All sets defined above are open and $\bigcup_{x\in A} U_x \supset A = \bar{A}$. Hence there exists a finite cover $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$ of the set A, where $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. If $y \in \varphi^{-1}(U^x)$, then for $x' = \varphi(y) \in U_x$ we have $|f_x(x')| > 1-\varepsilon_x$ and, from (iv), $Tf_x(y) > 1-\varepsilon_{x'}$, hence $y \in V_x$. Thus $V_x \supset \varphi^{-1}(U_x)$ for $x \in A$, whence

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \supset \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(U_{x_i}) = \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\Big) \supset \varphi^{-1}(A).$$

Now, $\bigcap_{i=1}^{n} G_{x_i} \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = \emptyset$ (because $G_x \cap V_x = \emptyset$) and

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_{x_i} \cap \varphi^{-1}(A) = \emptyset.$$

Since $\bigcap_{i=1}^{n} G_{x_i}$ is a neighbourhood of the point y_0, $\varphi^{-1}(A)$ is a closed set in Y. In particular $Y_0 = \varphi^{-1}(X)$ is closed in Y.

(vi) $f'(x)\cdot Tf(y) = f(x)\cdot Tf'(y)$ for $f, f' \in C(X)$, $x \in X$, $y \in Q_x$.

Indeed, we consider the function $g = f'(x)\cdot f - f(x)\cdot f'$ (x is fixed). Then $g(x) = 0$ and $Tg(y) = 0$ (by (i)) and this yields (vi).

Now, let $\alpha(y) = T1(y)$, where $y \in Y$ and the function $1 \in C(X)$ is defined by $1(x') = 1$ for $x' \in X$.

Then, since $1 \in S_x$, $|\alpha(y)| = 1$ for $y \in Q_x$, $x \in X$, and from (vi), $Tf(y) = f(\varphi(y))\cdot\alpha(y)$ for $y \in Y_0$, q. e. d.

References

[1] H. Bauer, *Šilovsche Rand und Dirichletsche Problem*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11 (1961), p. 89-136.

[2] K. Borsuk, *Über Isomorphie der Funktionalräume*, Bull. Acad. Polon. Sci. (1933), p. 1-10.

[3] G. Choquet and P. A. Meyer, *Existence et unicité des représentations intégrales dans les ensembles convexes compacts quelconques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 13 (1963), p. 139-154.

[4] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part I, New York 1958.

[5] K. Gęba and Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions* (V), Studia Math. 19 (1960), p. 303-320.

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T, XXVI. (1966)

Sur une représentation de la prédiction d'un processus stationnaire régulier

par

Z. IVKOVIĆ (Beograd)

En partant de la définition de la prédiction dans [4] on en donne dans ce travail les représentations (*) et (**), analogues à la représentation de la prédiction linéaire basée sur la décomposition de Wold. On profite, dans le cas discret, des propriétés de l'espace de Hilbert exposées dans [1], et dans le cas continu la construction est semblable à celle contenue dans [2].

Soit $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, un processus strictement stationnaire sur l'espace $(\Omega = \{\omega\}, F, P)$ et $F_{-\infty}^{t}$ un corps borelien engendré par les événements $\{\omega\colon\ x(t_1) \in K_1, \ldots, x(t_k) \in K_k\}$ pour tout $t_1 \leqslant t, \ldots, t_k \leqslant t$ et $K_1, \ldots, K_k$ (éléments du corps borelien du plan complexe). Soit ensuite H un espace de Hilbert dont les éléments sont les variables aléatoires y sur (Ω, F, P) à dispersion finie: $\int_{\Omega} |y(\omega)|^2 dP < \infty$; produit scalaire: $(x, y) = E\{x\bar{y}\} = \int_{\Omega} x(\omega)\overline{y(\omega)}\,dP$. Nous supposerons dorénavant que le processus $x(t)$ est à dispersion finie $E\{|x(t)|^2\} = E\{|x(0)|^2\} < \infty$. Désignons par $H_{-\infty}^{t}$ le sous-espace H, dont les éléments sont les variables aléatoires à dispersion finie et mesurables sur $F_{-\infty}^{t}$. L'opérateur $U_\tau x(t) = x(t+\tau)$ peut être isométriquement élargi sur tout l'espace H, de façon que U_t, $-\infty < t < \infty$, soit le groupe des opérateurs unitaires. L'espace H sera toujours séparable dans le cas d'un processus $x(t)$ à paramètre discret. Dans le cas d'un paramètre continu, pour que l'espace H soit séparable, il suffit que le processus $x(t)$ soit continu en moyenne quadratique [5].

