STUDIA MATHEMATICA, T. XXV. (1964)

Die Spektraldarstellung einiger Differentialoperatoren mit periodischen Koeffizienten im Raume der fastperiodischen Funktionen

von

M. BURNAT (Warszawa)

Die Eigenwertaufgabe

$$(1)\qquad -u''+q(x)u = \lambda u \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

wo $u(x)$ begrenzt, $q(x)$ stetig und periodisch ist, ist seit langer Zeit untersucht worden (siehe z. B. [6] und [7]). Neue Anregung zur Untersuchung der Eigenwertaufgabe (1) hat die Quantentheorie der Kristalle (Halbleitertheorie) gegeben (siehe [16]). In dieser Theorie stellt nämlich das periodische Potential $q(x)$ in Gleichung (1) das eindimensionale Kristallmodell dar. Dabei spielt die Verteilung der Eigenwerte λ eine wichtige Rolle (energetisches Spektrum des Kristalls). Es ist bekannt, daß das Spektrum im allgemeinen aus unendlich vielen Streifen besteht. Wir haben also mit einem stetigen Streifenspektrum zu tun (siehe [8], [17], [18], [9], [12] und [20]). Trotzdem sind einige Abschätzungen der Abstände zwischen benachbarten Streifen bekannt (siehe [19], [20], [13] und [14]). Was die Perturbationseigenschaften des Spektrums der Aufgabe (1) betrifft, so war dem Verfasser nur ein Satz dieser Art bekannt (siehe [18]), welcher besagt, daß das Spektrum des Operators $-u''+\varepsilon q(x)u$, wo $q(x)$ periodisch ist, für $\varepsilon\to 0$ gegen die Halbgerade $\langle 0,+\infty)$ strebt. Die Perturbationseigenschaften zu kennen, ist unter anderen deswegen wichtig, weil man erstens im Kristall niemals genau das Potential $q(x)$ kennt und zweitens viele Methoden der Spektrumauswertung auf einigen heuristischen Voraussetzungen über die Perturbationseigenschaften beruhen (siehe [10] und [15]).

Im ersten Abschnitt der vorliegender Arbeit untersuchen wir den Operator $Lu = -u''+q(x)u$, wo $q(x)$ periodisch ist (der Hillsche Operator), und sein Spektrum. Unsere Untersuchungsmethode beruht auf der Anwendung der Norm

$$(2)\qquad \|f\|^2 = \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2dx$$

und des nichtseparablen Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$, welchen die Besikovitch fastperiodischen Funktionen darstellen. Es zeigt sich, daß der Differentialoperator $-u''+q(x)u$ im Raume $\mathfrak{H}$ einen wesentlich selbstadiungierten Operator hervorruft, dessen Spektrum mit der Menge aller Eigenwerte der Aufgabe (1) zusammenfällt. Dabei gewinnen wir die Tatsache, welche die Untersuchung des Spektrums erleichtert, daß alle Eigenfunktionen dem Raume $\mathfrak{H}$ angehören. Wir erhalten folgende Perturbationssätze. Wir betrachten zwei Operatoren $-u''+q^{(1)}(x)u$ und $-u''+q^{(2)}(x)u$, wo $q^{(1)}(x)$ und $q^{(2)}(x)$ periodische Funktionen mit derselben Periode a und $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ die entsprechende Spektren sind. Wenn wir jetzt mit $\varrho(S^{(1)}, S^{(2)})$ die Hausdorffsche Entfernung der Zahlenmengen $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ bezeichen, dann gilt die folgende Abschätzung:

$$\varrho(S^{(1)}, S^{(2)}) \leqslant \sup_x |q^{(1)}(x)-q^{(2)}(x)|$$

(Satz 5). Aus anderen Abschätzungen (Satz 6) folgt, daß die „relative" Entfernung der Mengen $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ kleiner als

$$M\Big(\int_0^a |q^{(1)}(x)-q^{(2)}(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

ist, wo M eine Konstante bedeutet. Die besprochene Resultate wurden kurz in [3] angegeben.

Alle genannten Probleme sind besonders interessant im Falle des Operators $Lu = -\Delta u+q(x_1, x_2, x_3)u$, wo $q(x_1, x_2, x_3)$ dreifach periodisch ist. Physikalisch wird es sich dann um einen dreidimensionalen Kristall handeln.

Der dreidimensionale Fall wird in analoger Weise im zweiten Abschnitt betrachtet. Es wurden dabei analoge Ergebnisse erhalten. Im Abschnitt III sind einige naheliegende Fragen angegeben.

I. Der Hillsche Operator

1. Hilfsbemerkungen. Die Menge aller für $-\infty < x < +\infty$ erklärten komplexwertigen und gleichmässig fastperiodischen Funktionen (siehe [1]) werden wir mit (g, f, p) bezeichnen. Für $f(x)\in(g, f, p)$ wird die Norm (2) eingeführt.

Mit (B^2, f, p) wird die Funktionenmenge bezeichnet, welche durch Abschliessung der Menge (g, f, p) in der Norm (2) entsteht. Weiter bezeichnen wir mit T die Menge aller trigonometrischen Polynome der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{r} A_j e^{i\lambda_j x},$$

wo A_j komplexe und λ_j reelle Zahlen sind. T gehört der Menge (g, f, p) an, und ist im Sinne von (2) in (B^2, f, p) dicht.

Die Funktionen, welche (B^2, f, p) angehören, werden wir mit kleinen Buchstaben $f, u, \ldots$ bezeichnen. Die Menge (B^2, f, p) zerteilen wir in Klassen, nämlich f_1 und f_2 repräsentieren dann und nur dann dieselbe Klasse, wenn $\|f_1-f_2\| = 0$ ist. Die erhaltene Klassenmenge bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$. Die Elemente von $\mathfrak{H}$ werden mit großen Buchstaben $F, U, \ldots$ bezeichnet.

Wenn $f(x)\in(B^2, f, p)$ das Element $F\in\mathfrak{H}$ repräsentiert, dann werden wir $F = (f)$ schreiben. Die Operatoren, welche auf Funktionen aus (B^2, f, p) wirken, werden wir mit den Buchstaben $A, L, \ldots$ bezeichnen. Dagegen die Operatoren welche auf die Elemente aus $\mathfrak{H}$ wirken, bezeichnen wir mit großen deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{L}, \ldots$ Z. B. bedeuten I bezw. $\mathfrak{I}$ Operatoren welche die Funktionen $f(x)\in(B^2, f, p)$ bzw. die Elemente aus $\mathfrak{H}$ unverändert lassen.

Für $F, G\in\mathfrak{H}$ wird das skalare Produkt

$$(F, G) = \overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,g(\overline{x})\,dx \tag{3}$$

eingeführt, wo $F = (f(x))$ und $G = (g(x))$ ist. Die Menge $\mathfrak{H}$ mit dem Produkt (2) bildet den vollständigen, nichtseparabelen Hilbertschen Raum. Wenn einer Funktion $f\in(B^2, f, p)$ oder einem Element $F\in\mathfrak{H}$ die Fourierreihe $\sum a_s e^{i\lambda_s x}$ entspricht, dann schreiben wir $f\sim\sum a_s e^{i\lambda_s x}$ und entsprechend $F\sim\sum a_s e^{i\lambda_s x}$.

Betrachten wir jetzt die Differentialgleichung

$$-u''+q(x)u = \lambda u, \tag{4}$$

wo $-\infty < x < +\infty$, $q(x)$ periodisch mit Periode a stetig und reel und λ eine komplexe Zahl ist. Wir werden die Lösungen $u_\lambda(x)$ der Gleichung (4) untersuchen, welche stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzen, was kurz $u_\lambda\in C^2(-\infty, +\infty)$ geschrieben wird. Die Lösung u_λ wird *stationär* genannt, wenn es eine Konstante M gibt, für welche die Ungleichung $|u_\lambda(x)| < M$ gilt. Im Gegenfall werden wir die Lösung u_λ *nichtstationär* nennen.

Es bezeichne Λ die Menge aller komplexen Zahlen. Mit Λ_E bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen λ, für welche die Gleichung (4) eine stationäre Lösung besitz. Außerdem definieren wir $\Lambda_R = \Lambda-\Lambda_E$. Die Menge Λ_E werden wir *klassisches Spektrum* nennen. Dabei werden die entsprechenden stationären Lösungen u_λ die *klassische Eigenfunktionen* des Operators $Lu = -u''+q(x)u$ genannt.

Wir werden jetzt die folgenden Hilfssätze beweisen:

Hilfssatz 1. *Jede klassische Eigenfunktion ist gleichmäßig fastperiodisch, und ist eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt*

$$u_\lambda(x) = e^{ik(\lambda)x} v_\lambda(x), \tag{5}$$

wo k reel, $v_\lambda(x)$ periodisch mit der Periode a ist.

Hilfssatz 2. *Wenn, $\lambda \in \Lambda_R$, dann hat die Gleichung (4) zwei linear unabhängige Lösungen, welche die Gestalt*

$$u_1(x) = e^{(k+ir)x} v_1(x), \qquad u_2(x) = e^{-(k+ir)x} v_2(x) \tag{6}$$

besitzen, wo $k \neq 0$ reel und v_1, v_2 periodische Funktionen mit der Periode a sind. Wenn $I(\lambda) = 0$, dann ist $r = 0$.

Beweis der beiden Hilfssätze. Es sei λ eine beliebige reelle Zahl und $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ die zwei entsprechenden linear unabhängigen reellen Lösungen der Gleichung (4). Die Periodizität der Funktion $q(x)$ ergibt, daß $\varphi_1(x+a)$ und $\varphi_2(x+a)$ auch Lösungen der Gleichung (4) sind, also ist

$$\begin{aligned} \varphi_1(x+a) &= \alpha_{11}\varphi_1(x) + \alpha_{12}\varphi_2(x), \\ \varphi_2(x+a) &= \alpha_{21}\varphi_1(x) + \alpha_{22}\varphi_2(x), \end{aligned} \tag{7}$$

wo $\alpha_{i,k}$ reell sind. Die Wrońskische Determinante ist für die Gleichung (4) von x unabhängig, also folgt aus (7), daß $\det(\alpha_{ik}) = 1$. Die Gleichung (4) besitzt dann und nur dann eine Lösung $\psi(x)$, welche für alle x die Bedingung

$$\psi(x+a) = \mu\psi(x) \tag{8}$$

erfüllt, wo μ eine passende komplexe Zahl ist, wenn

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\mu & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (\alpha_{11}+\alpha_{22})\mu + 1 = 0 \tag{9}$$

ist. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $\alpha_{11}+\alpha_{22} > 2$. Es existieren zwei linear unabhängige Lösungen welche die Bedingung (8) erfüllen, und die Gestalt

$$\psi(x) = e^{kx}v_1(x), \qquad \psi(x) = e^{-kx}v_2(x)$$

besitzen, wo k reel und v_1, v_2 periodisch mit der Periode a sind.

2. $\alpha_{11}+\alpha_{22} < 2$. Es existieren zwei linear unabhängige Lösungen, welche die Bedingung (8) erfüllen, und die Gestalt

$$\psi(x) = e^{ikx}v_1(x), \qquad \psi(x) = e^{-ikx}v_2(x)$$

besitzen, wo k reel und v_1, v_2 periodisch mit der Periode a sind. Die Funktionen ψ_1 und ψ_2 sind gleichmäßig fastperiodisch, weil sie durch Multiplikation zweier periodischen Funktionen entstanden sind.

3. $\alpha_{11}+\alpha_{22} = 2$. Es existiert wenigstens eine Lösung $\psi(x)$ der Gleichung (4), welche die Bedingung (8) mit $\mu = 1$ erfüllt, also periodisch mit der Periode a ist. Betrachten wir eine zweite Lösung $\tilde\psi(x)$ der Gleichung (4) welche mit $\psi(x)$ linear unabhängig ist. Dann nimmt (7) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \tilde\psi(x+a) &= \tilde\alpha_{11}\tilde\psi(x) + \tilde\alpha_{12}\psi(x), \\ \psi(x+a) &= \psi(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Dabei ist

$$\begin{vmatrix} \tilde\alpha_{11} & \tilde\alpha_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \tilde\alpha_{11} = 1.$$

Wenn also $\tilde\alpha_{12} = 0$, dann ist $\psi(x)$ periodisch mit der Periode a. Wenn aber $\tilde\alpha_{12} \neq 0$ ist, dann ergiebt (10)

$$\tilde\psi(x+na) - \tilde\psi(x) = n\tilde\alpha_{12}\psi(x),$$

also $\tilde\psi(x)$ unbegrenzt ist.

