Sur les suites faiblement convergentes dans l'espace L

par

W. SZLENK (Warszawa)

Soit X un espace de Banach. Nous dirons que X *admet la propriété* S, si pour toute suite (x_n), $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, faiblement convergente vers $x_0 \in X$ il existe une suite partielle (x_{n_i}) telle que

$$y_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i} \to x_0 .$$

On sait que les espaces l et c admettent cette propriété. Banach et Saks [1] ont démontré en 1930 que l'espace L^p des fonctions réelles à p-ième puissance sommable dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ et l'espace l^p des séries de nombres absolument convergentes à p-ième puissance admettent également la propriété S pour $p > 1$, et ensuite Kakutani [4] a généralisé en 1938 leur résultat, à savoir il a démontré que tout espace uniformément convexe admet cette propriété (les espaces L^p et l^p pour $p > 1$ sont uniformément convexes; voir [2]).

Dans cette note nous allons démontrer que l'espace L des fonctions réelles sommables dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ admet aussi la propriété S. Incompatible avec ce résultat, la remarque 2.5 dans [1] est fausse.

Introduisons la notation suivante: si (x_n) est une suite d'éléments de l'espace de Banach X et $x_0 \in X$, alors $x_n \underset{\mathrm{w}}{\to} x_0$ désigne que la suite (x_n) converge faiblement vers x_0.

THÉORÈME. *Si $x_n \underset{\mathrm{w}}{\to} x_0$, $x_0, x_n \in L$ $(n = 1, 2, \ldots)$, il existe une suite croissante d'indices (n_i) telle que*

$$\lim_{p\to\infty} \left\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i} - x_0 \right\| = 0 .$$

On sait ([3], ch. IV, § 8, th. 9, et corollary 10) que pour que $x_n \underset{\mathrm{w}}{\to} x_0$, $x_n = x_n(t) \in L$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 = x_0(t) \in L$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément:

(i) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $\int_E |x_n(t)|\,dt < \varepsilon$, où $n = 1, 2, \ldots$, pour tout ensemble E de mesure $< \eta$ de valeurs $t \in \langle 0, 1\rangle$.

(ii) $\lim_{n=\infty} \int_E x_n(t)\,dt = \int_E x_0(t)\,dt$ pour tout E mesurable, contenu dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$.

La condition (i) implique la condition suivante:

(iii) il existe $M > 0$ tel que

$$\|x_n\| = \int_0^1 |x_n(t)|\,dt \leqslant M \qquad \text{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Si

$$\|x\|_2 = \Big(\int_0^1 x_n^2(t)\,dt\Big)^{1/2}$$

pour $x = x(t) \in L^2$, on a

Lemme 1[1]. *Si $x_n, x_0 \in L^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $x_n \underset{\mathrm{w}}{\to} x_0$, il existe une suite croissante d'indices (n_i) telle que*

$$\lim_{p=\infty} \sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{n_{i_k}} - x_0 \Big\| = 0.$$

Démonstration. On peut supposer que $x_0 = 0$; dans le cas contraire il suffit de remplacer x_n par $x_n - x_0$. Nous allons déterminer la suite (n_i) par récurrence. Soit $n_1 = 1$ et supposons que les indices $n_1, n_2, \ldots, n_i$ soient déterminés. Comme

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 x_n(t) x_{n_k}(t)\,dt = 0 \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, i,$$

il existe $n_{i+1} > n_i$ tel que

$$\int_0^1 x_{n_k}(t) x_{n_{i+1}}(t)\,dt < \frac{1}{i+1} \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, i.$$

La suite (n_i) ainsi définie satisfait à la conclusion du lemme. En effet, d'après (iii) il existe un nombre $M > 0$ tel que $\|x_n\|_2 \leqslant M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, donc pour $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ on a

$$\Big\| \sum_{k=1}^{p} x_{n_{i_k}} \Big\|_2^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_{n_{i_k}}\|_2^2 + 2 \sum_{1\leqslant j<k\leqslant p} \int_0^1 x_{n_{i_j}}(t) x_{n_{i_k}}(t)\,dt$$
$$\leqslant pM^2 + 2 \sum_{k=2}^{p} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{i_k} = pM^2 + 2 \sum_{k=2}^{p} (k-1) \frac{1}{i_k} \leqslant p(M^2+2)$$

[1] En principe, ce lemme est connu, voir [6], p. 80.

et par conséquent

$$\Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{n_{i_k}} \Big\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{M^2+2}{p}},$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant démontrer

Lemme 2. *Soit $x_n \in L$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $x_n \underset{\mathrm{w}}{\to} 0$; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite croissante d'indices (n_i) telle que*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{n_{i_k}} \Big\| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. En posant

$$E_{n,m} = \{t\colon |x_n(t)| \geqslant m\}, \qquad n, m = 1, 2, \ldots,$$

on a

$$\|x_n\| = \int_0^1 |x_n(t)|\,dt \geqslant \int_{E_{n,m}} |x_n(t)|\,dt \geqslant m|E_{n,m}|.$$

Par suite $|E_{n,m}| \leqslant \|x_n\|/m$, donc en vertu de la condition (iii) on a $|E_{n,m}| \leqslant M/m$. En appliquant la condition (i) (dans laquelle on remplace ε par $\varepsilon/3$) on déduit que si m_0 satisfait à la condition $M/m_0 < \eta$, on a

$$\int_{E_{n,m_0}} |x_n(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Définissons maintenant une suite (y_n) comme il suit:

$$y_n = y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{pour} \quad t \in E_{n,m_0}, \\ 0 & \text{pour} \quad t \in \langle 0, 1\rangle - E_{n,m_0}. \end{cases}$$

