STUDIA MATHEMATICA, XXIV. (1964)

Sur la loi du χ^2 dans certains processus de Markov

par

BUI TRONG LIEU et D. A. CARTON (Paris)

Le but de ce papier est de démontrer — pour des processus de Markov discrets et permanents à un nombre fini ou infini d'états — la convergence vers la loi de Laplace-Gauss de certaines variables aléatoires. On en déduit des expressions qui suivent asymptotiquement la loi du χ^2. Les démonstrations utilisent des résultats obtenus dans [5], ce qui permet de considérer cette étude — dans une certaine mesure — comme un prolongement de quelques problèmes étudiés dans [5]. L'application pratique au test de l'hypothèse de stationnarité est envisagée et discutée.

1. Notations et terminologie. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, Pr)$ un espace de probabilité. Dans ce qui suit, N désignera l'ensemble des entiers $\geqslant 0$. Soit $\{X_t, t \in N\}$ une fonction aléatoire Markovienne strictement stationnaire (cas discret, d'après la terminologie de [4]) définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, Pr)$ et à valeurs dans l'espace des états $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. Nous envisagerons plus loin le cas permanent où $t \in R_+$, R_+ désignant l'ensemble des nombres réels $\geqslant 0$. Nous noterons par Π et P_t respectivement les probabilités a priori et de transition stationnaires. De même, nous noterons par $\langle f, g\rangle = Ef\bar{g}$ et $\|f\| = \sqrt{E|f|^2}$ respectivement le produit scalaire et la norme de $L_2(\Omega, \mathscr{A}, Pr)$, lorsque f et g sont des variables aléatoires à valeurs complexes. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que la condition de Doeblin est vérifiée, et qu'il existe une seule classe ergodique sans sous-classe cyclique.

Soit maintenant $\omega \in \Omega$. Considérons la restriction de la trajectoire $t \dashrightarrow X_t(\omega)$ à l'intervalle fermé $[0, n]$, restriction que nous noterons $\{X_t(\omega)\}_{t \in [0, n]}$. Comme dans [5], nous désignerons par $N_n(A \times B, \omega)$ le nombre de fois que $X_t(\omega) \in A$ et $X_{t+1}(\omega) \in B$, $\forall A$ et $B \in \mathscr{B}$. Rappelons à ce propos que, quand $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{n} N_n(A \times B) \to \int_A \Pi(dx) P(x, B),$$

p. s. et en m. q.

2. Première expression du χ^2 pour des processus discrets. Pour $\omega\in\Omega$, $N_n(.;\omega)$ est une mesure à valeurs entières sur l'espace mesurable $(\mathscr{X}^2,\mathscr{B}^2)$. Soit $\{A_i\}_{i\in E}$, une partition finie et mesurable de $(\mathscr{X},\mathscr{B})$, où $E=\{1,2,\ldots,r\}$. Nous supposerons cette partition telle qu'aucune des expressions $\int_{A_i}\Pi(dx)P(x,A_j)$ ne soit ni nulle ni négligeable par rapport aux autres.

Soit φ, l'application de $E\times E$ sur $E^*=\{1,2,\ldots,r^2\}$ définie par $\varphi(i,j)=r(i-1)+j$. En fait, il s'agit simplement d'une convention sur la façon d'ordonner totalement les éléments de $E\times E$.

Proposition 1. *Soit Y le vecteur colonne, dont les éléments*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[N_n(A_i\times A_j)-\int_{A_i\times\mathscr{X}}P(x,A_j)\,dN_n(x,y)\Big],\qquad i,j\in E,$$

sont ordonnés par l'application φ. Y suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et de matrice de covariances V, où V est une matrice carrée, symétrique, bloc diagonale, de rang $r(r-1)$, et dont l'élément $v(ij,kl)$ occupant la $[r(i-1)+j]$-ème ligne et la $[r(k-1)+l]$-ème colonne vaut

