STUDIA MATHEMATICA, T. XXIV. (1964)

Universelle umhüllende Algebra einer lokal kompakten Gruppe und ihre selbstadjungierte Darstellungen. Anwendungen

von

K. MAURIN und L. MAURIN (Warszawa)

Einführung und Inhaltsangabe. In der Theorie der Darstellungen Liescher Gruppen, in der Quantenmechanik, Automorphen Funktionen u. a. spielen eine fundamentale Rolle Elemente aus Zentrum der universellen umhüllenden Algebra $\mathcal{E}(G)$ der rechtsinvarianten Lieschen Algebra der Gruppe G. Um die unitäre Darstellung $G \ni g \to U(g) \in L(H)$ im Hilbertschen Raume H in elementare (d. h. irreduzible oder Faktor-) Darstellungen zu zerlegen ist es nötig, selbstadjungierte Operatoren zu konstruieren, die miteinander und mit allen Operatoren der Darstellung U (stark) vertauschbar sind. Dann liefert die v. Neumannsche Theorie eine Zerlegung der Darstellung U in ein direktes Integral elementarer Darstellungen.

Die fundamentale Abhandlungen von L. Gårding und I. E. Segal haben die s. g. infinitesimale Prozedur gerechtfertigt. In einer wichtigen Abhandlung [9] haben E. Nelson und W. F. Stinespring auf geistreiche Weise eine hinreichende Bedingung für wesentliche Selbstadjungiertheit der Repräsentanten $dU(M)$ der Elemente M aus $\mathcal{E}(G)$ gegeben. Ihre Resultate enthalten u. a. den Segalschen Satz.

In [5] hat einer der Verfasser eine Definition der Räume $\mathcal{D}(G)$ und $\mathcal{D}'(G)$ auf beliebigen separablen lokal kompakten (l. k.) Gruppen gegeben (dieselben Begriffe waren unabhängig auch von Kac [3] und Bruhat [1] gefunden worden). Diese Begriffsbildungen erlauben uns, in § 1 und §2, eine natürliche Definition der u. u. Algebra für beliebige (zusammenhängende) l. k. Gruppe zu geben.

Wir zeigen, daß man die Methode von [8] auf diese allgemeine Klasse von Gruppen anwenden kann und auf diese Weise bekommt man eine Verallgemeinerung der fundamentalen Sätze von Nelson - Stinespring: die Repräsentanten $\overline{dU(M)}$ symmetrischer Elemente aus Zentrum $Z(G)$ von $\mathcal{E}(G)$ sind miteinander und mit der Darstellung stark vertauschbar (§ 2 und 3). Im § 4 konstruieren wir einen nuklearen Raum Ψ der dicht in dem Darstellungsraum H ist und dessen Einbettung in H stetig ist (vgl. [4] und [5]). Daher kann man die von uns in [4] und [7] entwickelte Theorie auf die hier vorkommende Situation anwenden: die Darstellung (U, H) wird in ein direktes Integral $\left(\int U(\lambda), \int H(\lambda)\, d\mu(\lambda)\right)$ zerlegt, wobei die $H(\lambda)$ (verallgemeinerte) gemeinsame Eigenräume der Operatoren $dU(M)$, $M = M^+ \in Z(G)$, sind.

Im Abschnitt 5 erhalten wir als Korollar eine Zerlegung des Raumes $L^2(X, \sigma)$, wo $X = G/G_0$ ein homogener Raum und σ ein G-invariantes Maß ist, in ein direktes Integral der Eigenräume gewisser invarianter auf X Differentialoperatoren (1).

§ 1. Distributionen auf l. k. Gruppen. Im folgenden setzen wir voraus, daß die lokalkompakte (l. k.) Gruppe G ist

1° eine separable Gruppe,

2° ein projektiver Limes Liescher Gruppen G_n.

Wegen der Separabilität von G können wir voraussetzen, daß wir eine absteigende Folge der kompakten invarianten Untergruppen N_n (Normalteilern) von G haben:

$$N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots,$$

was man kurz $N_n \searrow 1$ schreibt (1 bezeichnet hier die Gruppeneins).

