На основании определения возьмем функции

$$a(t) = p_1(t), \quad \text{если} \quad t\in[0,T) \quad \text{и} \quad a(T) = \lim_{t\to T-} p_1(t),$$

$$b(t) = q_1(t), \quad \text{если} \quad t\in[0,T) \quad \text{и} \quad b(T) = \lim_{t\to T-} q_1(t).$$

Сразу видно, что $a, b\in P[0,T]$ и $\frac{a}{b}\in\mathscr{R}[0,T]$.

Пусть f будет отображением кольца $\mathscr{R}[0,T)$ на кольцо $\mathscr{R}[0,T]$ определенное таким образом, чтобы

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b}.$$

Ясно, что преобразование f взаимно однозначно и кроме того

$$f\left(\frac{p}{q}+\frac{u}{v}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)+f\left(\frac{u}{v}\right), \qquad f\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{u}{v}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)\cdot f\left(\frac{u}{v}\right).$$

Это значит, что f изоморфное отображение и таким образом кольца $\mathscr{R}[0,T)$ и $\mathscr{R}[0,T]$ изоморфны, что и требовалось доказать.

Литература

[1] J. Mikusiński, *Le calcul opérationnel d'intervalle fini*, Studia Mathematica 15 (1956), p. 225-251.

[2] — *Operational calculus*, Warszawa 1959.

Reçu par la Rédaction le 15. 4. 1964

Zu einigen Konvergenzeigenschaften von Folgen zufälliger Elemente

von

W. RICHTER (Dresden)

In der vorliegenden Note soll auf eine neue Konvergenzeigenschaft von Folgen zufälliger Elemente Y_n eingegangen werden, deren Werte in einem vollständigen separablen metrischen Raum M liegen. Die Begriffe *eine Folge* $\{Y_n\}$ *konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen ein zufälliges Element* Y und *eine Folge* $\{Y_n\}$ *ist mischend mit dem Limes* μ erweisen sich in ihren Eigenschaften in gewissem Sinne als einander entgegengesetzt. Ist $\{Y_n\}$ mischend mit dem Limes μ und ist μ ein eigentliches Wahrscheinlichkeitsmaß, so gibt es kein zufälliges Element Y mit der Eigenschaft, daß $\{Y_n\}$ in Wahrscheinlichkeit gegen Y konvergiert und daß von Y in M induzierte Maß μ_Y gleich μ ist.

Dennoch haben beide Begriffe auch gemeinsames. In beiden Fällen konvergiert die Folge $\{\mu_{Y_n}\}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße von $\{Y_n\}$ schwach gegen einen Limes μ. Es stellt sich heraus, daß es daneben noch eine stärkere Konvergenzeigenschaft gibt, die sowohl die in Wahrscheinlichkeit konvergenten als auch die mischenden Folgen besitzen. Wir nennen diese die *stabile* (P)-*Konvergenz einer Folge* $\{Y_n\}$ (Definition 4). Für stabil (P)-konvergente Folgen $\{Y_n\}$ zufälliger Elemente mit Werten aus einem metrischen Raum M gelten Übertragungssätze, welche die in [13] abgeleiteten Resultate verallgemeinern und in gewisser Weise abrunden ([14]-[16]).

§ 1. Zufällige Elemente und Maße in metrischen Räumen. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$, bestehend aus einer abstrakten Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathfrak{B}_\Omega$ von Teilmengen von Ω und einer auf $\mathfrak{B}_\Omega$ definierten Wahrscheinlichkeit P. Daneben sei ein meßbarer metrischer Raum $[M, \varrho, \mathfrak{B}_M]$ vorgegeben, bestehend aus einer abstrakten Menge M, einer auf $M\times M$ definierten Metrik ϱ und der von den abgeschlossenen Mengen des metrischen Raumes $[M, \varrho]$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{B}_M$ von Teilmengen von M. M sei in der Metrik ϱ vollständig und separabel. Die Annahme der Separabilität von M ist nicht überall erforderlich und wird hier nur der Bequemlichkeit halber generell getroffen (siehe aber z. B. [6], Satz 3, und demgegenüber [9]). CA bezeichne die abgeschlossene Hülle einer Menge $A\subseteq M$.

Wir betrachten meßbare Abbildungen Y von Ω in M. Das sind Funktionen auf Ω mit der Eigenschaft, daß die Urbilder bezüglich Y von Mengen aus $\mathfrak{B}_M$ in $\mathfrak{B}_\Omega$ liegen. Solche Funktionen Y heißen *zufällige Elemente aus* M.

Wenn wir im folgenden von Maßen in $[M, \varrho, \mathfrak{B}_M]$ (oder kurz, in M) sprechen, so meinen wir damit (vgl. [10], § 1.2) auf $\mathfrak{B}_M$ definierte reellwertige nichtnegative σ-additive Mengenfunktionen μ mit den Eigenschaften

(i) $\mu(M) < +\infty$;

(ii) ist $\mu(A) = 0$ und $B \subseteq A$, so ist $B \epsilon \mathfrak{B}_M$.