$$v(ij,kl)=\int_{A_i\cap A_k}\Pi(dx)[P(x,A_j\cap A_l)-P(x,A_j)P(x,A_l)].$$

Dans le cas particulier où $\mathscr{X}$ est fini,

$$v(ij,kl)=\delta_{ik}\Pi_i p_{ij}(\delta_{jl}-p_{il}).$$

Démonstration. En effet, constatons d'abord que

$$E\int_{A_i\times\mathscr{X}}P(x,A_j)\,dN_n(x,y)=n\int_{A_i}\Pi(dx)P(x,A_j),$$

d'où $EY=0$.

Le calcul de $v(ij,kl)$ est long. Mais son expression a été donnée dans [5]. Puisque $v(ij,kl)=0$ pour $i\neq k$, la matrice V est bloc diagonale. Il nous reste à démontrer la convergence de la loi de Y vers la loi de Laplace-Gauss, quand $n\to+\infty$. Pour cela, considérons les applications f_{ij} de $(\mathscr{X}^2,\mathscr{B}^2)$ dans R,

$$f_{ij}:(x,y)\to I_{A_i\times A_j}(x,y)-P(x,A_j)\cdot I_{A_i\times\mathscr{X}}(x,y),\qquad \forall\, i,j\in E,$$

où $I_{A\times B}$ désigne l'indicateur de l'ensemble $A\times B$. Alors

$$N_n(A_i\times A_j)-\int_{A_i\times\mathscr{X}}P(x,A_j)\,dN_n(x,y)=\sum_{t=0}^{n}f_{ij}\circ X_t,$$

d'où $\forall(t_{11},\ldots,t_{ij},\ldots,t_{rr})\in R^{r^2}$, d'après le théorème central limite 7.5, p. 228, de [6],

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=0}^{n}\sum_{i,j\in\mathscr{X}}t_{ij}\cdot f_{ij}\circ\hat{X}_t\xrightarrow{\mathfrak{L}}\mathscr{N}\Big[0,\sum_{i,j,k,l\in\mathscr{X}}t_{ij}t_{kl}v(ij,kl)\Big],$$

ce qui achève la démonstration.

Désignons maintenant par φ_d l'application de $E\times(E-\{r\})$ sur $E_d^*=\{1,2,\ldots,r(r-1)\}$. Soit Y_d le vecteur colonne dont les éléments

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[N_n(A_i\times A_j)-\int_{A_i\times\mathscr{X}}P(x,A_j)\,dN_n(x,y)\Big],\qquad (i,j)\in E\times(E-\{r\}),$$

sont ordonnés par φ_d. Dans le cas particulier où $\mathscr{X}=\{1,2,\ldots,r\}$, alors Y_d a pour éléments

$$\frac{1}{\sqrt{n}}[N_n(ij)-p_{ij}N_n(i\mathscr{X})].$$

Proposition 2. *$\exists$ une matrice carrée M, symétrique, bloc diagonale, d'ordre $r(r-1)$, telle que $Y_d'\cdot M\cdot Y_d$ suit asymptotiquement une loi du χ^2 à $r(r-1)$ degrés de liberté, Y_d' désignant ici le transposé de Y_d.*

En particulier, lorsque $\mathscr{X}=\{1,2,\ldots,r\}$, et si les probabilités de transition sont toutes $\neq 0$, M est de la forme

$$M=\begin{bmatrix}\boxed{M_{11}} & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & & \vdots\\ & & \boxed{M_{mm}} & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \boxed{M_{rr}}\end{bmatrix}$$

où

$$M_{mm}=\frac{1}{\Pi_m p_{mr}}\begin{bmatrix}\dfrac{p_{mr}+p_{m1}}{p_{m1}} & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \cdots & \dfrac{p_{mr}+p_{mj}}{p_{mj}} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{p_{mr}+p_{m(r-1)}}{p_{m(r-1)}}\end{bmatrix}$$

et le χ^2 s'écrira alors

(II) $$\sum_{i,j,\in\mathscr{X}} \frac{[N_n(ij)-N_n(i\mathscr{X})p_{ij}]^2}{n\Pi_i p_{ij}}.$$