Wenn in jeder Umgebung der Gruppeneins ein solcher Normalteiler N_n von G ist, daß die Faktorgruppe $G_n = G/N_n$ Liesch ist, nennen wir G ein *projektiver Limes Liescher Gruppen* G_n. In diesem Falle schreibt man

$$G = \varprojlim G_n = \lim G/N_n. \tag{1.1}$$

Der Satz von Yamabe besagt, daß *jede zusammenhängende l. k. Gruppe ein projektiver Limes der Lie-Gruppen ist*, oder kurz ausgedrückt: *jede zusammenhängende l. k. Gruppe ist eine Yamabe Gruppe.*

Der Raum $\mathscr{D}(G)$. Jeder Funktion $\varphi\colon G \to E$, wo E ein topologischer Raum ist, die konstant auf den (linken) Nebenklassen $[g] = gN$ $(g \in G)$ ist, kann man auf natürliche Weise eine Funktion $[\varphi]$ auf dem homogenen Raum G/N folgendermaßen zuordnen:

$$[\varphi]([g]) = \varphi(g) \in E. \tag{1.2}$$

Falls φ stetig ist, dann ist auch $[\varphi]$ stetig. Im Folgenden werden wir oft nicht zwischen φ und $[\varphi]$ unterscheiden. Umgekehrt erlaubt (1.2) jeder Funktion $[\varphi]$ auf G/N eine Funktion φ auf G zuordnen, die auf den (linken) Nebenklassen gN konstant ist.

(1) Über diese Ergebnisse wurde in unserer Note *Enveloping algebra of a locally compact group and its selfadjoint representations*, Bull. Acad. Polon. Sci. 11 (1963), kurz berichtet.

Auf einer Lieschen Gruppe G_n wird der Schwartzsche Raum $\mathscr{D}(G_n)$ beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit kompakten Trägern definiert: $\mathscr{D}(G_n)$ ist die Menge $C_0^\infty(G_n)$ mit der lokalkonvexen (nuklearer) Topologie $\psi_p \to 0$ für $p \to \infty$ in dem Raume $\mathscr{D}(G_n)$, falls

1° die Träger von ψ_p in einer festen kompakten Menge K enthalten sind,

2° die Ableitungen $D\psi_p$ beliebiger Ordnung gleichmäßig gegen Null konvergieren.

Auf dem Raume $\mathscr{D}(G_n)$ sind folgende Operationen linear und stetig:

(a) Multiplikation $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(G_n)$: $\varphi, \psi \to \psi \cdot \varphi \in \mathscr{D}(G_n)$;

(b) Faltung $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(G_n)$: $(\varphi, \psi) \to \psi * \varphi \in \mathscr{D}(G_n)$; $(\varphi, \psi) \to (\varphi * \psi) \in \mathscr{D}(G_n)$;

(c) Linke (rechte) Verschiebung: $(L_g\varphi)(P) = \varphi(gP)$, $(R_g\varphi)(P) = \varphi(Pg)$, $P \in G_n$.

Definition 1.1. Φ_n ist der Raum derjenigen Funktionen $\varphi \in C_0(G)$, für welche $[\varphi] \in \mathscr{D}(G/N_n)$.

Der lineare Raum Φ_n ist — definitionsgemäß — mit der Topologie des Raumes $\mathscr{D}(G/N_n)$ ausgestattet.

Definition 1.2. Der strikte induktive Limes $\Phi = \varinjlim \Phi_n$ wird im Folgenden oft als $\mathscr{D}(G)$ bezeichnet.

Wir geben jetzt den in [5] bewiesenen Satz wieder (vgl. auch [1] und [3]).

Satz 1.1. *Der Raum $\mathscr{D}(G)$ ist*

1° *separabel und nuklear,*

2° *$\mathscr{D}(G)$ ist dicht in $L^p(G)$ für jedes $p \geqslant 1$.*

Genauer

3° *jedes $f \in C_0(G)$ kann man gleichmäßig mit Elementen aus $\mathscr{D}(G)$ approximieren.*

Beweis. Ad 1°. $\Phi_n = \mathscr{D}(G/N_n)$ ist bekanntlich separabel und nuklear, Φ als strikter induktiver Limes separabler nuklearer Räume ist wieder nuklear und separabel.

Ad 3°. Es sei $f \in C_0(G)$ und O_n eine solche symmetrische Umgebung von 1, daß $|f(x) - f(y)| < 1/n$ für alle $x, y \in G$, für welche $x^{-1}y \in O_n$. Es sei $N_n \subset O_n$ und $G_n = G/N_n$ Liesch. Es sei $d\xi$ ein invariantes normiertes Maß auf N_n, d. h. $\int_{N_n} d\xi = 1$.