Wir haben also bewiesen, daß es für ein reelles λ zwei sich gegenseitig ausschliessende Möglichkeiten gibt. Entweder $\lambda \in \Lambda_R$ und es existieren zwei Lösungen der Gestalt (6), oder $\lambda \in \Lambda_E$ und alle stationären Lösungen sind fastperiodisch und sind von der Gestalt (5), was den Beweis für reelle λ ergiebt.

Wir müssen noch den Hilfssatz 2 für komplexe λ ($I(\lambda) \neq 0$) beweisen. Wenn λ komplex ist, dann müssen wir komplexwertige linear unabhängige Lösungen φ_1 und φ_2 nehmen, und die Zahlen α_{ik} werden in (7) komplex sein. Es gilt aber wie vorher die Gleichung $\det(\alpha_{ik}) = 1$. Die Gleichung (4) besitzt dann und nur dann die Lösung, welche die Bedingung (8) erfüllt, wenn die Gleichung (9) gegeben ist. Wir werden zeigen, daß

$$(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2 \neq 4 \tag{11}$$

ist. Wenn $(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2 = 4$, dann hat die Gleichung (9) entweder $\mu = 1$, oder $\mu = -1$ als Doppellösung. Also besitzt (4) eine Lösung $\psi(x)$, welche periodisch ist. Genau so ist $L\psi = -\psi'' + q(x)\psi$ eine stetige periodische Funktion. Wenn aber $\vartheta(x)$ und $L\vartheta$ periodisch sind, dann gilt

$$(\vartheta, L\vartheta) = (L\vartheta, \vartheta). \tag{12}$$

Für $\psi(x)$ (12) ergibt $(\bar\lambda - \lambda)\|\psi\| = 0$, was $I(\lambda) \neq 0$ widerspricht. Es gilt also (11) und es sind immer zwei verschiedene Lösungen μ_1 und μ_2 der Gleichung (9) vorhanden, wobei $\mu_1\mu_2 = 1$ ist. Wir können jetzt $\mu_1 = e^{(k+ir)a}$ und $\mu_2 = e^{-(k+ir)a}$ ähnlich wie im Falle $I(\lambda) = 0$ legen. Man kann sich jetzt leicht überzeugen, daß die Gleichung (4) zwei linear unabhängige Lösungen der Gestalt

$$\psi_1(x) = e^{(k+ir)x}v_1(x), \qquad \psi_2(x) = e^{-(k+ir)x}v_2(x) \tag{13}$$

besitzt, wo $v_1(x)$ und $v_2(x)$ periodisch mit der Periode a sind. Dabei ist $k \neq 0$. Wenn nämlich $k = 0$ würde, dann würden die Funktionen (13) klassische Eigenfunktionen sein, was wegen (12) mit der Voraussetzung $I(\lambda) \neq 0$ widerspricht. Damit ist der Beweis beendet.

2. Die wesentliche Selbstadiungiertheit des Operators $-u''+ +q(x)u$. Ein Operator $\mathfrak{B}$, welcher symmetrisch und in $D_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{H}$ erklärt ist, wird *wesentlich selbstadiungiert* genannt wenn $D_{\mathfrak{B}}$ dicht in $\mathfrak{H}$ $(\overline{D_{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{H})$ und die Abschliessung $\overline{\mathfrak{B}}$ des Operators $\mathfrak{B}$ ein selbstadiungierter Operator ist.

Wenn $\mathfrak{B}$ symmetrisch und dicht in $\mathfrak{H}$ erklärt ist, dann werden wir die komplexe Zahl λ einen *regulären Punkt* von $\mathfrak{B}$ nennen, wenn

(14) $$\bar{\Delta}_\lambda = \mathfrak{H},$$

wo $\Delta_\lambda = (\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{I})D_{\mathfrak{B}}$ ist, und

(15) $$\|F\|K \leqslant \|(\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{I})F\|, \quad K > 0,$$

für $F \in D_{\mathfrak{B}}$, wo K eine passende Konstante ist.

Ein symmetrischer, dicht erklärter Operator ist wesentlich selbstadiungiert, wenn er wenigstens einen regulären Punkt besitzt.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein selbstadiungierter oder wesentlich selbstadiungierter Operator, dann werden wir die Menge seiner regulären Punkte mit $R(B)$ bezeichnen. Die Menge $S(\mathfrak{B}) = \Lambda - R(\mathfrak{B})$, wo Λ die komplexe Ebene bedeutet, wird *Spektrum* des Operators $\mathfrak{B}$ genannt.

Jetzt können wir zur Untersuchung des Differentialoperators $Lu = -u'' + q(x)u$ übergehen. Unser Ziel ist nun, mit Hilfe von Lu einen in $\mathfrak{H}$ dicht erklärten wesentlich selbstadiungierten Operator $\mathfrak{L}U$ zu erzeugen. Das Erklärungsgebiet $D_{\mathfrak{L}}$ wollen wir in dieser Weise wählen, daß alle Elemente von $\mathfrak{H}$ welche durch klassische Eigenfunktionen repräsentiert sind, der Menge $D_{\mathfrak{L}}$ angehören. Auf Grund von Hilfssatz 1 können wir das folgend erreichen:

$$D = \{u(x) : u \in (g, f, p),\ u \in c^2(-\infty, \infty),\ Lu \in (g, f, p)\},$$
$$D_{\mathfrak{L}} = \{U : U = (u),\ u \in D\},$$

dabei ist für $U = (u)$ wo $u \in D$, $\mathfrak{L}U = (Lu)$.

Es gilt $T \subset D$, also

(16) $$\bar{D}_{\mathfrak{L}} = \mathfrak{H}.$$

Leicht kann man zeigen, daß $\mathfrak{L}U$ symmetrisch ist. Nämlich wenn $U = (u)$, $V = (v)$ und $u, v \in D$, dann wird

$$(\mathfrak{L}U, V) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} Lu\bar{v}\,dx$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(-[u'\bar{v}]_{-T}^{T} + [u\bar{v}']_{-T}^{T}\right) + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u\overline{Lv}\,dx.$$

Aber $u'' = -Lu + qu$, also folgt aus $Lu \in (g, f, p)$ und $qu \in (g, f, p)$, daß $u'' \in (g, f, p)$. Daraus erhalten wir, daß $u''(x)$ und $u'(x)$ gleichmäßig stetig sind. Der Satz von Bochner (siehe [16], S. 6) besagt, daß $u' \in (g, f, p)$ und gleichfalls $v' \in (g, f, p)$. Daraus erhalten wir

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(-[u'\bar{v}]_{-T}^{T} + [u\bar{v}']_{-T}^{T}\right) = 0$$

und

$$(\mathfrak{L}U, V) = (U, \mathfrak{L}V).$$

Ähnliche Untersuchungen ergeben für $q = \inf_x q(x)$ die Ungleichung

(17) $$(\mathfrak{L}U, U) \geqslant q\|U\|^2 \quad \text{für} \quad U \in D_{\mathfrak{L}}.$$

Wir beweisen den folgenden

HILFSSATZ 3. *Wenn $\lambda \in \Lambda_R$, dann für jede Funktion $f(x) \in (g, f, p)$ existiert die Funktion $u(x) \in D$, so daß $(L - \lambda I)u = f$. Also*

$$(L - \lambda I)D = (g, f, p).$$

Beweis. Aus Hilfssatz 2 folgt, daß für $\lambda \in \Lambda_R$ zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung $Lu - \lambda u = 0$ existieren, welche folgender Gestalt sind

$$\psi_\lambda^{(1)}(x) = e^{(k+i\tau)x} v_\lambda^{(1)}(x), \qquad \psi_\lambda^{(2)}(x) = e^{-(k+i\tau)x} v_\lambda^{(2)}(x),$$

wo $k > 0$, τ reell und $v_\lambda^{(1)}(x)$, $v_\lambda^{(2)}(x)$ periodisch sind.

Es sei

$$H(x, s, \lambda) = e^{-(k+i\tau)|x-s|}\Phi(x, s, \lambda),$$

wo

$$\Phi(x, S, \lambda) = \begin{cases} v_\lambda^{(1)}(x)v_\lambda^{(2)}(s) & \text{für} \quad x \leqslant s, \\ v_\lambda^{(1)}(s)v_\lambda^{(2)}(x) & \text{für} \quad s < x, \end{cases}$$

und k ist als positiv angenommen

Die Funktionen $v_\lambda^{(i)}(x)$ sind so gewählt, daß $H(x, s, \lambda)$ für $x = s$ die charakteristische Unstetigkeit der Greenschen Funktion besitzt.

Wir werden zeigen, daß die gesuchte Funktion $u(x)$ folgender Gestalt ist:

(18) $$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x, s, \lambda) f(s)\,ds.$$

Unmittelbar aus der Definition der Funktion $H(x, s, \lambda)$ folgt, daß $(L - \lambda I) \cdot u = f$ ist. Weiter haben wir

(19) $$u(x + h_n) = v^{(2)}(x + h_n) \int_{-\infty}^{x} e^{-(k+i\tau)|x-t|} v^{(1)}(t + h_n) f(t + h_n)\,dt +$$
$$+ v^{(1)}(x + h_n) \int_{x}^{\infty} e^{-(k+i\tau)|x-t|} v^{(2)}(t + h_n) f(t + h_n)\,dt.$$

Aus der Fastperiodizität von $v^{(1)}(x)$, $v^{(2)}(x)$, $f(x)$ und (19) folgt, daß die Folge h_n eine Unterfolge h_{i_n} besitzt, für welche die Funktionenfolge $u(x+h_{i_n})$ gleichmäßig konvergiert. Das ist mit $u(x)\in(g,f,p)$ gleichbedeutend. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Wir werden jetzt den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 4. *Wenn $f(x)$ begrenzt ist, dann existiert das Integral*

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x,s,\lambda)f(s)\,ds$$

für jedes x, und gilt die Ungleichung

$$\|u\| \leqslant \frac{2N(\lambda)}{k}\|f\|, \tag{20}$$

wo $N(\lambda) = \sup\limits_{x,y}|\Phi(x,y,\lambda)|$.

Für den Beweis der Ungleichung (20) bemerken wir, daß

$$|u(x)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,s,\lambda)f(s)H(x,t,\lambda)f(t)\,ds\,dt\right|$$

$$\leqslant N^2(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(x-s)}|f(s)|\,e^{-k|x-t|}|f(t)|\,ds\,dt$$

$$= N^2(\lambda)\varepsilon(x,T)+N^2(\lambda)\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{-\frac{k}{2}(|x-s|+|x-t|)}|f(s)|\,e^{-\frac{k}{2}(|x-s|-|x+t|)}|f(t)|\,ds\,dt,$$

wo $N(\lambda)$ eine passende positive Zahl ist und $\varepsilon(x,T)$ wenn $T\to\infty$ gegen Null strebt. Es sei

$$\eta(T) = \sup_{-T+a(T)\leqslant x\leqslant T-a(T)}|\varepsilon(x,T)|,$$

wo $a(T)>0$, und $\lim\limits_{T\to\infty} T/a(T)=\infty$, $\lim\limits_{T\to\infty} a(T)=\infty$ ist. Es gilt

$$\lim_{T\to\infty}\eta(T) = 0. \tag{21}$$

Wir haben weiter

$$|u(x)|^2 \leqslant N^2\varepsilon(x,T)+\frac{N^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{-k(|x-s|+|x-t|)}\left(|f(s)|^2+|f(t)|^2\right)ds\,dt$$

$$= N^2\varepsilon(x,T)+N^2\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{-k(|x-s|+|x-t|)}|f(s)|^2\,ds\,dt.$$

Es gilt aber für $R>0$ die folgende Ungleichung:

$$\int_{-R}^{R} e^{-k|x-t|}\,dt \leqslant \frac{2}{k}. \tag{22}$$

Also

$$|u(x)|^2 \leqslant N^2\varepsilon(x,T)+\frac{2N^2}{k}\int_{-T}^{T} e^{-k|x-s|}|f(s)|^2\,ds \qquad (-T\leqslant x\leqslant T).$$

Nach der Integration der letzten Ungleichung und nach der Anwendung von (22) bekommen wir schließlich:

$$\int_{-T+a(T)}^{T-a(T)} |u(x)|^2\,dx \leqslant 2N^2\big(T-a(T)\big)\,\eta(T)+\left(\frac{2}{k}\right)^2 N^2\int_{-T}^{T}|f(s)|^2\,ds. \tag{23}$$

Es gilt aber

$$\|u\|^2 = \overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2\big(T-a(T)\big)}\int_{-T+a(T)}^{T-a(T)}|u(x)|^2\,dx \tag{24}$$

und

$$\|f\|^2 = \overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2\big(T-a(T)\big)}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx, \tag{25}$$

woraus die Ungleichung (20) unmittelbar folgt.