Démonstration. La matrice V est singulière, car $\forall (i,j)\in E\times E$,

$$\sum_{k,l\in E} v(ij,kl) = \int_{A_i\cap\mathscr{X}} \Pi(dx)[P(x,A_j\cap\mathscr{X})-P(x,A_j)P(x,\mathscr{X})] = 0.$$

D'où l'idée de supprimer r termes de Y. Notons par V_d la matrice des covariances de Y_d. Elle n'est pas singulière. La matrice M n'est autre que V_d^{-1}. Le calcul de M est compliqué lorsque $(\mathscr{X},\mathscr{B})$ est quelconque. Par contre, dans le cas où $\mathscr{X}$ n'a qu'un nombre fini d'états, le calcul se simplifie beaucoup. Ecrivons

$$V_d = \begin{bmatrix} \boxed{V_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 \;\cdots\; 0 & & \boxed{V_{mm}} & 0 \;\cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{V_{rr}} \end{bmatrix},$$

où

$$V_{mm} = \begin{bmatrix} \Pi_m p_{m1}(1-p_{m1}) & \dots & -\Pi_m p_{m1}p_{mj} & \dots & -\Pi_m p_{m1}p_{ml} & \dots & -\Pi_m p_{m1}p_{m(r-1)} \\ -\Pi_m p_{m2}p_{m1} & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\Pi_m p_{mj}p_{m1} & \cdots & \Pi_m p_{mj}(1-p_{mj}) & & \cdots & & -\Pi_m p_{mj}p_{m(r-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\Pi_m p_{m(r-1)}p_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \Pi_m p_{m(r-1)}(1-p_{m(r-1)}) \end{bmatrix}.$$

Un calcul facile montre alors que

$$\text{Dét}\, V_{mm} = (\Pi_m)^{r-1}\prod_{l\in\mathscr{X}} p_{ml}.$$

Après calculs, la matrice Adj. V_{mm} a pour éléments diagonaux

$$a_{11}(m) = (\Pi_m)^{r-2}\cdot \prod_{l\in\mathscr{X}-\{1,r\}} p_{ml}\cdot(p_{mr}+p_{m1}),\ \ldots,$$

$$a_{jj}(m) = (\Pi_m)^{r-2}\cdot \prod_{l\in\mathscr{X}-\{j,r\}} p_{ml}\cdot(p_{mr}+p_{mj}),$$

tandis que

$$a_{jl}(m) = (\Pi_m)^{r-2}\cdot \prod_{l\in\mathscr{X}-\{r\}} p_{ml} \qquad (j\neq l),$$

d'où l'énoncé de la proposition.

Remarques. A) Pour m donné, s'il existe un j tel que $p_{mj}=0$, la matrice V_{mm} est d'ordre $(r-1)$, et de rang $(r-2)$ et la matrice M_{mm} a une expression de même forme pour son terme général mais elle est d'ordre $(r-2)$. Plus généralement dans l'expression du χ^2 la sommation doit être étendue aux indices i,j pour lesquels $p_{ij}\neq 0$ et le nombre de degrés de liberté est $r(r-1)-k$ où k est le nombre de $p_{ij}=0$.

B) L'expression (II) est asymptotiquement équivalente à l'expression

$$\sum_{i,j\in\mathscr{X}} \frac{[N_n(ij)-N_n(i\mathscr{X})p_{ij}]^2}{N_n(i\mathscr{X})p_{ij}}$$

donnée dans [3] (voir aussi [5]) car $EN_n(i\mathscr{X})p_{ij} = n\Pi_i p_{ij}$. La démonstration de la proposition 2 en fournit donc en même temps une concernant la tendance de cette dernière expression vers la loi du χ^2.