Es sei $f_n(x) := \int_{N_n} f(x\xi)\, d\xi$, dann haben wir für jedes $\sigma \in N_n$

$$f_n(x\sigma) = \int_{N_n} f(x\sigma\xi)\, d\xi = \int_{N_n} f(x\sigma\sigma^{-1}\xi)\, d\xi = f_n(x); \tag{1.3}$$

f_n ist also konstant auf den Nebenklassen xN_n, $x \in G$. Aber

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\int_{N_n} f(x)\, d\xi - f_n(x)\right| \leqslant \int_{N_n} |f(x) - f(x\xi)|\, d\xi < \frac{1}{n}\int_{N_n} d\xi = \frac{1}{n}. \tag{1.4}$$

Da $[f_n]\in C_0(G_n)$, können wir $[f_n]$ gleichmäßig mit $[\varphi_n]\in\mathcal{D}(G_n)$ approximieren: es gibt ein solches $[\varphi_n]\in\mathcal{D}(G_n)$, daß

$$(1.5)\qquad |([f_n]-[\varphi_n])([x])| < \frac{1}{n}.$$

Daher wegen (1.2)

$$(1.5)\qquad |f_n(x)-\varphi_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Aus (1.4) und (1.5') $|f(x)-\varphi_n(x)| < 2/n$, wo $\varphi_n\in\Phi_n\subset\mathcal{D}(G)$.

2° folgt unmittelbar aus 3°, da $C_0(G)$ dicht in $L^p(G)$ ist.

Definition 1.2. Der zu Φ duale Raum Φ' wird mit $\mathcal{D}'(G)$ bezeichnet. Elemente des Raumes $\mathcal{D}'(G)$ heißen *Distributionen* auf der l. k. Gruppe G.

Aus Satz 1 folgt unmittelbar (vgl. [1] und [4])

Satz 2. *Der Raum $\mathcal{D}'(G)$ ist vollständig und nuklear. Es gelten die Inklusionen: $\mathcal{D}(G)\subset C_0(G)\subset L^2(G)\subset\mathcal{D}'(G)$, wobei jeder Raum im Folgenden dicht ist und die entsprechenden Injektionen stetig sind. Die linken (rechten) Verschiebungen induzieren eine stetige Darstellung von G in $\mathcal{D}(G)$: für jedes $\varphi\in\mathcal{D}(G)$ ist*

$$(1.6)\qquad g\to L_g\varphi\in\mathcal{D}(G)$$

stetig. Für jedes $g\in G$ ist $L_g\in\mathcal{L}(\mathcal{D}(G))$.

Beweis. Wir zeigen hier nur die letzte Behauptung.

Die Einschränkung $L_g|\Phi_n$ ist stetig auf Φ_n (weil linear und abgeschlossen). Da $L_g\colon \Phi\to\Phi$ linear ist, bildet L_g stetig, $\Phi=\varinjlim\Phi_n$, auf sich ab.

Da auf der Liescher Gruppe G_n $(=G/N_n)$ die Verschiebungen stetige Darstellungen induzieren, und weil die Einbettungen $I_n\colon \Phi_n\to\Phi$ stetig sind, ist die Darstellung (1.6) stetig.

§ 2. Universelle umhüllende Algebra einer l. k. zusammenhängenden Gruppe. Es sei M eine lineare stetige Abbildung: $\Phi\to\Phi$. Wir bezeichnen mit $[M]_n$ eine Einschränkung von M auf Φ_n.

Nach diesen einführenden Bezeichnungen können wir schon eine Definition der umhüllenden Algebra $\mathcal{E}(G)$ der Gruppe G anführen:

Definition 2.1. Eine Menge $\mathcal{E}(G)$ der linearen, stetigen Abbildungen $M\colon \Phi\to\Phi$ nennen wir die *umhüllende Algebra* der Gruppe G, wenn für ein beliebiges n und beliebiges $\varphi_n\in\Phi_n$

$$(2.1)\qquad [M]_n\varphi_n = \Delta_n\varphi_n\in\Phi_n,$$

wo Δ_n ein Element der rechtsinvarianten umhüllenden Algebra der Lie-Gruppe G_n ist: $\Delta_n\in\mathcal{E}(G_n)$, also ein Differentialoperator auf G_n ist.