Bemerken wir jetzt, daß die Menge Λ_R nicht leer ist. Aus (17) erhalten wir nämlich, daß mit Ausnahme der Halbgerade $\langle q,+\infty)$ die ganze Ebene Λ dem Λ_R angehört. Die Hilfssätze 3 und 4 ergeben also den folgenden.

Satz 1. *Der in $D_{\mathfrak{L}}$ erklärter Operator $\mathfrak{L}U$ ist wesentlich selbstadiungiert, und jede Zahl λ, welche der Menge Λ_R angehört, stellt einen regulären Punkt des Operators $\mathfrak{L}$ dar.*

Es sei $\mathfrak{A}$ der in $\mathfrak{H}$ selbstadiungierte Operator, welcher durch Abschliessung des Operators $\mathfrak{L}$ entstanden ist ($\mathfrak{A}=\bar{\mathfrak{L}}$). Wir formulieren den

Satz 2. *Das Spektrum $S(\mathfrak{A})$ des Operators $\mathfrak{A}$ ist klassisch, das heißt $S(\mathfrak{A})=\Lambda_E$. Dabei sind alle Punkte der Menge $S(\mathfrak{A})$ Eigenwerte des Operators $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Aus Satz 1 folgt, daß $S(\mathfrak{A})\subset\Lambda_E$. Wenn aber $\lambda\in\Lambda_E$ und $u_\lambda(x)$ die entsprechende klassische Eigenfunktion ist, dann haben wir

$$u_\lambda\in D,\qquad (u_\lambda) = U_\lambda\in D_{\mathfrak{L}}\subset D_{\mathfrak{A}}$$

und

$$\mathfrak{A}U = \mathfrak{L}U_\lambda = (Lu_\lambda) = \lambda(u_\lambda) = \lambda\mathfrak{J}U_\lambda.$$

Also ist λ ein Eigenwert des Operators $\mathfrak{A}$ und $\lambda \in S(\mathfrak{A})$. Damit ist der Beweis beendet.

Wir müssen noch feststellen, daß alle Eigenelemente des Operators $\mathfrak{A}$ klassisch sind. Das heißt, sie lassen sich durch Linearkombinationen von klassischen Eigenfunktionen der Gestalt $u(x) = e^{ikx}v(x)$, wo k reell und $v(x)$ periodisch ist, repräsentieren. Zuerst werden wir den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 5. *$F \in D_{\mathfrak{A}}$ dann und nur dann, wenn*

$$F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_s e^{i\lambda_s x} \quad \textit{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |a_s|^2 \lambda_s^4 < +\infty.$$

Weiter gilt die folgende Gleichung:

$$(\mathfrak{A} - \lambda J)F \sim -\sum_{-\infty}^{\infty} a_s(\lambda_s^2 + \lambda) e^{i\lambda_s x} + \sum_{l,s=-\infty}^{\infty} c_l a_s e^{i\left(n_l \frac{2\pi}{a} + \lambda_s\right)x}. \tag{26}$$

Dabei ist $q(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_l e^{i n_l \frac{2\pi}{a} x}$ angenommen.

Beweis. Betrachten wir den Operator $\mathfrak{L}^0 U = \mathfrak{L}U - q(x)U = (-u'')$, wo $(u) = U$, wobei $D_{\mathfrak{L}^0} = D_{\mathfrak{L}}$. Der Operator $\mathfrak{L}^0$ ist wesentlich selbstadjungiert und aus der Tatsache, daß $q(x)$ begrenzt ist, folgt daß $D_{\overline{\mathfrak{L}}^0} = D_{\mathfrak{A}}$. Es genügt also den Hilfssatz für den Operator $\mathfrak{A}^0 = \overline{\mathfrak{L}}^0$ zu beweisen. Den Operator $\mathfrak{A}^0$ kann man noch anderes definieren. Es sei $\mathfrak{L}_1^0 \subset \mathfrak{L}^0$ ein Operator mit Erklärungsmenge

$$D_{\mathfrak{L}_1^0} = \{U : U = (u),\ u \in T\},$$

wo T die Menge aller trigonometrischen Polynomen bedeutet. Offenbar ist die Menge $(\mathfrak{L}_1^0 - \lambda\mathfrak{J})D_{\mathfrak{L}_1^0}$ [1] in $\mathfrak{H}$ dicht. Daraus folgt unmittelbar die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{L}}_1^0 = \mathfrak{A}^0. \tag{27}$$

Leicht kann man zeigen, daß aus $F \in D_{\mathfrak{A}^0}$ und $F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_s e^{i\lambda_s x}$ die Ungleichung $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_s|^2 \lambda_s^4 < +\infty$ folgt. Wenn aber $F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_s e^{i\lambda_s x}$ und $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_s|^2 \lambda_s^4 < +\infty$, dann offenbar $F \in D_{\mathfrak{A}^0}$ und $(\mathfrak{A}^0 - \lambda\mathfrak{J})F \sim -\sum_{-\infty}^{\infty} (a_s \lambda_s^2 + \lambda) e^{i\lambda_s x}$, was den Beweis beendet.

Nun können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Wenn $F \in D_{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}F = \lambda F$, dann $F \in D_L$ und F kann durch eine klassische Eigenfunktion repräsentiert werden.*

[1] Wo $I(\lambda) \neq 0$, $\lambda < 0$, oder $I(\lambda) \neq 0$ angenommen ist.

Beweis. Es sei $F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_s e^{i\lambda_s x}$. Dann ergibt (26):

$$\sum_{s,l} c_l a_s e^{i\left(n_l \frac{2\pi}{a} + \lambda_s\right)x} - \sum_s (a_s \lambda_s^2 + \lambda) e^{i\lambda_s x} = 0. \tag{29}$$

Bezeichnen wir jetzt durch Ω die Zahlenmenge

$$\left\{\ldots, n_l \frac{2\pi}{a} + \lambda_s, \ldots, \lambda_s, \ldots\right\} \quad (s, l = 0,\ 1, \ldots).$$

Weiter sei Ω_i $(i = 0, \pm 1, \ldots)$ die Zahlenmenge, welche aus allen Zahlen der Gestalt

$$n_l \frac{2\pi}{a} + \lambda_s = \lambda_i$$

besteht. Die Menge $\Omega - \sum_i \Omega_i$ (wenn sie nicht leer ist) zerteilen wir auf Untermengen ω_j. Jede Menge ω_j besteht aus allen Zahlen

$$n_l \frac{2\pi}{a} + \lambda_s,$$

welche untereinander gleich sind.

Jetzt kann die Gleichung (29) durch das folgende gleichbedeutende Gleichungssystem ersetzt werden:

$$\sum_{n_l \frac{2\pi}{a} + \lambda_s \in \Omega_i} c_l a_s - a_i \lambda_i^2 - \lambda = 0 \quad (i = 0, \pm 1, \ldots), \tag{30}$$

$$\sum_{n_l \frac{2\pi}{a} + \lambda_s \in \omega_j} c_l a_s = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Betrachten wir jetzt die Menge $\Gamma = \{\ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$ und zerteilen wir sie in Teile $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ Dabei gehören zwei Zahlen $\lambda_{s'}, \lambda_{s''}$ dann und nur dann zu einem Teil Γ_j, wenn $(\lambda_{s'} - \lambda_{s''})(2\pi/a)$ ganzzählig ist. Es sei $\Gamma_j = \{\ldots, \lambda_{j_n}, \ldots\}$ und

$$F_j \sim \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{j_n} e^{i\lambda_{j_n} x}.$$

Leicht kann man einsehen, daß F_j Eigenelemente des Operators $\mathfrak{A}$ sind. In der Tat, aus der Definition von Γ_j folgt, daß die Bedingungen (30) und (31) für F_j sich von den entsprechenden Bedingungen für F nicht unterscheiden. Der einzige Unterschied beruht nur darauf, daß die Bedingungen für F_j weniger Gleichungen enthalten.

Die Definition von F_j ergibt, daß man F_j in folgender Gestalt schreiben kann:

$$F_j \sim e^{i\gamma x} \sum_{-\infty}^{\infty} b_s e^{is\frac{2\pi}{a}x} = e^{i\gamma x} v(x),$$

wo $v(x)$ eine periodische lokal kwadratisch integrierbare Funktion ist. Wir werden zeigen, daß $v(x) \epsilon C^2(-\infty, +\infty)$ und $Le^{i\gamma x}v(x) = \lambda e^{i\gamma x}v(x)$ ist. In der Tat, auf Grund von Hilfssatz 4, kann gezeigt werden, daß die Resolvente des Operators $\mathfrak{A}$ die folgende Gestalt besitzt ([2]):

$$R_\mu F_j = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} H(x, s, \mu) e^{i\gamma s} v(s) ds\Big).$$

Daraus aber und aus der Tatsache, daß für $F_j = \big(e^{i\gamma x}v(x)\big)$ die Gleichung $\mathfrak{A}F_j = \lambda F_j$ stattfindet, folgt die Gleichung

$$e^{i\gamma x}v(x) = (\lambda - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} H(x, s, \mu) e^{i\gamma s} v(s) ds.$$

In der Tat, gilt für die Funktion

$$\psi(x) = (\lambda - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} H(x, s, \mu) e^{i\gamma s} v(s) ds,$$

$F_j = (\psi)$ und $\psi \epsilon (g, f, p)$. Dasselbe gilt aber für

$$\varphi(x) = (\lambda - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} H(x, s, \mu) \psi(s) ds,$$

was die Gleichungen $\varphi = \psi$ und $\psi(x) = e^{i\gamma x}v(x)$ ergibt. Also $e^{i\gamma x}v(x)$ ist eine klassische Eigenfunktion des Operators L. Es gibt aber höchstens 2 linear unabhängige klassische Eigenfunktionen. Damit ist der Beweis des Satzes 3 beendet.

Auf Grund von Satz 1, 2, 3 kann bewiesen werden (siehe Satz 11), daß jede Funktion der Klasse (B^2, f, p) in eine Fourier Reihe der klassischen Eigenfunktionen des Operators $Lu = -u'' + q(x)u$ $(q(x+a) = q(x))$ entwickelt werden kann. Insbesondere werden im Falle, wenn $q(x) = 0$ ist, die bekannten Sätze von Besikovitch über die Parsevalgleichung bewiesen und wir bekommen auch Riesz-Fischer Satz für die (B^2, f, p) Funktionen.

3. Spektrum Untersuchung. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir einige Sätze über die Abhängigkeit des Spektrums $S(\mathfrak{A})$ von $q(x)$ angeben. Auf Grund von Satz 2 werden diese Sätze auch das klassische Spektrum des Operators $Lu = -u'' + q(x)u$ betreffen.

([2]) Siehe den Beweis des Hilfssatzes 11.

Es sei E_μ die Spektralfunktion des Operators $\mathfrak{A}$, das heißt

$$\mathfrak{A}F = \int_{\gamma}^{\infty} \mu dE_\mu F.$$

Wir sagen, daß $\lambda \epsilon S(\mathfrak{A})$ ein *Punkt des wesentlichen Spektrums* ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ der Raum $\mathfrak{H}_\varepsilon = (E_{\lambda+\varepsilon} - E_{\lambda-\varepsilon})\mathfrak{H}$ unendlich dimensional ist. Wenn $S(\mathfrak{A})$ aus lauter Punkten des wesentlichen Spektrums besteht, dann sagen wir, daß $S(\mathfrak{A})$ *wesentlich* ist. Mit $C(\mathfrak{A})$ werden wir Punkte von $S(\mathfrak{A})$ bezeichnen, welche dem wesentlichen Spektrum angehören.

Wir werden jetzt zwei bekannte Hilfssätze angeben.