Die in [10], § 1.2, geforderten Eigenschaften (μ. 4) und (μ. 5) sind im vorliegenden Fall automatisch erfüllt.

Durch die Definition

$$\mu_Y(A) = \mathrm{P}(Y \epsilon A) \quad \text{für} \quad A \epsilon \mathfrak{B}_M$$

wird jedem zufälligen Element Y eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ_Y über $[M, \mathfrak{B}_M]$ zugeordnet. Wir wollen im folgenden nur solche zufälligen Elemente Y betrachten, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung μ_Y auch die oben genannte Eigenschaft (ii) besitzt.

Mit einem jeden Maß μ in $[M, \varrho, \mathfrak{B}_M]$ ist die Menge seiner Stetigkeitsmengen eng verbunden (siehe [10], § 1.3). Eine Menge $A \epsilon \mathfrak{B}_M$ heißt eine *μ-Stetigkeitsmenge*, wenn

$$\mu(CA \cap C\bar{A}) = 0$$

ist. Es bezeichne $\mathfrak{S}_\mu$ die Menge aller μ-Stetigkeitsmengen. $\mathfrak{S}_\mu$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{B}_M$. Sind μ_1, μ_2 Maße über $[M, \varrho, \mathfrak{B}_M]$ und ist $\mu_1 \ll \mu_2$ (μ_1 absolut stetig bezüglich μ_2), so ist

$$\mathfrak{S}_{\mu_1} \supseteq \mathfrak{S}_{\mu_2}. \tag{1}$$

Die Menge $\mathfrak{M}$ der Maße über $[M, \varrho, \mathfrak{B}_M]$ wird durch die Prochorovsche Metrik $L(\mu_1, \mu_2)$ (siehe [10], § 1.4) zu einem vollständigen separablen metrischen Raum. Die Konvergenz einer Folge $\{\mu_n\}$ von Maßen gegen ein Maß μ in dieser L-Metrik ist äquivalent der schwachen Konvergenz $\mu_n \Rightarrow \mu$ im Sinne

$$\mu_n(A) \to \mu(A) \text{ für alle } A \epsilon \mathfrak{S}_\mu.$$

§ 2. Klassische Konvergenzbegriffe. Wir kommen nun zu den Konvergenzbetrachtungen für Folgen zufälliger Elemente.

Es sei $\mathfrak{D}$ die Menge der zufälligen Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ mit Werten aus M. Eine Metrik kann man in $\mathfrak{D}$ z. B. folgendermaßen ein-

führen ([2], [3]):

$$\varrho^*(X, Y) = \inf_{\varepsilon>0}\{\mathrm{P}(\varrho(X, Y) \geqslant \varepsilon) + \varepsilon\}.$$

$[\mathfrak{D}, \varrho^*]$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Definition 1. Eine Folge $\{Y_n\}$ zufälliger Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ *konvergiert in der Wahrscheinlichkeit* P *gegen ein zufälliges Element* Y, kurz,

$$Y_n \underset{\mathrm{P}}{\to} Y,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\varrho(Y_n, Y) \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Lemma 1 ([2], S. 311). *Es gilt* $Y_n \underset{\mathrm{P}}{\to} Y$ *genau dann, wenn* $\varrho^*(Y_n, Y) \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Lemma 2 ([2], S. 311). *Ist* $Y_n \underset{\mathrm{P}}{\to} Y$, *so gilt*

$$\mu_{Y_n} \Rightarrow \mu_Y.$$

Lemma 3 ([2], S. 311; [8]). *Es gilt* $Y_n \underset{\mathrm{P}}{\to} Y$ *genau dann, wenn für jedes* $A \epsilon \mathfrak{S}_\mu$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n \epsilon A, Y \epsilon A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n \epsilon A) = \mu_Y(A).$$

Lemma 4. *Gilt* $Y_n \underset{\mathrm{P}}{\to} Y$ *und ist* $D \epsilon \mathfrak{B}_\Omega$, $\mathrm{P}(D) > 0$, *so gilt auch*

$$Y_n \underset{\mathrm{P}_D}{\to} Y,$$

wobei P_D *die bedingte Wahrscheinlichkeit über* $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega]$ *bei gegebenem* $D \epsilon \mathfrak{B}_\Omega$ *bezeichnet.*

Definition 2. Eine Folge $\{Y_n\}$ zufälliger Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ *konvergiert* (P)-*fast sicher gegen ein zufälliges Element* Y, kurz,

$$Y_n \xrightarrow[\text{(P)-f.s.}]{} Y,$$

wenn

$$\mathrm{P}(\varrho(Y_n, Y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0) = 1$$

ist.