On définit la prédiction $\hat{x}(t, \tau)$ du processus $x(t)$ dans l'instant $t+\tau$, relativement au passé jusqu'à l'instant t, comme l'espérance mathématique conditionnelle: $\hat{x}(t; \tau) = E\{x(t+\tau)\,|\,F_{-\infty}^{t}\}$ [4]. Considérant d'après [4] le processus $x(t)$ comme une courbe dans l'espace H on réduit la prédiction à la projection $\hat{x}(t, \tau) = P_{H_{-\infty}^{t}}[x(t+\tau)]$.

Le processus $x(t)$ sera dit *régulier* si le corps borelien $\bigcap_{t} F_{-\infty}^{t}$ est trivial, c'est-à-dire s'il ne contient que les événements de probabilité 0 et 1. Dans l'espace H cela équivaudra au fait que $\bigcap_t H^t_{-\infty}$ est un espace vide.

Lemme 1. *$x(t)$ étant un processus stationnaire régulier, on aura $x(t) \notin H^s_{-\infty}$, $s < t$ (s et t étant deux instants arbitraires fixés).*

Démonstration. Si $x(t) \notin H^s_{-\infty}$, le processus $x(t)$ étant stationnaire, on aura $x(t+\tau) \notin H^{s+\tau}_{-\infty}$ pour tout τ. Supposons, au contraire, que $x(t) \in H^s_{-\infty}$, $s < t$. D'après [5], chaque élément de $H^s_{-\infty}$ peut être représenté comme la limite d'une suite de fonctions bornées continues $\varphi_{n,k}(x(t_1), \ldots, x(t_k))$, $t_1, \ldots, t_k \leqslant s$.

Cependant, si l'on a $x(t) \in H^s_{-\infty}$, $s < t$, on aura $x(t_k) \in H^{s+t_k-t}_{-\infty}$ et, appliquant ce procédé un nombre de fois suffisant, on peut, pour tout r, faire en sorte que l'on ait

$$x(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_{n,k}(x(t_1), \ldots, x(t_k)),$$

où $t_1, \ldots, t_k \leqslant r$. On a donc $x(t) \in H^r_{-\infty}$ pour tout r, et alors $x(t) \in \bigcap_r H^r_{-\infty} = \emptyset$, ce qui est une contradiction.

A. *Cas d'un paramètre discret.*

Théorème 1. *Un processus stationnaire x_t, $t = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ à paramètre discret sera régulier si et seulement si l'espace $H^{t_0}_{-\infty}$ (t_0 choisi arbitrairement, mais fixé) est irréductible par rapport à l'opérateur U^{-1}.*

Démonstration. Un sous-espace non-trivial de $H^{t_0}_{-\infty}$ contient au moins un x_s, $s < t_0$, fixé. Cependant, l'élément $U^{t_0-s+1}x_s$ sort de $H^{t_0}_{-\infty}$, ce qui, d'après le lemme 1, contredit à la condition de régularité. Donc, $H^{t_0}_{-\infty}$ n'admet pas de sous-espaces non triviaux invariants par rapport à l'opérateur U, ce qui signifie que $H^{t_0}_{-\infty}$ est un sous-espace irréductible [1].

