STUDIA MATHEMATICA, XXIV. (1964)

Sur la valeur d'une distribution dans un point

par

F. CONSTANTINESCO (Cluj)

Dans cette note nous nous référons à la théorie élémentaire des distributions, dans le sens de M. J. Mikusiński et R. Sikorski [3]. Dans l'ensemble des paires ordonées $(F(x), k)$ formées d'une fonction continue $F(x)$ sur un intervalle $A < x < B$ $(-\infty \leqslant A < B \leqslant +\infty)$ et un nombre entier $k \geqslant 0$ on introduit la relation d'équivalence suivante: les paires $(F(x), k)$ et $(G(x), l)$ sont *équivalentes* s'il s'accomplit une des conditions

1° $k \leqslant l$ et la différence $\dfrac{d^{l-k}F(x)}{dx^{l-k}} - F(x)$ existe et est un polynôme du degré $< k$,

2° $l \leqslant k$ et la différence $\dfrac{d^{k-l}F(x)}{dx^{k-l}} - G(x)$ existe et est un polynôme du degré $< l$.

Cette relation d'équivalence divise l'ensemble des éléments $(F(x), k)$ en classes d'équivalence qui sont des distributions.

Le problème de la valeur d'une distribution dans un point a été posé par Łojasiewicz [1]. Nous disons que la distribution $f(x)$ a une *valeur* dans le point x_1 de l'intervalle (A, B) si la limite

$$\lim_{a\to 0} f(ax+x_1) \tag{1}$$

considerée dans le sens de la théorie des distributions existe et est une distribution constante C. On démontre [6] qu'il suffit de supposer que la limite (1) existe. De son existence il résulte aussi qu'elle est constante. S. Łojasiewicz a donné la suivante condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la valeur dans un point d'une distribution.

La distribution $f(x)$ a une valeur dans le point x_1 s'il existe un nombre entier $k \geqslant 0$ et une fonction continue $\Phi(x)$ telle que $\Phi^{(k)}(x) = f(x)$ [1] et

$$\lim_{x\to x_1} \frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^k} = \frac{C}{K!}. \tag{2}$$

[1] Dans la relation $\Phi^{(k)}(x) = f(x)$ la dérivation est prise dans le sens de la théorie des distributions.

Nous allons donner une autre condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la valeur dans un point d'une distribution, à l'aide de la notion de différence divisée [5]. En même temps, nous allons montrer que le problème de la valeur d'une distribution dans un point est étroitement lié au problème de l'existence d'une dérivée directe d'ordre supérieur pour une fonction continue.

1. Soit $F(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $A < x < B$. Nous désignons par

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; F] \tag{3}$$

la différence divisée [5] de l'ordre n de la fonction $F(x)$ sur les noeuds distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. C'est une expression linéaire, symétrique, déduite en vertu de la relation de récurrence

$$\begin{gathered}[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; F] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; F] - [x_1, x_2, \ldots, x_n; F]}{x_{n+1} - x_1}, \\ [x_1; F] = F(x_1).\end{gathered} \tag{4}$$

A l'aide des différences divisées nous pouvons écrire la formule d'interpolation de Newton, sur les noeuds distincts $x_1, x_2, \ldots, x_k$, de la manière suivante:

$$\begin{aligned}F(x) = F(x_1) &+ (x - x_1)[x_1, x_2; F] + \ldots + \\ &+ (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})[x_1, x_2, \ldots, x_k; F] + \\ &+ (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)[x_1, x_2, \ldots, x_k, x; F],\end{aligned} \tag{5}$$

d'où nous avons

$$\begin{aligned}&[x_1, x_2, \ldots, x_k, x; F] \\ &= \frac{F(x) - F(x_1) - (x-x_1)[x_1, x_2; F]}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)} - \ldots - \\ &\quad - \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})[x_1, x_2, \ldots, x_k; F]}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)}.\end{aligned} \tag{6}$$

2. Nous voulons démontrer le suivant

THÉORÈME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la distrbution $f(x)$ ait une valeur dans le point x_1 de l'intervalle $A < x < B$ est qu'il existe une fonction continue $F(x)$ et un nombre entier $k \geqslant 0$ tel que $F^{(k)}(x) = f(x)$ et*

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_k \to x_1 \\ x \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k, x; F] = \frac{C}{k!}, \tag{7}$$

les noeuds $x_2, \ldots, x_k, x$ tendant d'une manière independant vers x_1.