Lemma 5. *Wenn* $Y_n \xrightarrow[\text{(P)-f.s.}]{} Y$, *so ist auch*

$$Y_n \xrightarrow[(\mathrm{P}_D)\text{-f.s.}]{} Y$$

bei beliebigem $D \epsilon \mathfrak{B}_\Omega$ *mit* $\mathrm{P}(D) > 0$. *Außerdem gilt*

$$Y_n \underset{\mathrm{P}}{\to} Y.$$

DEFINITION 3. Eine Folge $\{Y_n\}$ zufälliger Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ heiße (P)-*konvergent mit dem Limes* μ, wenn

$$\mu_{Y_n} \Rightarrow \mu \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

§ 3. Stabil (P)-konvergente Folgen zufälliger Elemente.

DEFINITION 4. Eine Folge $\{Y_n\}$ zufälliger Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ heiße *stabil* (P)-*konvergent mit dem Limes* $\{\mu^D\}$, wenn für jedes $D \in \mathfrak{B}_\Omega$ mit $\mathrm{P}(D) > 0$ die Folge $\{Y_n\}$ (P_D)-konvergent mit dem Limes μ^D ist.

Dabei ist $\{\mu^D\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $[M, \mathfrak{B}_M]$; wir schreiben $\mu^\Omega = \mu$.

A. Rényi führt in [12] analog den Begriff einer „stabilen Folge von Zufallsgrößen" ein. Auf ihn geht auch das folgende Lemma zurück:

LEMMA 6. *Ist $\{Y_n\}$ stabil* (P)-*konvergent, so definiert bei festem $A \in \mathfrak{S}_\mu$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\{Y_n \in A\} \cap D)$ ein bezüglich* P *absolut stetiges σ-additives Maß Q_A über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega]$*:

$$\mathrm{Q}_A(D) = \mu^D(A)\mathrm{P}(D).$$

Speziell ist $\mathrm{Q}_A(\Omega) = \mu(A)$. Für P-*Nullmengen D werde $\mu^D(A) = 0$ gesetzt.*

SATZ 1. *Gilt $Y_n \underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow} Y$, so ist $\{Y_n\}$ stabil* (P)-*konvergent. Der Limes ist definiert durch*

$$\mu^D(A) = \mathrm{P}_D(Y \in A) \qquad (A \in \mathfrak{S}_\mu)$$

bei beliebigem $D \in \mathfrak{B}_\Omega$ mit $\mathrm{P}(D) > 0$.

Beweis. Lemma 4 und Lemma 2 zeigen, daß bei beliebigem $D \in \mathfrak{B}_\Omega$ mit $\mathrm{P}(D) > 0$ die Folge $\{Y_n\}$ (P_D)-konvergent ist, und geben die Grenzverteilung, ausgedrückt durch das zufällige Element Y, an.

§ 4. Mischende Folgen zufälliger Elemente.

Auf der Suche nach weiteren Beispielen von stabilen (P)-konvergenten Folgen stößt man auf den äußerst fruchtbaren Begriff der mischenden Folgen zufälliger Elemente (über mischende Folgen von Zufallsgrößen und zufälligen Ereignissen siehe [11], [17]).

DEFINITION 5. Eine Folge $\{Y_n\}$ zufälliger Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ heiße (P)-*mischend mit dem Limes* μ, wenn für jedes $D \in \mathfrak{B}_\Omega$ und für jedes $A \in \mathfrak{S}_\mu$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\{Y_n \in A\} \cap D) = \mu(A)\mathrm{P}(D)$$

gilt.

SATZ 2. *Eine Folge $\{Y_n\}$ ist genau dann* (P)-*mischend mit dem Limes μ, wenn $\{Y_n\}$ stabil* (P)-*konvergent ist und für die Grenzmaße μ^D gilt*:

$$\mu^D = \mu \quad \text{für alle } D \in \mathfrak{B}_\Omega \text{ mit } \mathrm{P}(D) > 0.$$

Der Begriff einer (P)-mischenden Folge erweist sich in den Fällen als fruchtbar, wo das Grenzmaß μ nicht in einem Punkt von M konzentriert ist, wo es also wenigstens eine Menge $A \in \mathfrak{S}_\mu$ gibt mit $0 < \mu(A) < 1$. Solche Maße nennen wir kurz *eigentliche Maße*.

LEMMA 7. *Es sei $\{Y_n\}$ eine* (P)-*mischende Folge zufälliger Elemente mit eigentlichem Grenzmaß μ. Dann gibt es kein zufälliges Element Y mit $Y_n \underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow} Y$.*

Beweis (vgl. [11]). Angenommen, es gäbe solch ein Element Y. Dann wäre, nach Lemma 2, $\mu_{Y_n} \Rightarrow \mu_Y = \mu$. Außerdem gibt es nach Voraussetzung ein $A \in \mathfrak{S}_\mu$ mit $0 < \mu_Y(A) < 1$. Auf Grund der Mischeigenschaft gilt dann mit $D = \{Y \in A\}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n \in A,\ Y \in A) = \mu_Y^2(A),$$

während andererseits nach Lemma 3

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n \in A,\ Y \in A) = \mu_Y(A)$$

gelten müßte. Dies ist ein Widerspruch.