Le sous-espace $\bigcap_t U^t H^{t_0}_{-\infty}$ est invariant par rapport aux opérateurs U et U^{-1}, il réduit donc U^{-1} [1]. Comme $H^{t_0}_{-\infty} \supset \bigcap_t U^t H^{t_0}_{-\infty}$, on déduit de l'irréductibilité du sous-espace $H^{t_0}_{-\infty}$ que $\bigcap_t U^t H^{t_0}_{-\infty} = \emptyset$, [1], ce qui est équivalent à la définition de la régularité du processus $x(t)$.

Considerons le „wandering" sous-espace [1] $D = H^0_{-\infty} \frown (U^{-1}H^0_{-\infty})$. Soit $b^{(j)}$, $j \in J$, où J est un ensemble dénombrable, base dans le sous-espace D.

Théorème 2. *Si x_t est un processus stationnaire régulier à paramètre discret, on a*

$$x_t = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{t} c^{(j)}_{t-n} U^n b^{(j)}, \qquad c^{(j)}_{t-k} = (x_{t-k}, b^{(j)}).$$

Démonstration. Comme $H^0_{-\infty}$ est irréductible, on a

$$H^0_{-\infty} = \sum_{n=-\infty}^{0} U^n D,$$

[1], et pour $x_0 \in H^0_{-\infty}$, il vient

$$x_0 = \sum_{n=-\infty}^{0} U^n y_n,$$

où $y_n \in D$ et $y_n = \sum_{j\in J} c^{(j)}_n b^{(j)}$. On a donc

$$x_0 = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{0} c^{(j)}_n U^n b^{(j)}.$$

En appliquant alors l'opérateur U^t et en changeant les indices, on obtient enfin la représentation ci-dessus.

Corollaire. *Si x_t est un processus stationnaire régulier à paramètre discret, on a*

$$(*) \qquad \hat{x}(t;\tau) = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{t} c^{(j)}_{t+\tau-n} U^n b^{(j)}$$

avec l'erreur de prédiction

$$\sigma^2_\tau = \|x_{t+\tau} - \hat{x}(t;\tau)\|^2 = \sum_{j\in J} \sum_{n=0}^{\tau-1} |c^{(j)}_n|^2.$$

On cherche, dans le cas de la prédiction linéaire, la projection de $x_{t+\tau}$ sur la fermeture linéaire $L(x;t)$, engendrée par $x(s)$, $s \leqslant t$. La décomposition de Wold pour les processus stationnaires et linéaires réguliers $\left(\bigcap_t L(x;t) = \emptyset\right)$ à paramètre discret sera

$$x_t = \sum_{n=-\infty}^{t} c_{t-n} b_t,$$

[3], où $b_t = U^t b_0$ est une suite orthonormée. On déduit immédiatement cette décomposition de notre représentation; le „wandering" sous-espace $D = L(x;0) \frown \left(U^{-1}L(x;0)\right)^\perp$ étant dans ce cas un sous-espace à dimension 1.

B. *Cas d'un paramètre continu.*

Nous appliquerons dans ce cas un procédé semblable à celui de Hanner [2]. Désignons par $H(a,b)$, $a < b$, le complément orthogonal de $H^a_{-\infty}$ dans $H^b_{-\infty}$. Si $y \in H$, alors $y(t) = U_t y$ sera un processus stationnaire régulier.

Définition. La mesure spectrale aléatoire de l'intervalle (a, b) par rapport à $y(t)$ est

$$Z^y(a,b) = P_{H(a,b)}\Big[\int_a^b y(t)\,dt\Big].$$

(On comprend l'intégrale dans le sens ordinaire de Riemann.)

LEMME 2. *La mesure spectrale $Z^y(a, b)$ a les propriétés suivantes: pour tout $a < b < c$*

$$Z^y(a, b) \perp Z^y(b, c), \qquad Z^y(a, b)+Z^y(b, c) = Z^y(a, c),$$

et si $\|y\| > 0$, on a $\|Z^y(a, b)\| > 0$.