Supposons que la limite (7) existe. Alors, selon la formule de récurrence des différences divisées, nous avons

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k, x; F] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x; F] - [x_1, x_2, \ldots, x_k; F]}{x - x_1}$$

ou bien

$$\begin{aligned}[x_1, x_2, \ldots, x_k; F] = (x_1 - x)[x_1, x_2, \ldots, x_k, x; F] &+ \\ + [x_2, x_3, \ldots, x; F]&.\end{aligned} \tag{8}$$

Mais, pour $x_2 \to x_1$ la limite du second membre existe, donc de (8) il resulte l'existence de la limite

$$\lim_{x_2 \to x_1} [x_1, x_2, \ldots, x_k; F] = [x_1, x_1, \ldots, x_k; F].$$

La relation (8) devient

$$\begin{aligned}[x_1, x_1, x_3, \ldots, x_k; F] = (x_1 - x)[x_1, x_1, x_3, \ldots, x_k; F] &+ \\ + [x_1, x_3, \ldots, x; F]&.\end{aligned}$$

Mais nous avons

$$\lim_{x_3 \to x_1} [x_1, x_1, x_3, \ldots, x_k; F] = [x_1, x_1, x_1, \ldots, x_k; F]$$

et

$$\lim_{x_3 \to x_1} [x_1, x_3, \ldots, x; F] = [x_1, x_1, \ldots, x; F]$$

en vertu de la condition antérieure. Alors nous déduisons de (9) l'existence de la limite

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_k \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k; F]$$

et, en général, de la limite

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_j \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_j; F], \qquad j = 2, 3, \ldots, k. \tag{10}$$

En vertu de ceci, nous pouvons passer à la limite dans (6) pour $x_2 \to x_1$, $x_3 \to x_1, \ldots, x_k \to x_1$ et nous obtenons

$$[x_1, \ldots, x_1, x; F] = \frac{F(x) - P_{k-1}(x)}{(x - x_1)^k}$$

où $P_{k-1}(x)$ est un polynôme du degré $k-1$ dans x. En notant $\Phi(x) = F(x) - P_{k-1}(x)$, nous avons $\Phi^{(k)}(x) = F^{(k)}(x) = f(x)$ et

$$[x_1, x_1, \ldots, x_1, x; F] = \frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^k}.$$

Ici nous pouvons faire $x \to x_1$ et nous obtenons

$$\lim_{x\to x_1} \frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^k} = \frac{C}{k!}$$

ce qui garantit l'existence de la valeur dans x_1 pour la distribution $f(x)$.

Inversement, admettons que la distribution $f(x)$ a une valeur dans le point x_1. Alors, selon le théorème de S. Łojasiewicz il existe une fonction continue $\Phi(x)$ et un nombre entier $k \geqslant 0$ de sorte que $\Phi^{(k)}(x) = f(x)$ et l'on remplit la condition (2). Alors si x est suffisamment proche de x_1, alors il existe un nombre $\varepsilon > 0$ de sorte que

$$\frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^k} = \frac{C}{k!} + \varepsilon \tag{11}$$

et $\varepsilon \to 0$ pour $x \to x_1$. De (11) nous avons

$$\frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^{k-1}} = \left(\frac{C}{k!} + \varepsilon\right)(x-x_1)$$

d'où il résulte que

$$\lim_{x\to x_1} \frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^{k-1}} = 0$$

et, en général,

$$\lim_{x\to x_1} \frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1), \qquad \Phi(x_1) = 0. \tag{12}$$

Mais nous avons

$$[x_1, x; \Phi] = \frac{\Phi(x) - \Phi(x_1)}{x - x_1} = \frac{\Phi(x)}{x - x_1}$$

et de (12)

$$\lim_{x\to x_1} [x_1, x; \Phi] = 0.$$

Puis, d'après (5),

$$[x_1, x_2, x; \Phi] = \frac{\Phi(x) - \Phi(x_1) - (x-x_1)[x_1, x_2; \Phi]}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

et, en faisant $x_2 \to x_1$,

$$[x_1, x_1, x; \Phi] = \frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^2}$$

et d'ici

$$\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ x\to x_1}} [x_1, x_2, x; \Phi] = 0.$$

En général, nous avons

$$\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ \cdots\\ x_j\to x_1\\ x\to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_j, x; \Phi] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Enfin, nous pouvons passer à la limite dans la formule de Newton pour $x_2 \to x_1, \ldots, x_k \to x_1$, $x \to x_1$ et nous trouvons

$$\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ \cdots\\ x_k\to x_1\\ x\to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k, x; \Phi] = \lim_{x\to x_1} \frac{\Phi(x)}{(x-x_1)^k} = \frac{C}{k!},$$

c'est-à-dire nous avons retrouvé la condition (7).