Will man nachprüfen, ob eine vorgelegte Folge $\{Y_n\}$ (P)-mischend ist oder nicht, dann benutzt man vorteilhaft die folgende sogenannte *Polarisationseigenschaft* mischender Folgen. Man erhält sie unmittelbar aus der von A. Rényi [11] für mischende Ereignisfolgen bewiesenen analogen Eigenschaft.

LEMMA 8. *Es sei $\{Y_n\}$* (P)-*konvergent mit dem Limes μ. Dann ist $\{Y_n\}$* (P)-*mischend mit dem Limes μ genau dann, wenn für jedes k $(k = 1, 2, \ldots)$ und für alle $A \in \mathfrak{S}_\mu$ die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n \in A,\ Y_k \in A) = \mu(A)\mathrm{P}(Y_k \in A)$$

besteht.

Eine weitere nützliche Eigenschaft wird in dem folgenden Lemma ausgesprochen:

LEMMA 9. *Ist $\{Y_n\}$* (P)-*mischend mit dem Limes μ und ist $C \in \mathfrak{B}_\Omega$ ein Ereignis mit $\mathrm{P}(C) > 0$, dann ist $\{Y_n\}$ auch (P_C)-mischend mit dem gleichen Limes μ.*

Ganz naturgemäß ist die Frage nach einem umfassenden Überblick über mischende Folgen. Es soll an dieser Stelle nur gezeigt werden, daß es „hinreichend viele" mischende Folgen zufälliger Elemente gibt, daß sehr viele bekannte Grenzwertsätze gerade für solche Folgen ausgesprochen worden sind und sich daher die Beschäftigung mit diesem Begriff lohnt. Nicht zuletzt bestätigt sich dies in den Übertragungssätzen (siehe [13]-[16]).

Satz 3. *Es sei $\{Y_n\}$ eine Folge unabhängiger zufälliger Elemente. Es gelte $\mu_{Y_n} \Rightarrow \mu$. Dann ist $\{Y_n\}$ (P)-mischend mit dem Limes μ.*

§ 5. Mischeigenschaft bei Extremwerten unabhängiger Stichproben. Nach einer brieflichen Mitteilung von A. Rényi sind (im Falle $M = R_1$) die geeignet zentrierten und normierten Folgen der Maxima unabhängiger Stichproben „im allgemeinen" mischend. Wir wollen diese Aussage präzisieren.

Satz 4. *Es sei $\{X_k\}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen, deren Verteilungsfunktion $V(x)$ zum Einzugsbereich der Grenzverteilungstypen $\Phi_a(x)$ bzw. $\Psi_a(x)$ des Maximums $W_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ gehöre* (siehe [5]). *Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ $(b_n > 0)$ zwei Konstantenfolgen mit der Eigenschaft, daß die Verteilung von*

$$Y_n = (W_n - a_n) b_n^{-1}$$

für $n \to \infty$ gegen die Verteilung Φ_a bzw. Ψ_a konvergiert, dann ist die Folge $\{Y_n\}$ mischend.

Beweis. Zunächst machen wir über $V(x)$ noch keine so speziellen Annahmen. Für geeignete Konstantenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ $(b_n > 0)$ mögen die Verteilungen von Y_n schwach gegen eine eigentliche Grenzverteilung mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ konvergieren. Die Grenzverteilungsfunktionen der Maxima sind stetig [5]. Wir gehen von Lemma 8 aus. Zunächst einmal gilt

$$W_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j = \max\big(\max_{1 \leqslant j \leqslant k} X_j, \max_{k+1 \leqslant i \leqslant n} X_i\big)$$

und somit

$$\{Y_n < x, Y_k < x\} =$$

$$= \{\max_{1 \leqslant j \leqslant k} X_j < \min(b_n x + a_n; b_k x + a_k);\ \max_{k+1 \leqslant j \leqslant n} X_j < b_n x + a_n\}.$$

Man erkennt hieran folgendes. Ist

(a) für hinreichend große n für ein bestimmtes x

$$(b_n - b_k)x + (a_n - a_k) \geqslant 0,$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{b_{n+k}} = 1; \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+k} - a_n}{b_n} = 0,$

dann gilt auf Grund der Unabhängigkeit der X_j für diesen Wert x

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n < x, Y_k < x) = F(x)\mathrm{P}(Y_k < x). \tag{2}$$

Besteht letztere Beziehung für alle x, dann ist die Folge $\{Y_n\}$ mischend mit dem Limes $F(x)$ (hinsichtlich (b) vgl. [5]). Um nachzuprüfen, wann diese beiden Bedingungen erfüllt sind, untersuchen wir einzeln die drei möglichen Grenzverteilungen $F(x)$.