3. Deuxième expression du χ^2 pour des processus discrets. Nous allons proposer maintenant une autre expression du χ^2. La raison de son choix sera expliquée plus loin. Considérons toujours une partition finie et mesurable de $(\mathscr{X},\mathscr{B})$, soit $\{A_i\}_{i\in E}$.

Posons

(III) $$\begin{aligned} u(ij,kl) = &\int_{A_i\cap A_k} \Pi(dx)P(x,A_j\cap A_l) - \\ &- \int_{A_i}\Pi(dx)P(x,A_j)\cdot\int_{A_k}\Pi(dx)P(x,A_l) + \\ &+ \int_{A_i}\Pi(dx)\int_{A_j}P(x,dy)\sum_{m=0}^{\infty}\int_{A_k}[P_m(y,du)-\Pi(du)]P(u,A_l) + \\ &+ \int_{A_k}\Pi(dx)\int_{A_l}P(x,dy)\sum_{m=0}^{\infty}\int_{A_i}[P_m(y,du)-\Pi(du)]P(u,A_j). \end{aligned}$$

Proposition 3. *Le vecteur colonne W d'éléments*

$$\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}N_n(A_i\times A_j) - \int_{A_i}\Pi(dx)P(x,A_j)\right],\qquad i,j\in E,$$

ordonnés par φ, suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et dont la matrice des covariances U, où $u(ij,kl)$ occupe la $[r(i-1)+j]$-ème ligne et la $[r(k-1)+l]$-ème colonne, est symétrique.

Démonstration. Rappelons d'abord que (cf. [4])

$$\left\| \frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \right\|^2$$

$$= \frac{1}{n} \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \left[1 - \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \right] +$$

$$+ \frac{2}{n} \int_{A_i} \Pi(dx) \int_{A_j} P(x, dy) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \int_{A_i} [P_m(y, du) - \Pi(du)] P(u, A_j)$$

et que

$$\text{(IV)} \quad \Big\langle \frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j),$$

$$\frac{1}{n} N_n(A_k \times A_l) - \int_{A_k} \Pi(dx) P(x, A_l) \Big\rangle$$

$$= \frac{1}{n} \int_{A_i \cap A_k} \Pi(dx) P(x, A_j \cap A_l) - \frac{1}{n} \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \int_{A_k} \Pi(dx) P(x, A_l)$$

$$+ \frac{1}{n} \int_{A_i} \Pi(dx) \int_{A_j} P(x, dy) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \int_{A_k} [P_m(y, du) - \Pi(du)] P(u, A_l)$$

$$+ \frac{1}{n} \int_{A_k} \Pi(dx) \int_{A_l} P(x, dy) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \int_{A_i} [P_m(y, du) - \Pi(du)] P(u, A_j).$$

Montrons maintenant que

$$\forall\, (t_{11}, \ldots, t_{ij}, \ldots, t_{rr}) \in R^{r^2}, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

$$\sqrt{n} \sum_{(i,j) \in E \times E} t_{ij} \left[\frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathfrak{N}(0, S),$$

où $S = \sum_{i,j,k,l} t_{ij} t_{kl} u(ij, kl)$.

En effet, si nous désignons par f, l'application

$$f: (x, y) \to \sum_{i,j \in E} t_{ij} \left[I_{A_i \times A_j}(x, y) - \int_{A_i} \Pi(dz) P(z, A_j) \right],$$

et si nous faisons appel à la fonction aléatoire Markovienne $\{\hat{X}_t, t \in N - \{0\}\}$ définie dans [5], nous voyons que

$$\sqrt{n} \sum_{i,j \in E} t_{ij} \left[\frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} f \circ \hat{X}_t,$$

avec $E(f \circ \hat{X}_t)^p < +\infty$, $\forall p$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème central limite.

De ce résultat, nous déduisons que W suit une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et de matrice de covariances U.