HILFSSATZ 6. *Die Ungleichung*

$$S(\mathfrak{A}) \cdot (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0$$

gilt dann und nur dann, wenn ein Element $X \epsilon D_{\mathfrak{A}}$, $X \neq 0$, *existiert, so daß die Ungleichung*

$$\|(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I})X\| < \varepsilon\|x\|$$

stattfindet.

HILFSSATZ 7. $\lambda \subset C(\mathfrak{A})$ *dann und nur dann, wenn eine Folge von Elementen* Y_n *existiert, welche folgende Eigenschaften besitzt:* $Y_n \epsilon D_{\mathfrak{A}}$, *die Menge* $Y_1, Y_2, \ldots$ *ist nicht kompakt*, $\|Y_n\| < N$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *wo* N *konstant ist, und*

$$\lim_{n\to\infty} \|(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I})Y_n\| = 0.$$

Wir werden jetzt den folgenden Satz beweisen:

SATZ 4. *Das Spektrum* $S(\mathfrak{A})$ *ist wesentlich. Die Menge* $S(\mathfrak{A})$ *besteht aus lauter Häufungspunkten.*

Beweis. Es sei $\lambda \epsilon S(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}U = \lambda U$ und $U = \big(u(x)\big)$, wo $u(x) = e^{irx}v(x)$ eine klassische Eigenfunktion ist. Betrachten wir jetzt $Y_n = \big(e^{iC_n x}u(x)\big)$, wo C_n $(C_n \neq C_m,\ n \neq m)$ eine nach Null konvergente reelle Zahlenfolge bedeutet. Die Folge Y_n erfüllt alle Bedingungen des Hilfssatzes 7. Wir haben nämlich

$$(Y_n, Y_m) = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ \|U\| & (n = m), \end{cases}$$

wenn n, m hinreichend groß, und

$$Le^{iC_n x}u(x) - \lambda e^{iC_n x}u(x) = -c_n^2 e^{iC_n x}u(x) + 2ic_n^2 e^{iC_n x}u'(x),$$

was die Tatsache $\|(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I})Y_n\| \to 0$ ergibt. $S(\mathfrak{A})$ ist also wesentlich. Die Tatsache, daß $S(\mathfrak{A})$ nur aus Häufungspunkten besteht, folgt jetzt offenbar aus Satz 3. Damit ist der Beweis beendet.

Es seien jetzt M und N zwei reelle Zahlenmengen. Wenn λ reell ist, dann werden wir mit $d(\lambda, M)$ die Entfernung zwischen λ und M bezeichnen. Im folgendem werden die Bezeichnungen

$$\delta(M, N) = \sup_{\lambda \epsilon M} d(\lambda, N), \qquad \varrho(M, N) = \max[\delta(M, N), \delta(N, M)]$$

benutzt.

Wir werden noch die Bezeichnung

$$\varrho_{\langle\mu,\nu\rangle}(M, N) = \max[\delta(\langle\mu, \nu\rangle \cdot M, N), \delta(\langle\mu, \nu\rangle \cdot N, M)] \text{ [3]}$$

einführen. Wir werden $\varrho_{\langle\mu,\nu\rangle}(M, N)$ die *relative Entfernung* zweier Mengen M, N nennen.

Bezeichnen wir jetzt mit $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ die in $\mathfrak{H}$ wesentlich selbstadiungierten Operatoren, welche durch die Differentialoperatoren $L^{(1)}u = -u'' + q^{(1)}(x)u$ und $L^{(2)}u = -u'' + q^{(2)}(x)u$ hervorgerufen sind. Dabei sind die Funktionen $q^{(1)}(x)$ und $q^{(2)}(x)$ periodisch mit der Periode a. Es gilt der folgende Perturbationssatz:

Satz 5. *Es gilt die Ungleichung*

$$\varrho\big(S(\mathfrak{A}^{(1)}), S(\mathfrak{A}^{(2)})\big) \leqslant \sup_x |q^{(1)}(x) - q^{(2)}(x)|. \tag{32}$$

Beweis. Wir zeigen jetzt, daß die folgende Ungleichung gilt:

$$\delta[S(\mathfrak{A}^{(1)}), S(\mathfrak{A}^{(2)})] \leqslant \sup_x |q^{(1)}(x) - q^{(2)}(x)|. \tag{33}$$

Dazu genügt es zu zeigen, daß für $\lambda \epsilon S(\mathfrak{A}^{(1)})$ im Abschnitt $(\lambda - \sup_x |q^{(1)}_{(x)} - q^{(2)}_{(x)}|, \lambda + \sup_x |q^{(1)}_{(x)} - q^{(2)}_{(x)}|)$ sich wenigstens ein Punkt der Menge $S(\mathfrak{A}^{(2)})$ befindet. Aus Satz 4 folgt, daß für jedes $\lambda \epsilon S(\mathfrak{A}^{(1)})$ ein Element $X \epsilon D_{\mathfrak{A}^{(1)}} = D_{\mathfrak{A}^{(2)}}$ existiert, so daß $\mathfrak{A}^{(1)}X = \lambda X$ ist. Also

$$\|(\mathfrak{A}^{(2)} - \lambda\mathfrak{J})\| \leqslant \sup_x |q^{(1)}(x) - q^{(2)}(x)|.$$

Die letzte Ungleichung und Hilfssatz 6 ergeben (33).

Ganz ähnlich kann man zeigen, daß

$$\delta[S(\mathfrak{A}^{(1)}), S(\mathfrak{A}^{(2)})] \leqslant \sup_x |q^{(1)}(x) - q^{(2)}(x)|.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Wir werden jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 6. *Wenn*

$$\int_0^a |q^{(i)}(x)|^2 dx \leqslant N^2,$$

[3] $\langle\mu, \nu\rangle \cdot M$ bedeutet die Menge aller Zahlen $\lambda \epsilon M$, welche die Ungleichung $\mu < \lambda < \nu$ erfüllen.

wo N eine konstante, $\mu < 0$, $\mu < \nu$ und $\langle\mu, \nu\rangle \cdot S(\mathfrak{A}^{(i)}) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ ist, dann gilt die Ungleichung

$$\varrho_{\langle\mu,\nu\rangle}\big(S(\mathfrak{A}^{(1)}), S(\mathfrak{A}^{(2)})\big) \leqslant M\left(\frac{1}{a}\int_0^a |q^{(1)}(x) - q^{(2)}(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{34}$$

wo

$$M = \frac{2\sqrt{a}}{1 - e^{-\sqrt{|\mu|}a}}(N + \sqrt{a}|\nu - \mu|)$$

ist.

Beweis. Wir werden zuerst einige Abschätzungen der klassischen Eigenfunktionen angeben. Wenn $\lambda \epsilon S(\mathfrak{A})$, dann existiert die klassische Eigenfunktion $u(x) = e^{itx}v(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$-u'' - \mu u = -q(x)u + (\lambda - \mu)u. \tag{35}$$

Für $\mu < 0$ besitzt der Resolventenkern des Operators $L^0 u = -u''$ die Gestalt $R(x, s, \mu) = e^{-\sqrt{|\mu|}|x-s|}$. Also (35) ergibt

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{|\mu|}|x-s|} q(s)u(s)ds + (\lambda - \mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{|\mu|}|x-s|} u(s)ds$$

und es ist

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{|\mu|}|x-s|} |q(s)||v(s)|ds + |\lambda - \mu| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{|\mu|}|x-s|} |v(s)|ds. \tag{36}$$

Bezeichnen wir jetzt mit σ_1 und σ_2 die Integrale, welche in (36) auftreten. Wir haben

$$\sigma_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{x+a\nu}^{x+a(\nu+1)} e^{-\sqrt{|\mu|}(s-x)} |q(s)||v(s)|ds + \sum_{\nu=0}^{-\infty} \int_{x+a(\nu-1)}^{x+a\nu} e^{-\sqrt{|\mu|}(x-s)} |q(s)||v(s)|ds$$

$$< \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\sqrt{|\mu|}} + \sum_{\nu=0}^{-\infty} e^{+\sqrt{|\mu|}}\Big)\Big(\int_0^a |q(s)|^2 ds\Big)^{1/2}\Big(\int_0^a |v(s)|^2 ds\Big)^{1/2},$$

was ergibt die Ungleichung

$$\sigma_1 \leqslant \frac{2N}{1 - e^{-\sqrt{|\mu|}a}}\Big(\int_0^a |v(s)|^2 ds\Big)^{1/2}. \tag{37}$$

Für σ_2 erhalten wir auf ähnliche Weise

$$\sigma_2 \leqslant \frac{2|\lambda - \mu|}{s - e^{-\sqrt{|\mu|}a}}\Big(\int_0^a |v(s)|^2 ds\Big)^{1/2}. \tag{38}$$

Schließlich erhalten wir aus (36), (37) und (38):

$$|u(x)| \leqslant \frac{2}{1-e^{-\sqrt{|\mu|}a}} (N+\sqrt{a}|\lambda-\mu|) \Big(\int_0^a |v(s)|^2 ds\Big)^{1/2},$$

was bei der Voraussetzung

$$\|u\|^2 = \frac{1}{a}\int_0^a |v(s)|^2 ds = 1$$

und $\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu$ gibt die folgende Ungleichung:

$$|u(x)| \leqslant \frac{2\sqrt{a}}{1-e^{-\sqrt{|\mu|}a}} (N+\sqrt{a}|\nu-\mu|) = M. \tag{39}$$

Es sei jetzt $\lambda \epsilon \langle\mu, \nu\rangle \cdot S(\mathfrak{A}^{(i)})$ $(i = 1, 2)$. Mit $u_\lambda(x)$, $\|u_\lambda(x)\| = 1$ werden wir die entsprechende klassische Eigenfunktion des Operators $\mathfrak{A}^{(i)}$ bezeichnen. Dann für $X = (u_\lambda(x))$ gilt

$$\|(\mathfrak{A}^{(j)} - \lambda\mathfrak{I}) X\| \leqslant \|(q^{(1)} - q^{(2)}) u_\lambda\|,$$

wo $i+j = 3$ $(i, j = 1, 2)$ angenommen ist. Aus (39) folgt

$$\|(\mathfrak{A}^{(j)} - \lambda\mathfrak{I}) X\| \leqslant M\|q^{(1)} - q^{(2)}\| \, \|X\|.$$

Die letzte Ungleichung und Hilfssatz 6 ergeben

$$\delta\big(\langle\mu, \nu\rangle S(\mathfrak{A}^{(i)}), S(\mathfrak{A}^{(j)})\big) \leqslant M \Big(\frac{1}{a}\int_0^a |q^{(1)} - q^{(2)}|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Aus der Beweisführung folgt, daß man vielleicht für spezielle Klassen von $q(x)$ einige tiefere Perturbationssätze gewinnen kann. Man muß nur dazu feinere Abschätzungen der klassischen Eigenfunktionen zur Verfügung haben.

Es bezeichne jetzt $\mathfrak{A}^{(n)}$ den in $\mathfrak{H}$ selbstadiungierten Operator, welcher durch $L^{(n)}u = -u'' + q^{(n)}(x)u$ hervorgerufen ist, wo $q^{(n)}(x)$ eine stetige, periodische Funktion mit Periode a_n bedeutet. Es gilt der folgende Satz:

Satz 7. *Wenn $\varkappa(x)$ eine gegebene Funktion ist, welche die Bedingung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varkappa(x)|^2 dx < +\infty$$

erfült, und für $0 < x < a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Ungleichung

$$|q^{(n)}(x)| < |\varkappa(x)| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gilt, dann wenn $\lim a_n = +\infty$ ist, wird die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \delta\big(\langle 0, +\infty), S(\mathfrak{A}^{(n)})\big) = 0 \tag{40}$$

stattfinden.

Physikalisch stellt der Grenzübergang $a_n \to \infty$, die Verdampfung des Kristalls dar. Satz 7 gibt eine teilweise Begründung der in der Quantentheorie bekannten Tatsache, daß wenn der Kristall in Gaszustand übergeht, sein energetisches Spektrum gegen das Spektrum des Einzelatoms strebt. (40) besagt nämlich, daß der positive Teil des Spektrums $S(\mathfrak{A}^{(n)})$ bei Grenzübergang $a_n \to \infty$ auf die ganze Halbgerade $\langle 0, +\infty)$ übergeht. Die Halbgerade gehört aber dem Energiespektrum des Einzelatoms an.