I. Es sei

$$F(x) = \Phi_a(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-a}) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Für die normierende Folge $\{b_n\}$ gilt hier [4] bei beliebigem $\varepsilon > 0$ für $n \to \infty$

$$n^{1/a-\varepsilon} = o(b_n) \quad \text{und} \quad b_n = o(n^{1/a+\varepsilon}).$$

Damit ist die erste der Bedingungen (b) erfüllt. Die zweite gilt ebenfalls, denn erstens ist $a_n = 0$ eine spezielle zentrierende Folge, und für jede weitere zentrierende Folge $\{a_n'\}$ gilt notwendigerweise (siehe [5])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n' - a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n'}{b_n} = 0.$$

Somit ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+k}' - a_n'}{b_n} = 0.$$

Für negative x ist $F(x) = 0$, und mit der Bedingung (b) folgt für $n \to \infty$ die Beziehung

$$\mathrm{P}(W_{n-k} < b_n x + a_n) \to 0.$$

Für negative x ist die Gleichung (2) somit erfüllt.

Nun gilt aber bei beliebigem $x \geqslant 0$ für $n \to \infty$

$$\frac{b_n - b_k}{b_n} x + \frac{a_n - a_k}{b_n} \to x.$$

Damit ist bei positivem x die Bedingung (a) und zugleich auch (2) nachgewiesen.

II. Es sei

$$F(x) = \Psi_a(x) = \begin{cases} \exp\big(-(-x)^a\big) & \text{für } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$(a > 0)$. Die normierende Folge $\{b_n\}$ genügt in diesem Fall bei beliebigem $\varepsilon > 0$ für $n \to \infty$ den Beziehungen (siehe [4], Lemma 3)

$$n^{-1/a-\varepsilon} = o(b_n) \quad \text{und} \quad b_n = o(n^{-1/a+\varepsilon}).$$

Damit ist die erste der Bedingungen (b) erfüllt.

Wenn die Verteilungsfunktion $V(x)$ der Zufallsgrößen X_j zum Einzugsbereich von $\Psi_a(x)$ gehört, dann gibt es eine Zahl a mit der Eigenschaft

$$V(a+0) = 1 \quad \text{und} \quad V(a-\varepsilon) < 1 \text{ bei beliebigem } \varepsilon > 0.$$

Die Folge $a_n = a$ ist eine spezielle zentrierende Folge. Für jede weitere zentrierende Folge $\{a'_n\}$ gilt notwendigerweise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a'_n - a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a'_n - a}{b_n} = 0.$$

Folglich ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a'_{n+k} - a'_n}{b_n} = 0.$$

Mit der Bedingung (b) erhält man bei beliebigem x für $n \to \infty$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{n-k} < b_n x + a_n) = \lim_{n\to\infty} P(W_n < b_n x + a_n) = \Psi_a(x).$$

Außerdem erkennt man, daß bei beliebiger zentrierender Folge $\{a'_n\}$, für $n\to\infty$, $a'_n - a \to 0$ strebt und zwar schneller als $\{b_n\}$. Daher gilt bei beliebigem x

$$\lim_{n\to\infty} (b_n x + a_n) = a,$$

und es ist in jedem Falle

$$\lim_{n\to\infty} P\big(W_k < \min(b_n x + a_n,\, b_k x + a_k)\big) = P(Y_k < x).$$

Damit ist auch im Fall II die Folge (Y_n) mischend.

III. Es sei

$$F(x) = \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

In diesem Fall genügt die normierende Folge $\{b_n\}$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ für $n \to \infty$ den Beziehungen (siehe [4], Lemma 4)

$$n^{-\varepsilon} = o(b_n) \quad \text{und} \quad b_n = o(n^{\varepsilon}).$$

Damit ist die erste der Bedingungen (b) erfüllt. Es gilt auch

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} P\big(W_k < \min(b_n x + a_n,\, b_k x + a_k)\big) = P(W_k < b_k x + a_k)$$

bei beliebigem x. Dies folgt aus der Tatsache, daß für $n \to \infty$

$$(4) \qquad b_n = o(a_n)$$

ist (siehe Beweis von Lemma 4 in [4]). Ist $V(x) < 1$ für jedes x, so muß außerdem $a_n \to +\infty$ streben, und für $n \to \infty$ gilt $b_n x + a_n \to +\infty$ bei beliebigem festem x. Ist jedoch $V(a+0) = 1$ für eine Zahl a und gleichzeitig $V(x) < 1$ für alle $x < a$, dann gilt $a_n \uparrow a$ für $n \to \infty$ und wegen (4) $b_n \downarrow 0$. Daher bei beliebigem x ist $\lim_{n\to\infty} (b_n x + a_n) = a$, und die Gleichheit in (3) ist bei beliebigem x nachgewiesen.

