquad\text{und}\qquad(n\log n)^{-3\beta/2}n^\gamma\geqslant n^{-1}$$

bestehen.

Literaturnachweis

[1] Z. Ciesielski and I. Musielak, *On absolute convergence of Haar series*, Coll. Math. 7 (1959), S. 61-65.

[2] Б. И. Голубов, *О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара*, Известия АН СССР, серия матем., 28 (1964), S. 1271-1296.

[3] L. Leindler, *Über Strukturbedingungen für Fourierreihen*, Math. Zeitschrift 88 (1965), S. 418-431.

[4] П. Л. Ульянов, *О рядах по системе Хаара*, Мат. сборник 63 (105) (1964), S. 356-391.

[5] A. Zygmund, *Trigonometric series I-II*, Cambridge 1959.

Reçu par la Rédaction le 2. 2. 1965