On déduit facilement la démonstration des deux premières propriétés en partant des propriétés géométriques des espaces de Hilbert. Nous démontrerons la troisième propriété indirectement. Si

$$P_{H(a,b)}\Big[\int_a^b y(t)\,dt\Big] = 0,$$

on aura

$$\int_a^b y(t)\,dt \perp H(a, b).$$

D'autre part

$$\Big\|\int_a^b y(t)\,dt\Big\| = \|(b-a)y(t_0)\| > 0, \qquad a < t_0 < b,$$

et

$$\int_a^b y(t)\,dt \perp H_{-\infty}^b,$$

ce qui donne

$$\int_a^b y(t)\,dt \in H_{-\infty}^a$$

où $y(t_0) \in H_{-\infty}^a$, $t_0 > a$, ce qui contredit au lemme 1.

Les variables aléatoires $Z^y(a, b)$ seront dorénavant normées de façon que $\|Z^y(a, b)\| = b-a$, ce qui se fait aisément si l'on prend

$$\frac{b-a}{\|Z^y(a, b)\|} Z^y(a, b)$$

au lieu de $Z^y(a, b)$. Suivant [2] on définit

$$Z^y(t) = \begin{cases} Z^y(0, t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -Z^y(t, 0), & t < 0. \end{cases}$$

$Z^y(t)$ est un processus à accroissements stationnaires et orthogonaux et $Z^y(a, b) = Z^y(b)-Z^y(a)$.

Désignons par $L(Z^y)$ la fermeture linéaire sur $Z^y(t)$, $-\infty < t < \infty$. D'après [2], pour tout $z \in L(Z^y)$ il existe $g(u) \in L_2$ tel que

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,dZ^y(u)$$

et réciproquement. On a aussi

$$\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,dZ^y(u)\Big\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du.$$

Désignons par $L(Z^y; t)$ la fermeture linéaire sur $Z^y(s)$, $s \leqslant t$. Le lemme suivant est important:

LEMME 3. *Si $y \in H$, on a $L(y; t) = L(Z^y; t)$ pour tout t.*

Démonstration. Désignons

$$\alpha(s) = P_{L(Z^y;t)}[y(s)] \quad \text{et} \quad \beta(s) = P_{H_{-\infty}^t \cap L(Z^y;t)^\perp}[y(s)]$$

pour $s \leqslant t$. On a alors $y(s) = \alpha(s)+\beta(s)$. Le lemme sera démontré, si l'on démontre que $\beta(s) = 0$ pour tout $s \leqslant t$. Sous l'hypothèse contraire, on aura pour tout $s_1, s_2 \leqslant t$, $\alpha(s_1) \perp \beta(s_2)$, c'est-à-dire $L(\alpha; t) \perp L(\beta; t)$ et $L(\beta; t) = L(y; t) \cap L(\alpha; t)^\perp$. Les sous-espaces $L(y; t)$, $L(\alpha; t)$ et $L(\beta; t)$ sont évidemment invariants par rapport à l'opérateur unitaire U_{-t_0} ($t_0 > 0$ fixé). D'après [1] le sous-espace $L(y; t)$ réduit l'opérateur U_{-t_0}, ce qui signifie qu'il est invariant par rapport à $(U_{-t_0})^* = U_{t_0}$, $t_0 > 0$. Donc, $L(y; t+t_0) \subseteq L(y; t)$, en contradiction avec le lemme 1.

Si $b^{(j)}$, $j \in J$, est une base dans l'espace séparable $H_{-\infty}^0$, on a évidemment $H_{-\infty}^t = \sum_{j\in J} L(Z^{(j)}; t)$ (en posant $Z^{b^{(j)}} = Z^{(j)}$).