Ob in dem vorliegenden Fall die Folge $\{Y_n\}$ (P)-mischend ist oder nicht, hängt somit nur davon ab, ob bei vorgegebener Verteilung $V(x)$ der Größen X_j die zweite Bedingung in (b) erfüllt ist oder nicht. In den bekannten Fällen, wo z. B. X_j normalverteilt oder logarithmisch normalverteilt ist, eine doppelte Exponentialverteilung oder auch eine negative Exponentialverteilung besitzt, ist die Bedingung erfüllt. Vermutlich läßt sie sich auch allgemein nachweisen.

Die hier für das Maximum bewiesenen Aussagen lassen sich in bekannter Weise auch auf das Minimum übertragen.

Ausgehend von Satz 4 erhält man folgenden

Satz 5. *Es sei $\{X_k\}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen. Ihre Verteilungsfunktion $V(x)$ sei so beschaffen, daß*

(a) *für geeignet gewählte Konstantenfolgen $\{a_n^{(1)}\}$, $\{b_n^{(1)}\}$ $(b_n^{(1)} > 0)$, $\{a_n^{(2)}\}$, $\{b_n^{(2)}\}$ $(b_n^{(2)} > 0)$ die Folgen*

$$Y_n^{(1)} = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n) - a_n^{(1)}}{b_n^{(1)}} \quad \text{und} \quad Y_n^{(2)} = \frac{\min(X_1, \ldots, X_n) - a_n^{(2)}}{b_n^{(2)}}$$

eigentliche Grenzverteilungen besitzen,

(b) *sowohl $\{Y_n^{(1)}\}$ als auch $\{Y_n^{(2)}\}$ (P)-mischende Folgen sind.*

Dann ist auch die Folge der Vektoren

$$Y_n = (Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)})$$

(P)-*mischend.*

Beispiel. Es sei $\{X_k\}$ eine Folge unabhängiger in $[0,1]$ gleichmäßig verteilter Zufallsgrößen. Setzt man

$$Y_n^{(1)} = n(\max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j - 1), \qquad Y_n^{(2)} = n \min_{1\leqslant j\leqslant n} X_j,$$

so gilt nach Satz 5 bei beliebigem Ereignis $D \in \mathfrak{B}_\Omega$ mit $P(D) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n^{(1)} < x_1,\, Y_n^{(2)} > x_2 \mid D) = \Psi_1(x_1)\big(1 - \Psi_1(x_2)\big).$$

Wenn eine Folge $Y_n = (Y_n^{(1)}, \ldots, Y_n^{(s)})$ zufälliger Vektoren (P)-mischend ist mit dem Limes μ (μ-Wahrscheinlichkeitsmaß in R_s), dann sind auch die Folgen der einzelnen Komponenten $\{Y_n^{(j)}\}$ (P)-mischend. Der umgekehrte Schluß von der Mischeigenschaft der Komponenten auf die Mischeigenschaft des gesamten Vektors ist nur in Spezialfällen möglich. So z. B. wenn die Folgen $\{Y_n^{(j)}\}$ in ihrer Gesamtheit voneinander unabhängig sind.

§ 6. Mischeigenschaft bei Summen unabhängiger zufälliger Elemente. Wir haben

Lemma 10 ([11]). *Es sei $\{X_k\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, P]$. Wir setzen $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$. Für geeignet gewählte*

Folgen $\{a_n\}$ reeller Zahlen und $\{b_n\}$ positiver Zahlen mit $b_n \to +\infty$ für $n \to \infty$ und eine Verteilungsfunktion $F(x)$ gelte

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big((Z_n - a_n)b_n^{-1} < x\big) = F(x)$$

an jeder Stetigkeitsstelle x von F. Dann ist die Folge

$$Y_n = (Z_n - a_n)b_n^{-1}$$

(P)-*mischend mit dem Limes F.*

In direkter Verallgemeinerung dieses Resultats von A. Rényi beweisen wir

SATZ 6. *Es sei $\{X_k\}$ eine Folge unabhängiger zufälliger Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ mit Werten aus einem separablen meßbaren Banachraum $[M, \mathfrak{B}_M]$. Es werde $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$ gesetzt. Für eine geeignete Folge $\{a_n\}$ von Elementen aus M, für eine Folge $\{T_n\}$ linearer beschränkter Operatoren über M mit*

$$\|T_n Z_k\| \xrightarrow[\mathrm{P}]{} 0 \tag{5}$$

für $n \to \infty$ und beliebiges k und für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ über $[M, \mathfrak{B}_M]$ gelte

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(T_n Z_n + a_n \in A) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathfrak{S}_\mu$.

Dann ist die Folge $Y_n = T_n Z_n + a_n$ (P)-*mischend mit dem Limes μ.*

Die Folge $\{a_n\}$ heiße eine *zentrierende Folge*, $\{T_n\}$ entsprechend eine *normierende Folge für $\{X_k\}$ bezüglich μ* [7].