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}^0$ der in $\mathfrak{H}$ wesentlich selbstadiungierter Operator, welcher durch den Operator $Lu = -u''$ erzeugt ist. Dann ist $S(\mathfrak{A}^0) = \langle 0, +\infty)$ und für jedes $\lambda \epsilon S(\mathfrak{A}^0)$ existieren zwei klassische linear unabhängige normierte Eigenfunktionen, welche $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ und $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ gleich sind. Definieren wir jetzt

$$X = (e^{i\sqrt{\lambda}x}) \epsilon D_{\mathfrak{A}^0} = D_{\mathfrak{A}^{(n)}}, \qquad \|X\| = 1.$$

Dann ist

$$\|(\mathfrak{A}^{(n)} - \lambda\mathfrak{I}X)\| \leqslant \|q^{(n)}\| \cdot \|X\|$$

und aus Hilfssatz 6 folgt

$$\delta\big(\langle 0, \infty), S(\mathfrak{A}^{(n)})\big) \leqslant \Big(\frac{1}{a_n}\int_0^{a_n} |q^{(n)}(x)|^2\Big)^{1/2} < \Big(\frac{1}{a_n}\int_0^{a_n} |\varkappa(x)|^2 dx\Big)^{1/2}, \tag{41}$$

was den Beweis ergibt.

Wir werden noch eine einfache Folgerung der Ungleichung (41) angeben. Es bezeichne $\mathfrak{A}$ den wesentlich selbstadiungierten Operator, welcher aus $Lu = u'' + q(x)u$ entstanden ist, wo $q(x)$ periodisch mit der Periode a ist. Es sei weiter γ der erste Spektrumpunkt, also $(-\infty, \gamma) \cdot S(\mathfrak{A}) = 0$, aber für jedes $\varepsilon > 0$ $(-\infty, \gamma+\varepsilon) \cdot S(\mathfrak{A}) \neq 0$. Im allgemeinen enthält die Halbgerade $\langle\gamma, +\infty)$ eine unendliche Folge von offenen Abschnitte $J_1, J_2, \ldots$, welche die Bedingung $J_n S(A) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ erfüllt. In der Quantentheorie der Kristalle ist es wichtig die Länge J_n der Abschnitte J_n zu kennen. Es gibt eine Reihe von Arbeiten [8], [9], [10], [12], [13], welche die Abschätzungen der Zahlen J_n angeben. Der Satz 8, welcher unmittelbar aus der Ungleichung

$$\delta\big(\langle 0, +\infty), S(\mathfrak{A})\big) \leqslant \Big(\frac{1}{a}\int_0^a |q(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

folgt, gibt einige Abschätzungen von J_n an. Diese Abschätzungen sind ähnlich wie die, welche in den Arbeiten [8], [9], [10], [12] und [13] angegeben wurden.

Satz 8. *Wenn ein Abschnitt J_n $(n = 1, 2, \ldots)$ der Halbgeraden*

$$\left\langle -\left(\frac{1}{a}\int_0^a |q(x)|^2 dx\right)^{1/2}, +\infty\right\rangle$$

angehört, dann ist

$$|J_n| \leqslant 2\left(\frac{1}{a}\int_0^a |q(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

II. Der Operator $-\Delta u + q(x_1, x_2, x_3)u$

Im vorliegenden Abschnitt werden wir den Operator $Lu = -\Delta u + q(x_1, x_2, x_3)u$ untersuchen. Wir werden voraussetzen, daß $q(x)$ dreifach periodisch ist, daß heißt die Identität

$$q(x_1 + ka_1 x_2 + la_2 x_3 + ma_3) = q(x_1, x_2, x_3)$$

erfüllt, wo k, l, m beliebige ganze Zahlen sind. Trotzdem wird $q(x)$ als stetig angenommen.

1. Hilfsbemerkungen. Wir werden zuerst kurz die für uns wichtigen Eigenschaften der gleichmäßig fastperiodischen Funktionen im dreidimensionalen Euklidischen Raume E angeben.

Eine Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ ist *gleichmäßig fastperiodisch*, kurz $f \in (g, f, p)$, wenn sie sich gleichmäßig in E mit trigonometrischen Polynomen der Gestalt $\sum A_s e^{i(\lambda^{(s)}, x)}$ [4] approximieren läßt. Die allgemeine Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen (siehe [17], [18]) ergibt die folgende Eigenschaften:

a. Die stetige Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ ist dann und nur dann gleichmäßig fastperiodisch, wenn für jede Punktfolge $h_n = (h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)})$ die Funktionenfolge $f(x_1 + h_1^{(n)}, x_2 + h_2^{(n)}, x_3 + h_3^{(n)}) = f(x + h_n)$ eine gleichmäßig konvergente Unterfolge besitzt.

b. Es sei G_n eine beliebige Folge von begrenzten und in Lebesgueschen Sinne meßbaren Mengen, für welche gilt

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n, \quad \mu(G_n) \neq 0, \quad G_n \subset G_{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(G_n - G_n^x)}{\mu(G_n)} = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in E.$$

[4] $(\lambda^{(s)}, x) = \lambda_1^{(s)} x_1 + \lambda_2^{(s)} x_2 + \lambda_3^{(3)} x_3$.

Dabei ist $G_n^x = T_x(G_n)$, wo T_x die Transformation $T_x(s) = s + x$ des drei dimensionalen Raumes E bedeutet.

Dann existiert für jede Funktion $f \in (g, f, p)$ der Mittelwert

$$M(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu(G_n)} \int_{G_n} f(x)\, dx$$

und ist von der Folge G_n unabhängig.

In der Menge der (g, f, p) Funktionen führen wir die Norm

$$\|f\|^2 = M(|f|^2) \tag{42}$$

ein.

Mit (B^2, f, p) wird die Funktionenmenge bezeichnet, welche durch Abschließung der Menge (g, f, p) in der Norm (42) entsteht. Den entsprechenden nichtseparablen Hilbertschen Raum mit dem skalaren Produkt

$$(F, G) = M(f \cdot \bar{g}),$$

wo $F = (f)$ und $G = (g)$ ist, werden wir wie vorher durch $\mathfrak{H}$ bezeichnen.

Wir werden jetzt einige Eigenschaften des Resolventenkernes $H(x, y, \lambda)$ des Operators $Lu = -\Delta u + q(x)u$ angeben.

1. *Die Gruppeneigenschaft.* Es ist bekannt, daß für $x \neq y$ die Funktion $H(x, y, \lambda)$ die Gleichung

$$(L - \lambda I)_x H(x, y, \lambda) = 0 \text{ [5]}$$

erfüllt. Die Periodizität der Funktion $q(x)$ ergibt für $x + a \neq y$

$$(L - \lambda I)_x \cdot H(x + a, y, \lambda) = 0,$$

wo $a = (ka_1, La_2, ma_3)$ angenommen ist.

Die Funktion $\varkappa(x) = H(x + a, y, \lambda)$, wo y, λ als festgehaltene Parameter betrachtet sind, besitzt im Punkte $x = y - a$ die charakteristische Singularität der Greenschen Funktion, erfüllt die Gleichung $(L - \lambda I)\varkappa(x) = 0$ und ist im E quadratisch integrierbar. Aus der Eindeutigkeit der Greenschen Funktion folgt also die folgende Gleichung:

$$H(x + a, y) = H(x, y - a). \tag{43}$$

2. Wenn $I(\lambda) > 0$ und hinreichend groß ist, dann gilt die Abschätzung

$$|H(x, y, \lambda^2)| \leqslant \frac{e^{-I(\lambda)|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \left(\frac{N}{|x-y|} + M\right) e^{-k|x-y|}, \tag{44}$$

[5] $(L - \lambda I)_x$ bedeutet, daß der Operator in der Veränderlichen x wirkt.

wo M, N, K nur von λ abhängige positive Konstanten sind. Der Beweis der Abschätzung (44) ist für begrenzte Potentiale $q(x)$ in der Arbeit [21] angegeben.

3. Die Funktion $H(x, y, \lambda^2)$ erfüllt noch für $I(\lambda) > 0$ die folgende Gleichung:

$$H(x, y, \lambda^2) = \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} - \int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} q(s) H(s, y, \lambda^2)\, ds. \tag{45}$$

Den Beweis kann man z. B. in [22], S. 144 und 151, finden. Aus (44) und (45) folgt, daß für $x \epsilon E$ die Ungleichung

$$\int_E |H(x, s, \lambda^2)|^2 ds < R \tag{46}$$

gilt, wo R eine Konstante ist. Weiter ergibt (44) und (45), daß

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\sup_{x\epsilon E} \int_E |H(x+p_n, s, \lambda^2) - H(x+p, s, \lambda^2)|\, ds\Big] = 0 \tag{47}$$

ist, wo p_n eine beliebige nach p konvergente Punktfolge bedeutet.

2. Die wesentliche Selbstadiungiertheit des Operators $-\Delta u + q(x_1, x_2, x_3)u$. Wir werden jetzt ähnlich wie im eindimensionalen Falle, mit Hilfe von $Lu = -\Delta u + q(x_1, x_2, x_3)u$ einen in $\mathfrak{H}$ dicht erklärten wesentlich selbstadiungierten Operator $\mathfrak{L}U$ erzeugen. Der Operator $\mathfrak{L}U$ wird analog wie im eindimensionalen Falle, folgend erklärt:

$$D = \{u(x) : u \epsilon (g, f, p),\ u \epsilon C^2(E),\ Lu \epsilon (g, f, p)\},$$

$$D_{\mathfrak{L}} = \{U : U = (u),\ u \epsilon D\};$$

dabei ist für $U = (u)$, wo $u \epsilon D$, $\mathfrak{L}U = (Lu)$. Es gilt offenbar $\overline{D}_{\mathfrak{L}} = \mathfrak{H}$.

Aus der Definition von $\mathfrak{L}U$ folgt, daß man analog wie im eindimensionalen Falle für $U, V \epsilon D_{\mathfrak{L}}$ die folgende Gleichung beweisen kann:

$$(\mathfrak{L}U, V) = (U, \mathfrak{L}V).$$

Es gilt auch

$$(\mathfrak{L}V, V) \geqslant \gamma \|V\|^2,$$

wo $\gamma = \inf q(x)$ ist. Für $U = (u(x))$, $V = (v(x))$ und $K_n = \{x : |x| \leqslant n\}$ haben wir nämlich

$$(\mathfrak{L}U, V) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu(K_n)} \int_{K_n} (-\Delta u \cdot \bar{v} + q(x) u\bar{v})\, dx$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu(K_n)} \Big[\int_{K_n} (-u\Delta\bar{v} + uq(x)\bar{v})\, dx + \int_{\partial K_n} \Big(u\frac{\partial \bar{v}}{\partial \vec{n}} - \bar{v}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big) ds\Big]$$

$$= (U, \mathfrak{L}V) + \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n.$$

Es ist aber $\lim \varepsilon_n = 0$. Um diese Gleichung zu beweisen genügt es zu zeigen, daß aus der Tatsache, daß $u(x) \epsilon D$ die Begrenztheit der Ableitungen $\partial u/\partial x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ folgt. Wenn aber $u(x)$ der Menge D angehört, dann ist

$$-\Delta u - \lambda^2 u = \varphi(x) \epsilon (g, f, p)$$

und

$$u(x) = \int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} \varphi(s)\, ds, \tag{48}$$

wo $I(\lambda) > 0$ angenommen ist. Durch Differenzierung der Gleichung (48) erhalten wir die gesuchte Abschätzung:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant M \int_E \frac{e^{-I(\lambda)|x-s|}}{|x-s|^2} ds.$$

Wir werden jetzt den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 8. *Wenn $f(x) \epsilon (g, f, p)$, $|I(\lambda)|$ hinreichend groß und*

$$u(x) = \int_E H(x, s, \lambda^2) f(s)\, ds \tag{49}$$

ist, dann gilt die Ungleichung

$$\|u\| < M\|f\|, \tag{50}$$

wo M eine Konstante ist.