Proposition 4. *Soit W_d le vecteur colonne dont les éléments*

$$\sqrt{n} \left[\frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \right], \quad i \in E, j \in E - \{r\},$$

sont ordonnés par $\varphi_d: (i, j) \to r(i-1) + j$. Alors $\exists$ une matrice carrée symétrique M d'ordre $r(r-1)$, telle que $W'_d M W_d$ suit asymptotiquement une loi du χ^2 à $r(r-1)$ degrés de liberté.

Démonstration. En effet, la matrice d'éléments $u(ij, kl)$, $i, j, k, l \in E$, est singulière, car

$$\sum_{(k,l) \in E \times E} u_n(ij, kl) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \int_{A_i} \Pi(dx) \int_{A_j} P(x, dy) \int_{\mathcal{X}} [P_m(y, du) - \Pi(du)] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx) \int_{\mathcal{X}} P(x, dy) \int_{A_i} [P_m(y, du) - \Pi(du)] P(u, A_j) = 0.$$

Mais la matrice d'éléments $u_n(ij, kl)$, avec $i, k \in E$, $j, l \in E - \{r\}$, ordonnée par φ_d, est inversible. Il suffit de prendre M égale à l'inverse de cette matrice. Jusqu'à présent, nous n'avons pas réussi à donner l'expression de cette matrice, même pour le cas où $\mathcal{X}$ est fini.

4. Application. *Test de l'hypothèse de stationnarité des processus de Markov.* Le test du χ^2 de la stationnarité a été proposé par les auteurs de [1], uniquement dans le cas où $\mathcal{X}$ est fini, mais avec plusieurs trajectoires. La distinction entre le cas d'une trajectoire et celui de plusieurs a été envisagée dans [5]. Pour simplifier, nous ne nous occupons ici que du cas d'une seule trajectoire.

1° Lorsque $\mathcal{X}$ n'a qu'un nombre fini de points, c'est la 1ère expression du χ^2 qu'il faut utiliser, parce qu'elle est plus simple et que nous connaissons son expression explicite. Or nous avons remarqué que cette expression

$$\text{(II)} \qquad \sum_{i,j\in\mathscr{X}} \frac{[N_n(ij)-N_n(i\mathscr{X})p_{ij}]^2}{n\Pi_i p_{ij}}$$

est asymptotiquement équivalente à l'expression

$$\sum_{i,j\in\mathscr{X}} \frac{[N_n(ij)-N_n(i\mathscr{X})p_{ij}]^2}{N_n(i\mathscr{X})p_{ij}}.$$

Dans le problème actuel du test de stationnarité, des deux χ^2 s'identifient. On pourrait tester l'hypothèse de stationnarité de la façon suivante:

Découpons l'intervalle $[0, n]$ en 2 intervalles égaux définis par

$$\left[0, I_\alpha(n)\cdot e\left(\frac{n}{2}\right)+I_\beta(n)\cdot\left[e\left(\frac{n}{2}\right)-1\right]\right] \quad \text{et} \quad \left[\left[e\left(\frac{n}{2}\right)-1\right], n\right],$$

où β et α désignent respectivement l'ensemble des entiers pairs et impairs et où $e(m) = \sup\{n\in N: n\leqslant m\}$ pour $m>0$.

Notons par $N'(i,j;\omega)$ et $N''(i,j;\omega)$ les valeurs correspondant aux restrictions de la trajectoire $t\to X_t(\omega)$ aux intervalles ainsi définis.

La valeur du χ^2 expérimental est alors

$$\sum_{i,j\in\mathscr{X}} \frac{\left[N'(i,j)-N'(i,\mathscr{X})\dfrac{N''(i,j)}{N''(i,\mathscr{X})}\right]^2}{N'(i,\mathscr{X})\dfrac{N''(i,j)}{N''(i,\mathscr{X})}}.$$

Il ne nous a pas été possible de calculer la puissance d'un tel test. Mais signalons par exemple qu'un tel test ne permet pas de distinguer les processus stationnaires modulo T (c'est-à-dire $p_{t,t+1}(i,j) = p_{t+T,t+T+1}(i,j)$) des processus stationnaires. Il semble pourtant qu'il soit possible par ce test d'éliminer les processus „nettement" non stationnaires.