Hinreichende Bedingungen für (5) werden durch folgenden Hilfssatz angegeben:

LEMMA 11. *Ist eine der Bedingungen*

(a) $\|T_n X_k\| \xrightarrow[\mathrm{P}]{} 0$ *für $n \to \infty$ und für alle k,*

(b) $\|T_n\| \to 0$ *für $n \to \infty$*

erfüllt, so ist die Voraussetzung (5) *in Satz* 6 *gegeben.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Inklusionskette von zufälligen Ereignissen aus $\mathfrak{B}_\Omega$: bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und beliebigem k gilt

$$\{\|T_n Z_n\| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \Big\{\sum_{j=1}^{k} \|T_n X_j\| \geqslant \varepsilon\Big\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \Big\{\|T_n X_j\| \geqslant \frac{\varepsilon}{k}\Big\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \Big\{\|X_j\| \geqslant \frac{\varepsilon}{k\|T_n\|}\Big\}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 6 sind speziell in der von Kandelaki und Sazonov [7] verallgemeinerten Fassung des zentralen Grenzwert-

satzes von Lindeberg und Feller gegeben. Wir betrachten normierte Folgen von Summen unabhängiger zufälliger Elemente X_k mit Werten aus einem separablen meßbaren Hilbertschen Raum $[H, \mathfrak{B}_H]$ ($EX_k = \theta$, $E\|X_k\|^2 < +\infty$, θ bezeichnet das Nullelement in H). Wenn die verallgemeinerte Lindebergsche Bedingung (Formel (9) in [7]) erfüllt ist, dann ist die Folge der Zufallsgrößen $\|T_n X_k\|$ für $n \to \infty$ infinitesimal, so daß die Bedingung (a) aus Lemma 11 gilt.

Beim Beweis des Satzes 6 wird zweimal von folgendem Lemma Gebrauch gemacht:

LEMMA 12 ([1], Satz 2.4). *Es seien $\{Y_n\}$, $\{V_n\}$ zwei Folgen zufälliger Elemente über $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ mit Werten aus einem separablen meßbaren Banachraum $[M, \mathfrak{B}_M]$. $\{Y_n\}$ sei* (P)-*konvergent mit dem Limes μ. Die Folge $\{V_n\}$ konvergiere in der Wahrscheinlichkeit* P *gegen das Nullelement θ des Raumes M. Dann ist auch die Folge $\{Y_n + V_n\}$* (P)-*konvergent mit dem Limes μ:*

$$\mu_{Y_n+V_n} \Rightarrow \mu.$$

Der diesem Lemma zugrundeliegende Sachverhalt ist von wesentlich allgemeinerer Natur. Wird jedoch zum Beispiel M als nichtseparabel angenommen, so muß man nach einer Bemerkung von J. Nedoma [9] im allgemeinen voraussetzen, daß mit Y_n und V_n auch $Y_n + V_n$ ein zufälliges Element des Raumes M ist.

Beweis von Satz 6. Es genügt offenbar zu zeigen, daß die in Lemma 8 angegebene Bedingung für alle hinreichend großen k erfüllt ist. Nach Voraussetzung ist die Folge $\{Y_n\}$ (P)-konvergent mit dem Limes μ. Bei beliebigem festem k gilt nach (5) für $n \to \infty$

$$T_n Z_k \xrightarrow[\mathrm{P}]{} \theta. \tag{6}$$

Folglich ist nach Lemma 12 die Folge

$$Y_n - T_n Z_k = T_n(Z_n - Z_k) + a_n$$

(P)-konvergent mit dem Limes μ. Das zufällige Element Y_k ist von dieser Folge unabhängig, so daß für alle $A \in \mathfrak{S}_\mu$ und für alle $B \in \mathfrak{S}_\mu$ für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(Y_n - T_n Z_k \in A,\ Y_k \in B) \\ &\quad = \mathrm{P}(Y_n - T_n Z_k \in A)\mathrm{P}(Y_k \in B) \to \mu(A)\mathrm{P}(Y_k \in B). \end{aligned} \tag{7}$$

Bezeichnen wir $D = \{Y_k \in B\}$ und ist $\mathrm{P}(D) > 0$, so besagt diese Beziehung (7), daß die Folge $\{Y_n - T_n Z_k\}$ (P_D)-konvergent mit Limes μ ist. Nach Lemma 4 gilt mit (6)

$$T_n Z_k \xrightarrow[\mathrm{P}_D]{} \theta,$$

so daß nach Lemma 12 die Folge $\{Y_n\}$ (P_D)-konvergent mit Limes μ ist. Für alle $A \epsilon \mathfrak{S}_\mu$ gilt somit

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\{Y_n \epsilon A\} \cap D) = \mu(A)\,\mathrm{P}(D). \tag{8}$$

Gilt nun $\mu(A) > 0$ für ein $A \epsilon \mathfrak{S}_\mu$, so ist für alle hinreichend großen k $\mathrm{P}(Y_k \epsilon A) > 0$. Für diese k gilt nach (8)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n \epsilon A,\ Y_k \epsilon A) = \mu(A)\,\mathrm{P}(Y_k \epsilon A).$$

Das war zu zeigen.