Beweis. Die Existenz des Integrals (49) folgt aus der Abschätzung (44). Weiter ist

$$|u(x)|^2 \leqslant \int_E |H(x, s, \lambda^2)|\,|f(s)|\,|H(x, t, \lambda^2)|\,|f(t)|\, ds\, dt.$$

In der Abschätzung (44) können wir immer $k < I(\lambda)$ annehmen. Die Abschätzung nimmt dann folgende Gestalt an:

$$|H(x, y, \lambda^2)| < \Omega\Big(1 + \frac{1}{|x-y|}\Big) e^{-k|x-y|},$$

wo Ω eine nur von λ abhängige Konstante ist. Wir haben also

$$|u(x)|^2 < \Omega^2 \int_E \Big(1 + \frac{1}{|x-s|}\Big) e^{-k|x-s|} |f(s)| \Big(1 + \frac{1}{|x-t|}\Big) e^{-k|x-t|} |f(t)|\, ds\, dt$$

$$= \Omega^2 \varepsilon(x, T) + \Omega^2 \int_{K(T)} \int_{K(T)} \Big(1 + \frac{1}{|x-s|}\Big)^{1/2} \Big(1 + \frac{1}{|x-t|}\Big)^{1/2} e^{-\frac{k}{2}(|x-s|+|x-t|)} |f(s)| \times$$

$$\times \Big(1 + \frac{1}{|x-s|}\Big)^{1/2} \Big(1 + \frac{1}{|x-t|}\Big)^{1/2} e^{-\frac{k}{2}(|x-s|+|x-t|)} |f(t)|\, ds\, dt,$$

wo $K(T) = \{x: |x| \leqslant T\}$ ist und $\varepsilon(x, T)$ für $T \to \infty$ gegen Null strebt. Es gilt weiter

$$(51)\qquad |u(x)|^2 \leqslant \Omega^2 \varepsilon(x, T) + \frac{\Omega^2}{2} \int\limits_{k(T)} \int\limits_{k(T)} \left(1 + \frac{1}{|x-s|}\right) \times$$
$$\times \left(1 + \frac{1}{|x-t|}\right) e^{-k(|x-s|+|x-t|)} \left(|f(s)|^2 + |f(t)|^2\right) ds\, dt$$
$$= \Omega^2 \varepsilon(x, T) + \Omega^2 \int\limits_{k(T)} \int\limits_{k(T)} \left(1 + \frac{1}{|x-s|}\right) \left(1 + \frac{1}{|x-t|}\right) e^{-k(|x-s|+|x-t|)} |f(s)|^2 ds\, dt.$$

Für $R > 0$ gilt aber die Ungleichung

$$(52)\qquad \int\limits_{K(R)} \left(1 + \frac{1}{|x-s|}\right) e^{-k|x-s|} ds \leqslant A,$$

wo x beliebig und A eine passende Konstante ist. Wenn man jetzt die Ungleichung (51) integriert und zweimal die Ungleichung (52) anwendet, dann bekommt man ganz analog wie im eindimensionalen Falle die Ungleichung

$$\int\limits_{K(T-a(T))} |u(x))|^2 dx \leqslant 4/3\pi \Omega^2 (T - a(T))^3 \eta(T) + A^2 \Omega^2 \int\limits_{K(T)} |f(s)|^2 ds,$$

wo

$$a(T) > 0, \qquad \lim_{T\to\infty} a(T) = \infty, \qquad \lim_{T\to\infty} T/a(T) = \infty$$
$$\eta(T) = \sup_{x \in K(T-a(T))} |\varepsilon(x, T)|,$$

woraus unmittelbar die Ungleichung (50) folgt. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes 8 beendet.

Wir werden jetzt den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 9. *Wenn $I(\lambda) > 0$ und hinreichend groß ist, dann existiert für jede Funktion $f(x) \epsilon (g, f, p)$ eine Funktion $u(x) \epsilon D$, so daß $(L - \lambda^2 I) u = f$ ist. Es gilt also die Gleichung*

$$(L - \lambda^2 I) D = (g, f, p).$$

Beweis. Wir weden zeigen, daß die gesuchte Funktion die folgende Gestalt hat:

$$u(x) = \int\limits_E H(x, s, \lambda^2) f(s)\, ds.$$

Es ist offenbar, daß $(L - \lambda^2 I) u = f$ ist. Es genügt also, zu beweisen, daß u der Menge (g, f, p) angehört, das heißt, zu zeigen, daß für jede Punktfolge h_n die Funktionenfolge $u(x + h_n)$ eine gleichmäßig konvergente Unterfolge besitzt. Die Punktfolge h_n kann man als Summe h_n $= \varkappa_n + p_n$ schreiben, wo $\varkappa_n$ begrenzt, $p_n = (k_n a_1, l_n a_2, m_n a_3)$, und k_n, l_n, m_n ganzzählige Folgen sind.

Aus der Gruppeneigenschaft des Resolventenkernes folgt

$$u(x + h_n) = \int\limits_E H(x + \varkappa_n + p_n, s, \lambda^2) f(s)\, ds$$
$$= \int\limits_E H(x + \varkappa_n, s - p_n, \lambda^2) f(s)\, ds$$
$$= \int\limits_E H(x + \varkappa_n, s, \lambda^2) f(s + p_n)\, ds.$$

Es ist $f \epsilon (g, f, p)$, wir können also annehmen, daß

$$(53)\qquad \lim_{n\to\infty} [\sup_x |f(x + p_n) - \varphi(x)|] = 0$$

ist, wo $\varphi(x)$ eine passende (g, f, p) Funktion ist. Trotzdem setzen wir voraus, daß $\lim \varkappa_n = \varkappa$ ist. Es gilt dann für

$$w(x) = \int\limits_E H(x, s, \lambda^2) \varphi(s)\, ds$$

die Ungleichung

$$|u(x + h_n) - w(x)| \leqslant \sup_S |f(s + p_n) - \varphi(s)| \int\limits_E |H(x + \varkappa_n, s, \lambda^2)|\, ds +$$
$$+ \sup_S |\varphi(s)| \int\limits_E |H(x + \varkappa_n, s, \lambda^2) - H(x + \varkappa, s, \lambda^2)|\, ds,$$

was zusammen mit (46), (47) und (53) den Beweis beendet.

Auf Grund von Hilfssatz 8 und 9 können wir jetzt den folgenden Satz formulieren:

Satz 9. *Der in $D_{\mathfrak{L}}$ erklärte Operator $\mathfrak{L}$ ist wesentlich selbstadiungiert.*

Die Abschliessung von $\mathfrak{L}$ werden wir wie vorher mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Es gilt der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 10. *$F \epsilon D_{\mathfrak{A}}$ dann und nur dann wenn*

$$F \sim \sum_s A_s e^{i(\lambda^{(s)}, x)} \quad \textit{und} \quad \sum_s A_s^2 |\lambda^{(s)}|^4 < \infty\ ({}^6).$$

Weiter gilt die Gleichung

$$(54)\qquad (\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{J}) F \sim -\sum_s A_s (|\lambda^{(s)}|^2 + \lambda) e^{i(\lambda^{(s)}, x)} +$$
$$+ \sum_{k,l,m,s} c_{k,l,m} A_s e^{i\left[\left(k\frac{2\pi}{a_1} + \lambda_1^{(s)}\right) x_1 + \left(l\frac{2\pi}{a_2} + \lambda_2^{(s)}\right) x_2 + \left(m\frac{2\pi}{a_3} + \lambda_3^{(s)}\right) x_3\right]},$$

---

(6) $|\lambda^{(s)}|^2 = (\lambda_1^{(s)})^2 + (\lambda_2^{(s)})^2 + (\lambda_3^{(s)})^2$.

wo

$$q(x) \sim \sum c_{k,l,m} e^{i\left[\left(k\frac{2\pi}{a_1}x_1 + l\frac{2\pi}{a_2}x_2 + m\frac{2\pi}{a_3}x_3\right]\right.}$$

angenommen ist.

Wir werden den Beweis vernachläßigen, denn er ganz analog wie im eindimensionalen Falle erhalten wird. Auf Grund von Hilfssätzen 8, 9 und 10 können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 10. *Wenn* $F \in D$ *und* $\mathfrak{A}F = \lambda F$, *dann* $F = \sum_s F_s$, *wo* $F_s \in D_{\mathfrak{H}}$ *und* $\mathfrak{A}F_s = \lambda F_s$ *ist. Die Elemente* F_s *lassen sich folgend durch* (g, f, p)*-Funktionen repräsentieren:*

$$F_s = \left(e^{i(\lambda^{(s)}, x)} v^{(s)}(x)\right),$$

wo $v^{(s)}$ *die Identität* $v^{(s)}(x_1 + ka_1, x_2 + La_2, x_3 + ma_3) = v^{(s)}(x_1, x_2, x_3)$ *erfüllt, zweimal stetig differenzierbar ist und die Gleichung*

$$Le^{i(\lambda^{(s)}, x)} v^{(s)}(x) = \lambda e^{i(\lambda^{(s)}, x)} v^{(s)}(x)$$

erfüllt.

Der Beweis ist mit dem Beweis des Satzes 3 völlig analog (⁷).

3. Spektrum Untersuchung. Bis jetzt wissen wir noch sehr wenig über das Spektrum $S(\mathfrak{A})$. Das Einzige was man bis jetzt sagen kann, ist, daß $S(\mathfrak{A})$ auf der Halbgeraden $\langle q, +\infty)$ liegt ($q = \inf_{x \in E} q(x)$). Zuerst werden wir zeigen, daß $S(\mathfrak{A})$ aus lauter Eigenwerten besteht.

Es sei

$$e_{k,l,m}^{(\gamma)}(x) = e^{i\left[\left(\gamma_1 + \frac{2\pi}{a_1}k\right)x_1 + \left(\gamma_2 + \frac{2\pi}{a_2}l\right)x_2 + \left(\gamma_3 + \frac{2\pi}{a_3}m\right)x_3\right]}$$

und

$$\mathfrak{H}_\gamma = \sum_{k,l,m} \oplus C e_{k,l,m}^{(\gamma)}(x) \ (^8),$$

wo $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ein beliebiger Punkt ist. Aus der Gleichung (54) folgt, daß der Raum $\mathfrak{H}_\gamma$ für den Operator $\mathfrak{A}$ invariant ist ($\mathfrak{A}\mathfrak{H}_\gamma \subset \mathfrak{H}_\gamma$). Die Verengerung $\mathfrak{A}^{(\gamma)}$ des Operators $\mathfrak{A}$ auf den Raum $\mathfrak{H}_\gamma$ ist also auch wesentlich selbstadiungiert und für $\mu \notin S(\mathfrak{A})$ gelten die folgenden Gleichungen:

$$(\mathfrak{A} - \mu I)\mathfrak{H}_\gamma = \mathfrak{H}_\gamma, \qquad \mathfrak{R}_\mu \mathfrak{H}_\gamma = \mathfrak{H}_\gamma.$$

Wir werden jetzt den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 11. *Die Resolvente* $\mathfrak{R}_{\mu^2}$, *wo* $I(\mu) > 0$ *und hinreichend groß, ist im Raume* $\mathfrak{H}_\gamma$ *vollstetig.*

(⁷) Was die Gestalt der Resolvente betrifft, siehe Beweis von (55).

(⁸) $Cf(x)$ bedeutet den eindimensionalen Raum, welcher auf dem Element $(f(x))$ aufgespannt ist.

Beweis. Es gilt $F \in \mathfrak{H}_\gamma$ dann und nur dann, wenn $F = \left(e^{i(\gamma, x)} v(x)\right)$ ist, wo die Funktion $v(x)$ lokal quadratisch integrierbar ist und mit den Perioden der Funktion $q(x)$ dreifach periodisch ist. Wir werden zeigen, daß

$$\mathfrak{R}_{\mu^2} F = \left(\int_E H(x, s, \mu^2) e^{i(\gamma, s)} v(s)\, ds\right) \tag{55}$$

ist. Die Gleichung (55) ist im Falle, wenn $v(x)$ stetig, eine unmittelbare Folge der Hilfssätze 8 und 9. Im allgemeinen Falle müssen wir zuerst beweisen, daß das in der Gleichung (55) linksstehende Integral existiert.