2. Nous pouvons observer maintenant que le problème de la valeur d'une distribution dans un point est lié à des recherches plus anciennes concernant l'existence de la dérivée directe pour une fonction continue [4], [5]. Nous disons que la fonction continue $F(x)$ admet une *dérivée directe de l'ordre* k dans le point x, s'il existe

$$\lim\,[x_1, x_2, \ldots, x_k, x; F],$$

alors que $x_2, x_3, \ldots, x_k, x$ tendent d'une manière indépendante vers x_1. On sait [4] que de l'existence de la dérivée habituelle de l'ordre k dans le point x_1 il résulte l'existence de la dérivée directe de l'ordre k dans ce point, mais la réciproque n'en est pas vraie. Il en résulte que le théorème 1 peut être énoncé aussi sous la forme équivalente:

THÉORÈME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la distribution $f(x)$ admette une valeur dans le point x_1 est que dans la classe d'équivalence qui définit aussi $f(x)$ il existe une paire $\big(F(x), k\big)$ de sorte que la fonction $F(x)$ admette une dérivée directe de l'ordre k dans le point x_1.*

En conclusion, nous mentionnons que, de la même manière, nous pouvons traiter des valeurs ponctuelles latérales (1) de même que le problème de la fixation d'une variable dans une distribution de plusieurs variables (2).

Travaux cités

[1] S. Łojasiewicz, *Sur la valeur et la limite d'une distribution dans un point*, Studia Math. 16 (1957), p. 1-36.

[2] — *Sur la fixation des variables dans une distribution*, ibidem 17 (1958), p. 1-64.

[3] J. Mikusiński, R. Sikorski, *The elementary theory of distributions, I*, Warszawa 1957.

[4] M. Nicolescu, *Analiza matematică, II*, București 1958.

[5] T. Popoviciu, *Différences divisées et dérivées*, Mathematica I, 24.2 (1959), p. 297-319.

[6] Z. Zieleźny, *Sur la définition de Łojasiewicz de la valeur d'une distribution dans un point*, Bull. Ac. Polon., Sci., Cl. III, 3 (1955), p. 519-520.

Reçu par la Rédaction le 30. 12. 1962

STUDIA MATHEMATICA, XXIV. (1964)

On the iterative procedures of best strategy for inverting a self-adjoint positive-definite bounded operator in Hilbert space

by

A. KIEŁBASIŃSKI (Warszawa)

1. Introduction. This paper is closely connected with the paper [1] of M. Altman and with the well-known iteration procedures of the best strategy for solving numerical problems of linear algebra [6]. In this saper a Chebyshev iterative method of arbitrary degree for inverting pelf-adjoint, positive-definite, bounded operators in Hilbert space is developed. For the discussion of results and comparison of methods several basic ideas and properties of some known methods are recapitulated.

Probably the most efficient methods for inverting matrices are not iterative methods but methods of the type of Gaussian elimination. For improving an approximate of the inverse A^{-1} obtained by such elimination procedure it seems sufficient to apply one or two steps of the well-known second degree hyperpower method. Therefore methods developed in this paper are probably not very essential to the numerical practice.

2. Hyperpower methods in Banach spaces. Let A be a linear, bounded, non-singular operator with the domain and the range in a complex Banach space $\mathfrak{B}$. Let us suppose that a linear bounded operator D_0 satisfies the condition

$$\|I-D_0A\| = \varrho < 1, \tag{1}$$

where I is the identity mapping of $\mathfrak{B}$. By introducing a linear operator $B_0 = I-D_0A$ we see that the equation

$$X = B_0X+D_0 \tag{2}$$

is satisfied by the operator A^{-1}. In virtue of (1) the operator A^{-1} is the unique solution of equation (2) and we have $A^{-1} = \lim_{n\to\infty} X_n$, where the sequence of operators $\{X_n\}$ is defined by the recurrence formula

$$X_{k+1} = B_0X_k+D_0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$