Daß (P)-mischende Folgen $\{Y_n\}$ nicht nur wie in den Sätzen 3 bis 6 auf der Grundlage einer Folge $\{X_k\}$ unabhängiger zufälliger Elemente zu entstehen brauchen, das zeigt bereits Lemma 9. Als weiteres Beispiel bringen wir eine Anwendung von Lemma 12.

SATZ 7. *Es seien* $\{Y_n\}$, $\{V_n\}$ *zwei Folgen zufälliger Elemente über* $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$ *mit Werten aus einem separablen meßbaren Banachraum* $[M, \mathfrak{B}_M]$. $\{Y_n\}$ *sei* (P)*-mischend mit dem Limes* μ (*bzw. stabil* (P)*-konvergent mit dem Limes* $\{\mu^D\}$) *Außerdem sei* $V_n \underset{\mathrm{P}}{\rightarrow} \theta$. *Dann ist auch die Folge* $\{Y_n + V_n\}$ (P)*-mischend mit dem Limes* μ (*bzw. stabil* (P)*-konvergent mit dem Limes* $\{\mu^D\}$).

Damit haben wir gezeigt, daß die Klasse der Folgen $\{Y_n\}$, für die Grenzaussagen hinsichtlich ihrer (P)-Konvergenz gegen eine eigentliche Grenzverteilung bestehen und die gleichzeitig (P)-mischend sind, recht umfangreich ist.

Die vorliegende eingehende Diskussion (P)-mischender und stabil (P)-konvergenter Folgen zufälliger Elemente dient der Verallgemeinerung der in [13] bewiesenen Übertragungssätze. Die Arbeiten [14]-[16] sind diesen Problemen gewidmet.

Anmerkung bei der Korrektur. Die in Verbindung mit dem Satz 4 ausgesprochene Vermutung auf S. 239 hat sich inzwischen bestätigt. Die Voraussetzung (b) in Satz 5 ist daher stets erfüllt.

Literaturnachweis

[1] P. Billingsley, *The invariance principle for dependent random variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), S. 250-268.

[2] M. Fréchet, *Généralités sur les probabilités. Eléments aléatoires*, 2me éd., Paris 1950.

[3] — *Sur la convergence en probabilité*, Metron 8 (1929/30), S. 1-50.

[4] Б. Н. Гартштейн, *О предельном распределении крайнего ранга*, Учен. зап. Львовского Гос. Унив. 22 (1953), сер. физ. матем., в. 5, S. 50-71.

[5] B. Gnedenko, *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire*, Ann. of Math. 44 (1943), S. 423-453.

[6] O. Hanš, *Generalized random variables*, Trans. I Prague Conf. on Inf. Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes, 1957, S. 61-104.

[7] Н. П. Канделаки, В. В. Сазонов, *К центральной предельной теореме для случайных элементов принимающих значения из гильбертова пространства*, Теория вероят. и ее примен. 9 (1964), S. 43-52.

[8] W. Kozakiewicz, *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence stochastique*, Fund. Math. 31 (1938), S. 160-178.

[9] J. Nedoma, *Note on generalized random variables*, Trans. I Prague Conf. on Inf. Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes, 1957, S. 139-141.

[10] Ю. В. Прохоров, *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей*, Теория вероят. и ее примен. 1 (1956), S. 177-237.

[11] A. Rényi, *On mixing sequences of sets*, Acta Math. Hungar. 9 (1958), S. 215-228.

[12] — *On stable sequences of events*, Sankhya A 25 (1963), S. 293-302.

[13] W. Richter, *Übertragung von Grenzaussagen für Folgen von zufälligen Größen auf Folgen mit zufälligen Indizes*, Теория вероят. и ее примен. (im Druck).

[14] — *Übertragung von Grenzaussagen für Folgen zufälliger Elemente auf Folgen mit zufälligen Indizes*, Math. Nachr. (im Druck).

[15] — *Ein zentraler Grenzwertsatz für das Maximum einer zufälligen Anzahl unabhängiger Zufallsgrößen*, Wiss. Z. TU Dresden 13 (1964), S. 1343-1346.

[16] — und K. Reinschke, *Ein Übertragungssatz für zufällige Elemente mit Werten aus einem Hilbertraum*, ibidem 13 (1964), Heft 6.

[17] L. Sucheston, *On mixing and the zero-one-law*, J. Math. Anal. Appl. 6 (1963), S. 447-456.

II. INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
(MATHEMATISCHE STATISTIK) DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

Reçu par la Rédaction le 23. 4. 1964