Bezeichnen wir mit K die Punktmenge $\{x : x = (x_1, x_2, x_3),\ 0 \leqslant x_i \leqslant a_i\ (i = 1, 2, 3)\}$. Dann haben wir:

$$\|F\|^2 = \frac{1}{\mu(K)} \int_K |v(x)|^2 dx.$$

Aus unseren Abschätzungen des Resolventenkernes folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_E |H(x, s, \mu^2)||v(s)|\, ds &\leqslant \Omega \int_E \left(1 + \frac{1}{|x-s|}\right) e^{-k|x-s|}|v(s)|\, ds \\
&= 8\Omega \int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty}\int_{x_3}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{|x-s|}\right) e^{-k|x-s|}|v(s)|\, ds \\
&\leqslant 8\Omega \left(\int_K |v(s)|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_{x_1}^{a_1}\int_{x_2}^{a_2}\int_{x_3}^{a_3} \left(1 + \frac{1}{|x-s|}\right)^2 e^{-2k|x-s|}\right)^{1/2} + \\
&\quad + 8\Omega \left(\int_K |v(s)|^2 ds\right)^{1/2} \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \left(\int_{x_1+ka_1}^{x_1+(k+1)a_1}\int_{x_2+la_2}^{x_2+(l+1)a_2}\int_{x_3+ma_3}^{x_3+(m+1)a_3} \left(1 + \frac{1}{|x-s|}\right) e^{-2k|x-s|} ds\right)^{1/2} \\
&\leqslant 8\Omega \left(\mu(K)\right)^{1/2} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 |a|(|a|+1)^2 + \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left(1 + \frac{1}{(k^2+l^2+m^2)^{1/2}}\right) e^{-2k(k^2+l^2+m^2)^{1/2}}\right] \|F\|.
\end{aligned}$$

Also existiert das Integral $\int_E |H(x, s, \mu^2)|\,|v(s)|\, ds$ und es gilt die folgende Ungleichung:

$$\int_E |H(x, s, \mu^2)|\,|v(s)|\, ds \leqslant M\|F\|. \tag{56}$$

Es sei jetzt $F_n \epsilon \mathfrak{H}_\gamma$, $F_n = \left(e^{i(\gamma,x)}v_n(x)\right)$, wo $v_n(x)$ stetige Funktionen sind und $\|F-F_n\|$ für $n\to\infty$ gegen Null strebt. Dann gilt auf Grund von (56) für

$$w(x) = \int_E H(x,s,\mu^2)e^{i(\gamma,s)}v(s)\,ds \quad \text{und} \quad w_n(x) = \int_E H(x,s,\mu^2)e^{i(\gamma,s)}v_n(s)\,ds$$

die folgende Ungleichung:

$$|w(x)-w_n(x)| \leqslant M\|F-F_n\|,$$

was den Beweis der Gleichung (55) beendet.

Es sei jetzt $\mathfrak{X}\epsilon\mathfrak{H}_\gamma$ eine beliebige, begrenzte Untermenge des Raumes $\mathfrak{H}_\gamma$, wo für $F\epsilon\mathfrak{X}$ die Ungleichung $\|F\| < N$ gilt. Wir sollen zeigen, daß die Menge $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}_{\mu^2}\mathfrak{X}$ kompakt ist. Jedes Element $U\epsilon\mathfrak{Z}$ ist der Gestalt $U = \left(e^{i(\gamma,x)}g(x)\right)$, wo $g(x)$ dreifach periodisch ist. Es genügt also zu zeigen, daß die Menge aller Funktionen die der Gestalt sind

$$g(x) = e^{-i(\gamma,x)}\int_E H(x,s,\mu^2)e^{i(\gamma,s)}v(s)\,ds,$$

wo $v(s)$ dreifach periodisch ist und die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{\mu(K)}\int_K |v(s)|^2 ds\right)^{1/2} < N$$

erfüllt, gleichmäßig begrenzt und für $x\epsilon K$ gleichstetig ist. Die gleichmäßige Begrenztheit folgt unmittelbar aus der Ungleichung (56). Aus der Ungleichung (56) und aus (45) folgt offenbar

$$|g(x)-g(x')| = \left|\int_E [H(x,s,\mu^2)-H(x',s,\mu^2)]e^{i(\gamma,s)}v(s)\,ds\right|$$

$$\leqslant \int_E \left|\frac{e^{i\mu|x-s|}}{4\pi|x-s|} - \frac{e^{i\mu|x'-s|}}{4\pi|x'-s|}\right| |v(s)|\,ds +$$

$$+\int_E \left|\frac{e^{i\mu|x-s|}}{4\pi|x-s|} - \frac{e^{i\mu|x'-s|}}{4\pi|x'-s|}\right| |q(s)| \int_E |H(s,t,\mu^2)|\,|v(t)|\,ds\,dt.$$

Aus der Ungleichung (56) und aus der Tatsache, daß eine Konstante R existiert, so daß

$$\int_E \left|\frac{e^{i\mu|x-s|}}{|x-s|}\right| |v(s)|\,ds \leqslant R\left(\frac{1}{\mu(K)}\int_K |v(s)|^2 ds\right)^{1/2}$$

ist, folgt schließlich für $x, x'\epsilon K$ die Ungleichung

$$|g(x)-g(x')| \leqslant 3^3 N\left(\mu(k)\right)^{1/2}\left(\int_Q \left|\frac{e^{i\mu|x-s|}}{4\pi|x-s|} - \frac{e^{i\mu|x'-s|}}{4\pi|x'-s|}\right|^2 ds\right)^{1/2} +$$

$$+RN\sup_{s\epsilon E-Q}\left|1-e^{i\mu(|x-s|-|x'-s|)}\cdot\frac{|x-s|}{|x'-s|}\right| +$$

$$+MN\sup_{s\epsilon E}|q(s)|\int_E \left|\frac{e^{i\mu|x-s|}}{4\pi|x-s|} - \frac{e^{i\mu|x'-s|}}{4\pi|x'-s|}\right| ds,$$

wo $Q = \{x: x = (x_1, x_2, x_3),\ -a_i \leqslant x_i \leqslant 2a_i\ (i = 1,2,3)\}$ ist. Die letzte Ungleichung ergibt die Gleichstetigkeit der Funktionen $g(x)$ für $x\epsilon K$. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Jetzt können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 11. *Das Spektrum $S(\mathfrak{A})$ besteht aus lauter Eigenwerten und ist wesentlich. Es gilt*

$$\sum_\omega \oplus \mathfrak{E}_\omega = \mathfrak{H},$$

wo $\mathfrak{E}_\omega$ alle Eigenräume des Operators $\mathfrak{A}$ bedeuten.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_\omega$ alle Eigenräume des Operators $\mathfrak{A}$. Wir werden zeigen, daß die folgende Gleichung gilt:

$$\mathfrak{N} = \sum \oplus \mathfrak{E}_\omega = \mathfrak{H}.$$

Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{H}$ ist. Mit $\mathfrak{M}$ werden wir den nicht leeren Raum $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}$ bezeichnen. $\mathfrak{M}$ ist offenbar für den Operator $\mathfrak{A}$ invariant.

Es sei $G\epsilon\mathfrak{M}$, $G\neq 0$ und $G \sim \sum_s A_s e^{i(\gamma_s,x)}$. Die Punktmenge $\{\gamma_s\}$ zerteilen wir in Klassen Γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Zwei Punkte $\gamma_{s'}, \gamma_{s''}$ gehören dann und nur dann einer Klasse Γ_i an, wenn

$$\gamma_{s'}-\gamma_{s''} = \left(k\frac{2\pi}{a_1},\ l\frac{2\pi}{a_2},\ m\frac{2\pi}{a_3}\right)$$

ist. Die Klassen bestehen also aus Punkten der Gestalt

$$\gamma_s = \gamma_i + \left(k_s\frac{2\pi}{a_1},\ l_s\frac{2\pi}{a_2},\ m_s\frac{2\pi}{a_3}\right).$$

Betrachten wir die Räume $\mathfrak{H}_{\gamma_i}$. Sie sind für $\mathfrak{A}$ invariant und gegenseitig orthogonal. Der Raum

$$\hat{\mathfrak{H}} = \sum_i \oplus \mathfrak{H}_{\gamma_i}$$

ist auch für $\mathfrak{A}$ invariant. Wir führen noch den Raum

$$\mathfrak{Q} = P_{\mathfrak{M}}\hat{\mathfrak{H}}$$

ein. Der Raum $\mathfrak{Q}$ ist nicht leer, weil $G \in \mathfrak{M}$ und $G \in \hat{\mathfrak{H}}$ ist. Offenbar ist $\mathfrak{Q}$ für $\mathfrak{A}$ invariant.

Mit $\tilde{\mathfrak{A}}$ bezeichnen wir jetzt die Verengerung des Operators $\mathfrak{A}$ auf den Raum $\mathfrak{Q}$, mit $\tilde{\mathfrak{A}}^{(i)}$ die Verengerung auf den invarianten Raum $P_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{H}_{\gamma_i} = \mathfrak{Q}_i$. Mit $\tilde{\mathfrak{R}}_\mu$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_\mu^{(i)}$ werden wir die entsprechenden Verengerungen der Resolvente des Operators $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Ausserdem sollen $\mathfrak{R}_\mu^{(i)}$ und $\mathfrak{A}^{(i)}$ die Verengerungen der Resolvente und des Operators $\mathfrak{A}$ auf den Raum $\mathfrak{H}_{\gamma_i}$ bedeuten.

Der selbstadiungierte Operator $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist von Null verschieden und die Definition des Raumes $\mathfrak{M}$ ergiebt, daß er ein rein kontinuierliches Spektrum besitzt. Die Räume $\mathfrak{Q}_i$ können nicht alle leer sein, denn

$$\mathfrak{Q} = \sum_i \oplus \mathfrak{Q}_i$$

ist. Der Hilfssatz 11 ergibt, daß für $I(\mu) > 0$ und hinreichend groß, der Operator $\mathfrak{R}^{(i)}$ vollstetig ist. Wenn aber $\mathfrak{R}_\mu^{(i)}$ für ein μ_0 vollstetig ist, dann ist sie für beliebiges $\mu \notin S(\mathfrak{A}^{(i)})$ vollstetig. Die Operatoren $\mathfrak{A}^{(i)}$ sind aber wie $\mathfrak{A}$ halbbegrenzt. $\mathfrak{R}_\nu^{(i)}$ ist also vollstetig, wenn ν reel und $\nu < \gamma$ ist, wo γ die untere Grenze des Operators $\mathfrak{A}$ bedeutet. Die Operatoren $\tilde{\mathfrak{R}}_\nu^{(i)}$ als Verengerungen der Operatoren $\mathfrak{R}_\nu^{(i)}$ sind auch vollstetig. Trotzdem sind sie symmetrisch und der Gleichung $\tilde{\mathfrak{R}}_\nu^{(i)}\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}_i$ wegen, nicht alle identisch gleich Null. Es existiert also ein i_0, so daß der Operator $\tilde{\mathfrak{A}}^{(i_0)}$ wenigstens einen Eigenwert besitzt. Jeder Eigenwert des Operators $\tilde{\mathfrak{A}}^{(i_0)}$ stellt aber auch einen Eigenwert des Operators $\tilde{\mathfrak{A}}$ dar. Was einen Widerspruch mit der Tatsache ergibt, daß das Spektrum des Operators $\tilde{\mathfrak{A}}$ rein kontinuierlich ist. Damit ist die Tatsache bewiesen, daß $S(\mathfrak{A})$ aus lauter Eigenwerten besteht. Auf Grund von Satz 10 kann man die Wesentlichkeit des Spektrums $S(\mathfrak{A})$ ganz ähnlich wie im eindimensionalen Falle beweisen. Damit ist der Beweis des Satzes 11 beendet.

Auf Grund von Hilfssatz 6 kann man noch die folgenden Perturbationssätze beweisen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ die in $\mathfrak{H}$ wesentlich selbstadiungierten Operatoren, welche durch die Differentialoperatoren $L^{(1)}u = -\Delta u + q^{(1)}(x)u$ und $L^{(2)}u = -\Delta u + q^{(2)}(x)u$ hervorgerufen sind. Dabei sind die Funktionen $q^{(1)}(x)$ und $q^{(2)}(x)$ dreifachperiodisch, mit denselben Perioden a_1, a_2, a_3. Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 12. *Es gilt die Ungleichung*

$$\varrho\big(S(\mathfrak{A}^{(1)}), S(\mathfrak{A}^{(2)})\big) \leqslant \sup_x |q^{(1)}(x) - q^{(2)}(x)|.$$

Satz 13. *Wenn*

$$\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\int_0^{a_3} |q^{(i)}(x)|^2 dx < N, \qquad \mu < 0, \mu < \nu,$$

und $\langle\mu, \nu\rangle \cdot S(\mathfrak{A}^{(i)}) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ *ist, dann gilt die Ungleichung*

$$\varrho_{\langle\mu,\nu\rangle}\big(S(\mathfrak{A}^{(1)}), S(\mathfrak{A}^{(2)})\big) < M(\mu, \nu, N, a_1, a_2, a_3)\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3}\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\int_0^{a_3} |q^{(1)} - q^{(2)}|^2 dx\right)^{1/2},$$

wo M eine nur von μ, ν, N, a_1, a_2, a_3 abhängende Konstante ist.