Comme $|x_n(t) - y_n(t)| \leqslant m_0$ pour tout $t \in \langle 0, 1\rangle$, donc $x_n - y_n \in L^2$ et $\|x_n - y_n\|_2 \leqslant m_0$. Dans l'espace L^2 toute boule étant faiblement compacte, il existe dans cet espace une suite croissante d'indices (n_i) telle que $x_{n_i} - y_{n_i} \underset{\mathrm{w}}{\to} z$; en vertu du lemme 1 on peut supposer que

$$\lim_{p=\infty} \sup_{i_1<\ldots<i_1} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} (x_{n_{i_k}} - y_{n_{i_k}}) - z \Big\|_2 = 0. \tag{1}$$

La suite $(x_{n_i} - y_{n_i})$ étant faiblement convergente vers z dans L^2, elle est donc faiblement convergente vers z dans L. Dans ce dernier espace

$x_{n_i} \underset{w}{\to} 0$, donc $y_{n_i} \underset{w}{\to} -z$ et en outre

$$\|y_{n_i}\| = \int_{E_{m,n_0}} |x_{n_i}(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

donc $\|z\| \leqslant \varepsilon/3$ (dans un espace de Banach toute boule est faiblement fermée). En vertu de (1)

$$\sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} (x_{n_{i_k}} - y_{n_{i_k}}) - z \Big\| \leqslant \sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} (x_{n_{i_k}} - y_{n_{i_k}}) - z \Big\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout p assez grand, donc on a

$$\sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{n_{i_k}} \Big\|$$

$$\leqslant \sup_{i_1<\ldots<i_p} \left(\Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} (x_{n_{i_k}} - y_{n_{i_k}}) - z \Big\| + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \|y_{n_{i_k}}\| + \|z\| \right) \leqslant \varepsilon$$

pour tout p assez grand. En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient la conclusion du lemme.

Démonstration du théorème 1. Comme précédemment, on peut se borner au cas $x_0 = 0$. En vertu du lemme 2, pour tout entier $r \geqslant 1$ il existe une suite croissante $(n_{r,i})$ telle que

$$\text{(2)} \qquad \overline{\lim_{p=\infty}} \sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{n_{r,i_k}} \Big\| \leqslant \frac{1}{r}.$$

On peut évidemment supposer que la suite $(n_{r+1,i})$ est une suite partielle de la suite $(n_{r,i})$. La suite $(n_i) = (n_{i,i})$ répond aux conditions de l'énoncé. En effet, elle est croissante et pour tout $t = 1, 2, \ldots$ on a pour $p > r$

$$\Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i} \Big\| \leqslant \Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{r} x_{n_i} \Big\| + \frac{p-r}{p} \Big\| \frac{1}{p-r} \sum_{i=r+1}^{r} x_{n_i} \Big\|$$

$$\leqslant \Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{r} x_{n_i} \Big\| + \Big\| \frac{1}{p-r} \sum_{i=1}^{p-r} x_{n_{r+i}} \Big\|.$$

Par suite

$$\text{(3)} \qquad \overline{\lim_{p=\infty}} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i} \Big\| \leqslant \overline{\lim_{p=\infty}} \Big\| \frac{1}{p-r} \sum_{i=1}^{p-r} x_{n_{r+i}} \Big\| = \overline{\lim_{p=\infty}} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_{r+i}} \Big\|.$$

La suite (n_{r+i}) est une suite partielle de la suite $(n_{r,i})$, donc

$$\Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_{r+i}} \Big\| \leqslant \sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{n_{r,i_k}} \Big\|$$

et ensuite, en vertu de (2) et (3),

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i} \Big\| \leqslant \frac{1}{r} \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, \ldots,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 1. Nous dirons que l'espace de Banach X admet la propriété S_u, si pour toute suite (x_n), $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, faiblement convergente vers $x_0 \in X$ il existe une suite partielle (x_{n_i}) telle que

$$\lim_{p=\infty} \sup_{i_1<\ldots<i_p} \Big\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_{i_k}} - x_0 \Big\| = 0.$$

A. Pełczyński a remarqué que les propriétés S et S_u sont équivalentes.

Remarque 2. En appliquant la remarque 1 on peut déduire le théorème suivant (A. Pełczyński):

THÉORÈME A. *Soient X et Y deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire continue i de X dans Y. Supposons que pour toute suite (y_n), $y_n \in Y$, faiblement convergente vers* 0 *et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite (x_n), $x_n \in X$, telle que $\|ix_n - y_n\| < \varepsilon$ pour tout n et $x_n \underset{w}{\to} 0$; si l'espace Y admet la propriété* S, *l'espace X l'admet également.*

Remarque. S. Mazur a démontré que tout espace de Orlicz (pour la définition voir par exemple [5]) admet la propriété S. La démonstration n'a pas été publiée.

Les autres résultats de l'auteur concernant la propriété S seront également publiés dans Studia Mathematica.

Travaux cités

[1] S. Banach et S. Saks, *Sur la convergence forte dans les champs L^p*, Studia Math. 2 (1930), p. 51-57.

[2] J. A. Clarckson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), p. 396-414.

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, New York - London 1958.

[4] S. Kakutani, *Weak convergence in uniformly convex spaces*, Tôhoku Math. J. 45 (1938), p. 188-193.

[5] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва 1958.

[6] F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1953.

Reçu par la Rédaction le 27. 7. 1964