2° Lorsque l'espace des états est un espace mesurable $(\mathscr{X},\mathscr{B})$, la première expression du χ^2 ne peut nous être utile car nous ne connaissons pas d'estimateurs de $v(ij,kl)$. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit la seconde expression du χ^2.

Désignons par $N_n^{\langle 1,m,1\rangle}(A_i\times A_j\times A_k\times A_l)$ le nombre de fois que $X_t\in A_i$, $X_{t+1}\in A_j$, $X_{t+m+1}\in A_k$ et $X_{t+m+2}\in A_l$.

Alors (III) a pour estimateur

$$u_n^*(ij,kl) = \frac{1}{n}N_n[(A_i\cap A_k)\times(A_j\cap A_l)]-\frac{1}{n^2}N_n(A_i\times A_j)N_n(A_k\times A_l)+ \\ +\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-2}\frac{n-m-1}{n}[N_n^{\langle 1,m,1\rangle}(A_i\times A_j\times A_k\times A_l)+ \\ +N_n^{\langle 1,m,1\rangle}(A_k\times A_l\times A_i\times A_j)].$$

Nous partageons — comme précédemment — l'intervalle $[0, n]$ et notons par $N'(A_i\times A_j)$ l'expression $N_n(A_i\times A_j)$ calculée à partir de $X_t(\omega)$ pour $t\in[0, I_\alpha(n)\cdot e(n/2)+I_\beta(n)\cdot(e(n/2)-1)]$ et par $N''(A_i\times A_j)$ l'expression correspondante pour l'autre intervalle.

Au lieu du vecteur W_d nous considérons le vecteur W_d^* d'éléments

$$\sqrt{n}\left[\frac{1}{s}N'(A_i\times A_j)-\frac{1}{s}N''(A_i\times A_j)\right], \qquad i\in E,\ j\in E-\{r\},$$

où $s = n-e(n/2)-1$. Au lieu de la matrice U, nous considérons la matrice U^* d'éléments $u_n^*(ij,kl)$ avec $i,k\in E$ et $j,l\in E-\{r\}$.

Nous calculons numériquement l'inverse de U^* et obtenons ainsi M^* — la valeur expérimentale du χ^2 est alors égale à $W_d^{*\prime}\cdot M^*\cdot W_d^*$.

5. Cas des processus permanents. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des processus discrets (c'est-à-dire lorsque t est à valeurs entières). Pour ne pas alourdir le texte, nous allons donner rapidement quelques résultats concernant des processus permanents. Il serait trop long de détailler ici toutes les hypothèses; nous nous contentons de supposer que toutes les conditions de régularité nécessaires sont vérifiées (voir [2] et [5]). Soit donc $\{X_t, t\in R_+\}$ une fonction aléatoire Markovienne supposée stationnaire et purement discontinue, définie sur $(\Omega,\mathscr{A},Pr)$ et à valeurs dans $(\mathscr{X},\mathscr{B})$ où $\mathscr{X}$ est un borélien de la droite. Soit $\{X_t(\omega)\}_{t\in[0,T]}$ la restriction de la trajectoire $t\to X_t(\omega)$ à l'intervalle $[0,T]$. Notons par $N_T(A\times B)$, A et $B\in\mathscr{B}$, le nombre de fois que la fonction aléatoire passe de A à B et par $\tau_T(A;\omega)$ la durée de séjour dans A. Rappelons que $E\tau_T(A) = T\Pi(A)$ et $EN_T(A\times B) = T\int_A \Pi(dx)Q(x,B)$, où

$$Q(x,B) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}P_t(x,B).$$

Considérons, comme précédemment, une partition $\{A_i\}_{i\in E}$ finie et mesurable de $(\mathscr{X},\mathscr{B})$. Alors