Die Beweise der beiden Sätze kann man völlig analog wie im eindimensionalen Falle durchführen. Die Abschätzung der Eigenfunktionen, welche für den Beweis des Satzes 13 notwendig ist kann man auf folgende Weise erhalten. Es sei $u_\lambda(x) = e^{i(\nu,x)}v_\lambda(x)$, wo v_λ dreifach periodisch ist, und $Lu_\lambda = \lambda u_\lambda$. Dann gilt

$$-\Delta u_\lambda - \mu u = -q(x)u_\lambda + (\lambda - \mu)u_\lambda.$$

Also

$$u_\lambda(x) = -\int_E \frac{e^{-\sqrt{\mu}|x-s|}}{4\pi|x-s|} q(s)u_\lambda(s) + (\lambda - \mu)\int_E \frac{e^{-\sqrt{\mu}|x-s|}}{4\pi|x-s|} u_\lambda(s)\,ds.$$

Aus der letzten Gleichung kann man unmittelbar die folgende Abschätzung bekommen:

$$|u_\lambda(x)| \leqslant M(\mu, \nu, N, a_1, a_2, a_3)\|u_\lambda(x)\|.$$

Die Abschätzung erhält man auf ganz ähnlichem Wege wie die Ungleichungen (56) und (39).

III. Schlussbemerkungen

In dem vorliegenden Abschnitt wollen wir einige naheliegende Fragen formulieren.

Die Ergebnisse der Spektraltheorie der $n \times n$ symmetrischen Matrizen können folgend formuliert werden. Wenn $x_1, \ldots, x_k$ alle gegenseitig orthogonale Eigenwektoren sind, dann ist $k = n$ und

(57) $$W_n = \sum_i \oplus Cx_i,$$

wo W_n den n-dimensionalen Wektorraum bedeutet.

Es sei jetzt $Mu = u'' + q(x)u$, wo $a \leqslant x \leqslant b$ ist, und u eine homogene Randwertbedingung erfüllt. Die Spektraltheorie für den Operator Mu

ergibt folgendes. Wenn $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ alle gegenseitig orthogonale Eigenfunktionen des Operators Mu sind, dann gilt

$$L^2\langle a, b\rangle = \sum_i \oplus Cu_i. \tag{58}$$

Es ist also die Spektraltheorie für symmetrische Matrizen und für die Operatoren Mu weitgehend analog.

Bezeichnen wir jetzt mit $M_\infty u$ den Operator $-u''+q(x)u$, wo $-\infty < x < +\infty$, $q(x)$ begrenzt ist und u die Bedingungen

$$u \in C^2(-\infty, +\infty), \qquad u \in L^2(-\infty, \infty)$$

erfüllt. Für den Operator $M_\infty u$ gilt die obige unmittelbare Analogie mit den symmetrischen Matrizen nicht mehr. Wenn nähmlich $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ die gegenseitig orthogonalen Eigenfunktionen des Operators M_∞ bedeuten, dann gilt nur

$$L^2(-\infty, \infty) \supset \sum_i \oplus Cu_i.$$

Bezeichnen wir mit $v_\lambda(x)$ die klassischen Eigenfunktionen des Operators $-u''+q(x)u$ $(-\infty < x < +\infty$, $q(x)$ begrenzt), das heißt alle Funktionen, welche begrenzt sind, der Klasse $C^2(-\infty, +\infty)$ angehören und die Gleichung $-v_\lambda''+q(x)v_\lambda = \lambda v_\lambda$ erfüllen. Es ist bekannt, daß die Menge aller klassischen Eigenfunktionen v_λ auf zwei Klassen zerfällt:

$$1^\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} |v_\lambda^{(1)}|^2 dx < +\infty, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |v_\lambda^{(1)}|^2 dx = 0;$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} |v_\lambda^{(2)}|^2 dx = +\infty, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |v_\varkappa^{(2)}|^2 dx < +\infty.$$

Bezeichnen wir jetzt mit $v_\lambda^{(1)}$, $\lambda \in \sigma_1$, alle im Sinne des skalaren Produktes

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f\bar{g}\,dx$$

gegenseitig orthogonalen Eigenfunktionen der ersten Klasse. Mit $v_\lambda^{(2)}$, $\lambda \in \sigma_2$, bezeichnen wir alle im Sinne des Produktes

$$[f, g] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} f\bar{g}\,dx$$

gegenseitig orthogonalen Eigenfunktionen der zweiten Klasse. Es liegt nahe, die folgende Räume zu bilden

$$H^{(1)} = \sum_{\lambda\in\sigma_1} \oplus Cv_\lambda^{(1)}, \qquad H^{(2)} = \sum_{\lambda\in\sigma_2} \oplus Cv_\lambda^{(2)}$$

und folgende Fragen zu formulieren:

1. Man soll Klassen von Funktionen $q(x)$ auffinden, für welche die Räume $H^{(1)}$ gleich sind.

2. In der vorliegenden Arbeit zeigten wir, daß für periodische Funktionen $q(x)$ immer die Gleichung

$$H^{(2)} = \mathfrak{H} \tag{59}$$

gilt, wo $\mathfrak{H}$ den Raum der Besikovitch fastperiodischen Funktionen bedeutet.

Leicht kann man nachprüfen, daß die Gleichung (59) gilt für alle Funktionen $q(x)$, welche für $|x| \to \infty$ genügend schnell gegen Null konvergieren. Wir haben nähmlich $\sigma_2 = \langle 0, +\infty)$ und für $\lambda \in \sigma_2$ existieren genau zwei linear unabhängige klassische Eigenfunktionen

$$v_\lambda^{(2,+)} = e^{i\sqrt{\lambda}x} + W_+(x), \qquad v_\lambda^{(2,-)} = e^{-i\sqrt{\lambda}x} + W_-(x),$$

wo $\lim_{|x|\to\infty} W_{+,-}(x) = 0$ ist, was unmittelbar die Gleichung (59) ergibt.

Die Frage ist, wie weit die Gleichung (59) für alle begrenzten Funktionen $q(x)$ gültig sein wird.

3. Betrachten wir zwei Operatoren

$$M_\infty^{(1)} u = -u''+q^{(1)}(x)u, \qquad M_\infty^{(2)} u = -u''+q^{(2)}(x)u,$$

wo $q^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, begrenzt ist und

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |q^{(1)}(x) - q^{(2)}(x)|^2 dx = 0$$

ist. Mit $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ werden wir entsprechend das kontinuierliche Spektrum der Operatoren $M_\infty^{(1)}$ und $M_\infty^{(2)}$ bezeichnen.

Man soll feststellen, wie weit die Gleichung

$$C^{(1)} = C^{(2)}$$

gilt.

Literaturnachweis

[1] Besikovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge 1932.

[2] M. Burnat, *Die Stabilität der Eigenfunktionen und das Spektrum des Hillschen Operators*, Bull. Acad. Pol. Sci 9 (1961), S. 795-798 (Russisch).

[3] — *Die Inertionseigenschaften des Spektrums für den Operator* $-u''+q(x)u$ *mit periodischen* $q(x)$, ibidem 10 (1962), S. 247-263.

[4] — *Einige Abschätzungen der Greenschen Funktion des Operators* $-\Delta u + q(x_1, x_2, x_3)u$, Ann. Pol. Math. 13 (1963), p. 295-302.

[5] — *Über partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus mit singulären Koeffizienten*, Studia Math. 18 (1959), S. 137-159.

[6] G. Hamel, *Über die lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten*, Math. Zeitschrift 27 (1913), S. 269-311.

[7] O. Haupt, *Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten*, Math. Annalen 79 (1919), S. 278-285.

[8] K. Kodaira, *The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order, and Heisenberg's theory of S-matrices*, Amer. J. Math. 71 (1949), S. 921-945.

[9] A. A. Kramers, *Das Eigenwertproblem im eindimensionalen periodischen Kraftfelde*, Physica 2 (1935), S. 483-490.

[10] R. Kronig and W. G. Penney, *Quantum mechanics of electrons in crystal lattices*, Proc. Royal. Soc. (A) 130 (1930), S. 499-513.

[11] E. M. Lewitan *Fastperiodische Funktionen*, Moskva 1953 (Russisch).

[12] W. Maak, *Fastperiodische Funktionen*, Berlin 1952.

[13] C. R. Putman, *On the least eigenvalue of Hill's equation*, Quart. Appl. Math. 9 (1951), S. 310-314.

[14] — *On the gaps in the spectrum of the Hill equation*, ibidem 11 (1953), S. 496-498.

[15] S. Saxon, and R. A. Huntner, *Electronic properties of a one-dimensional crystal model*, Philips Research Reports 4 (1949).

[16] A. Sommerfeld und H. Bethe, *Elektronen im periodischen Potentialfeld. A. Eigenwerte und Eigenfunktionen*, Handbuch der Physik 24 (1933), S. 368-427.

[17] E. S. Titchmarsh, *Eigenfunctions problems with periodic potentials*, Proc. Royal Soc. (A) 203 (1950), S. 501-514.

[18] — *Eigenfunctions expansions associated with second-order differential equations*, Part II, Oxford 1958.

[19] S. Wallach, *On the location of spectra of differential equations*, Amer. J. Math. 70 (1948), S. 833-841.

[20] — *The spectra of periodic potentials*, ibidem, S. 842-848.

[21] D. Wintmer, *On the location of continuous spectra*, ibidem, S. 22-30.

[22] — *Stability and spectrum in the wave mechanics of lattices*, Physical Rev. 72 (1947), S. 81-82.

Reçu par la Rédaction le 7. 2. 1964

STUDIA MATHEMATICA, T. XXV. (1964)

w*-bases and bw*-bases in Banach spaces

by

J. R. RETHERFORD (Tallahassee, Florida)*

1. Introduction. Let X be a linear space endowed with a locally convex topology τ. A sequence $\{M_i\}$ of non-trivial subspaces in X is a *τ-basis* of subspaces for X if and only if corresponding to each $x \in X$ there is a unique sequence $\{x_i\}$, $x_i \in M_i$, such that

$$x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

convergence in the topology τ. Corresponding to a basis of subspaces $\{M_i\}$ is a sequence of orthogonal projections $\{E_i\}$ ($E_i^2 = E_i$ and $E_iE_j = 0$ if $i \neq j$) defined by $E_i(x) = x_i$ if $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_j$, $x_j \in M_j$. If each E_i is continuous the basis is called a *τ-Schauder basis* of subspaces (τ-Sbos). This concept was first systematically studied (independently) by Mazur and McArthur, although the notion essentially dates back to Grinblyum [8]. We remark that a τ-Schauder basis of one-dimensional subspaces coincides with the notion of τ-Schauder basis of vectors (τ-Sbov). (A very good discussion of basis of vectors in linear topological spaces can be found in [1].)

In this paper we study τ-Schauder bases of subspaces where τ is the norm topology on a Banach space X or the w* or bounded w*-topology on X^* or X^{**}. In speaking of the "τ-Sbos $\{M_i, E_i\}$" we shall mean the basis $\{M_i\}$ and the associated projections. If the norm topology is under consideration we drop the prefix and speak of Schauder bases of subspaces (Sbos) and Schauder bases of vectors (Sbov).

A Sbos $\{M_i, E_i\}$ is *shrinking* if $\{R(E_i^*)\}$ where $R(E_i^*)$ denotes the range of the adjoint of E_i, is a Sbos for X^*. In the one-dimensional case

* This paper is from Chapter III of the author's dissertation, *Basic Sequences, Bases and Weak*-Bases in Banach Spaces*, Florida State University, 1963. It was partially supported by the National Science Foundation Grant No. NSF-GP-2179. The author wishes to thank Professor C. W. McArthur for helpful suggestions regarding this paper.