THÉORÈME 3. *$x(t)$ étant un processus stationnaire régulier à paramètre continu et continu en moyenne quadratique, on a*

$$x(t) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{t} g^{(j)}(t-s)\,dZ^{(j)}(s), \qquad g^{(j)}(u) \in L_2.$$

Démonstration. On a

$$x(0) = \sum_{j\in J} c_j b^{(j)}, \qquad \sum_{j\in J} |c_j|^2 = \|x(0)\|^2$$

et

$$c_j b^{(j)} = \int_{-\infty}^{0} g^{(j)}(s)\,dZ^{(j)}(s), \qquad g^{(j)}(u) \in L_2.$$

Il s'ensuit que

$$x(0) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{0} g^{(j)}(s)\, dZ^{(j)}(s).$$

L'application de l'opérateur U_t donne la représentation en question.

COROLLAIRE. *$x(t)$ étant un processus stationnaire régulier à paramètre continu et continu en moyenne quadratique, on a*

$$(**) \qquad \hat{x}(t;\tau) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{t} g^{(j)}(t+\tau-s)\, dZ^{(j)}(s)$$

avec l'erreur de prédiction

$$\sigma_\tau^2 = \|x(t+\tau)-\hat{x}(t;\tau)\|^2 = \sum_{j\in J} \int_0^\tau |g^{(j)}(s)|^2 ds.$$

On obtient la décomposition de Wold en introduisant la mesure spectrale $Z^x(a,b)$ par rapport au processus $x(t)$ lui-même. Alors $x(s)\in L(Z^x;t)$, $s\leqslant t$, et enfin [2]

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\, dZ^x(s), \qquad g(u)\in L_2.$$

Travaux cités

[1] P. Halmos, *Shifts on Hilbert spaces*, J. für reine u. angew. Mathematik 208 (1961), p. 102-112.

[2] O. Hanner, *Deterministic and non-deterministric stationary random processes*, Arkiv för Mathematik 1 (1950), p. 161-177.

[3] N. Kolmogoroff, *Suites stationnaires dans l'espace de Hilbert*, Bull. Univ. Moscou 2 (1941).

[4] P. Masani and N. Wiener, *Non-linear prediction. Probability and statistics*, The Harald Cramer Volume, Uppsala 1959, p. 190-212.

[5] Y. Rozanoff, *Processus aléatoires stationnaires*, Moscou 1963.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, BEOGRADE

Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1964

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1966)

Pointwise convergence of distribution expansions

by

G. WALTER (Milwaukee, Wisc.)

The behaviour of Fourier series of distributions with respect to global properties has been extensively studied ([6], [5], [2]). The same is true for other orthonormal systems ([3], [7]). However, the introduction of the concept of value of distribution ([4], [8], [5]) has raised the question of how the orthonormal expansion of a distribution behaves locally. To this question and related ones for other orthonormal systems we address ourselves.

1. The theorems giving local criteria for pointwise convergence of expansions of functions with respect to Fourier series are well known. Also it is well known that Fourier series of distributions converge in the sense of distributions. It is clear (from the example of the δ distribution) that a distribution can be very well behaved locally and still not have its Fourier series convergent at any point. It is also clear (from the same example) that at some points the Fourier series of some distributions are $(C,1)$ summable. Thus the question we pose first in this section is: which ones at which points?

First we need a few remarks. Throughout we use the $K_n^k(t,x)$ to denote the (C,k) kernel with respect to the orthonormal system $\{\varphi_n\}$ on the finite interval $[a,b]$. We use the concept of value of a distribution at a point in the form characterized by [4]. A distribution is integrable over the interval $[a,b]$ if its antiderivative has values at a and b. This differs with the definition in [5], but agrees with that used in [7].

THEOREM. *Let $\{\varphi_n\}$ be a constant preserving orthonormal system on $[a,b]$ in class C^{a-1} which for some $x\in(a,b)$ is uniformly bounded and in some neighborhood of x satisfies*

$$|\varphi_n^{(a-1)}(t)| \leqslant K_x n^{a-1}$$

and whose (C,k) kernel satisfies

$$|D_t^{k-1}K_n^k(t,x)| \leqslant \frac{M}{n|t-x|^{k+1}}$$

$$(t\in(a,b),\ t\neq x;\ n=1,2,\ldots;\ k=1,\ldots,a).$$