Proposition 5. *Les variables aléatoires*

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\left[N_T(A_i\times A_j)-\int_{A_i}Q(x,A_j)\,d\tau_T(x)\right], \qquad i,j\in E,$$

sont asymptotiquement normales de moyenne 0 *et de variance* $\int_{A_i} \Pi(dx) Q(x, A_j)$. *Elles sont d'autre part asymptotiquement indépendantes.*

Démonstration. C'est plutôt une esquisse de démonstration que nous allons donner. D'après calculs, cf. [5], nous avons montré que

$$\text{(IV)} \quad \left\langle N_T(A_i \times A_j) - \int_{A_i} Q(x, A_j)\, d\tau_T(x),\ N_T(A_k \times A_l) - \int_{A_k} Q(x, A_l)\, d\tau_T(x) \right\rangle = T \int_{A_i \cap A_k} \Pi(dx) Q(x, A_j \cap A_l),$$

ce qui montre que, pour $(i, j) \neq (k, l)$, les variables aléatoires

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \Big[N_T(A_i \times A_j) - \int_{A_i} Q(x, A_j)\, d\tau_T(x) \Big]$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \Big[N_T(A_k \times A_l) - \int_{A_k} Q(x, A_l)\, d\tau_T(x) \Big]$$

ne sont pas correlées. Si, d'autre part, elles sont asymptotiquement normales, elles seront asymptotiquement indépendantes. La tendance vers la loi normale peut être démontrée en faisant appel à l',,imbedded process" (cf. [2]).

Si la partition $\{A_i\}_{i \in E}$ est telle qu'aucune des expressions $\int_{A_i} \Pi(dx) \times Q(x, A_j)$ ne soit nulle, alors comme corollaire du théorème précédent, on a la

Proposition 6. *L'expression*

$$\sum_{i,j \in E} \frac{\Big[N_T(A_i \times A_j) - \int_{A_i} Q(x, A_j)\, d\tau_T(x) \Big]^2}{\int_{A_i} Q(x, A_j)\, d\tau_T(x)}$$

suit asymptotiquement une loi du χ^2 *à* r^2 *degrés de liberté (à condition qu'aucun des* A_i *ne se réduise à un seul point). Dans le cas particulier où* $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, r\}$, *la loi du* χ^2 *est à* $r(r-1)$ *degrés de liberté au plus.*

Démonstration. En effet, d'après la proposition 5, le vecteur d'éléments

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \Big[N_T(A_i \times A_j) - \int_{A_i} Q(x, A_j)\, d\tau_T(x) \Big], \qquad i, j \in E,$$

ordonnés par φ, est asymptotiquement normal avec une matrice de covariances qui est diagonale. Comme

$$E \frac{1}{T} \int_{A_i} Q(x, A_j)\, d\tau_T(x) = \int_{A_i} \Pi(dx) Q(x, A_j),$$

la proposition est démontrée. Dans le cas particulier d'un nombre fini d'états, les termes q_{ii} et $N_T(ii)$ sont nuls par convention. Il n'y a donc plus que $r(r-1)$ degrés de liberté.

References

[1] T. W. Anderson et Leo A. Goodman, *Statistical inference about Markov chains*, Ann. Math. Stat. 28, 1 (1957), p. 89-109.

[2] P. Billingsley, *Statistical inference for Markov processes*, Chicago 1961.

[3] — *Statistical methods in Markov chains*, Ann. Math. Stat. 32, 1 (1961), p. 12-40.

[4] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris 1953.

[5] Bui Trong Lieu, *Estimations pour des processus de Markov*, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 11 (1962), p. 73-188.

[6] J. L. Doob, *Stochastic processes*, 1953.

Reçu par la Rédaction le 24. 4. 1963