Bekanntlich sind Operatoren der umhüllenden Algebra der Lie-Gruppe mit rechten Verschiebungen vertauschbar.

Wir bezeichnen den Operator der rechten Verschiebung mit R_s: $R_sf(g)=f(gs)$, also für jedes $[s]$, $g\in G_n$, haben wir

$$R_{[s]}\Delta_n\varphi_n([g]) = \Delta_nR_{[s]}\varphi_n([g]).$$

Daraus — wegen der Definition (2.1) — folgt Vertauschbarkeit der Operatoren aus $\mathcal{E}(G)$ mit den rechten Verschiebungen. In der Tat, für $\varphi\in\Phi$ existiert (wegen 1.1) ein solches n, daß $\varphi\in\Phi_n$, also $R_sM\varphi(g) = (M\varphi)(gs) = \Delta_n\varphi([g][s]) = R_{[s]}\Delta_n\varphi([g])$, wo $[g][s]=[gs]$. Aber wegen der Vertauschbarkeit von Δ_n und R_s ist

$$R_{[s]}\Delta_n\varphi([g]) = \Delta_nR_{[s]}\varphi([g]) = \Delta_n\big(\varphi([g][s])\big) = M\big(\varphi(gs)\big) = MR_s\varphi(g),$$

also

$$R_sM\varphi(g) = MR_s\varphi(g).$$

Wir definieren jetzt einen elliptischen Operator in $\mathcal{E}(G)$.

Definition 2.2. Ein Operator $M\in\mathcal{E}(G)$ heißt *elliptisch* wenn, für jedes n, $[M]_n=\Delta_n$ ein elliptischer Operator auf G_n ist.

Auf diese Weise definiert man auch einen formaladjungierten Operator:

Definition 2.3. Es sei $M\in\mathcal{E}(G)$. Eine lineare, stetige Abbildung $M^+\colon \Phi\to\Phi$ ist *formaladjungiert* zu M, wenn $[M^+]_n=\Delta_n^+$, wo Δ_n^+ ein formaladjungierter Operator zu Δ_n auf G_n ist, $n=1,2,\ldots$

Definition 2.3 kann man kurz auf folgende Weise schreiben:

$$(2.2)\qquad [M^+]_n = ([M]_n)^+,\qquad n=1,2,\ldots$$

Man kann leicht beweisen, daß auf jeder Lie-Gruppe, das heißt auch auf jeder $G_n=G/N_n$

$$\int_{G_n}\Delta_n\varphi_n(P)\overline{\psi}_n(P)\,dP = \int_{G_n}\varphi_n(P)\overline{\Delta_n^+\psi_n}(P)\,dP.$$

Daher folgt auch, daß

$$(2.3)\qquad \int_G(M\varphi)(g)\psi(g)\,dg = \int_G\varphi(g)(M^+\psi)(g)\,dg.$$

Tatsächlich, da φ und ψ Elemente eines Φ_n sind, folgt aus der Definition 1.3 ([2]):

$$\int_G M\varphi(g)\overline{\psi}(g)\,dg = \int_{G_n}\Big(\int_{N_n}(\Delta_n\varphi)(g)\overline{\psi}(g\xi)\,d\xi\Big)dP = \int_{G_n}(\Delta_n\varphi)(P)\overline{\psi}(P)\,dP$$

$$= \int_{G_n}\varphi(P)\,\Delta_n^+\psi(P)\,dP = \int_{G_n}dP\int_{N_n}\varphi(g\xi)\,\Delta_n^+\psi(g\xi)\,d\xi = \int_G\varphi(g)\overline{M^+\psi}(g)\,dg.$$

([2]) $\Delta_n\varphi$ und ψ sind auf N_n konstant.

Es sei $U: g \to U(g)$ eine unitäre Darstellung der Gruppe G in einem Hilbertschen Raume H.

Man kann auf dieselbe Weise, wie für eine Lie-Gruppe einen Gårding--Raum der Darstellung (U, H) für eine lokalkompakte zusammenhängende Gruppe definieren.

Definition 2.4. Wir nennen den *Gårding-Raum von* (U, H) die Menge $\mathfrak{G}$ der linearen Kombinationen von Elementen:

$$U(\varphi)h := \int_G \varphi(g)U(g)h\,dg, \quad \text{wo} \quad h \in H,\ \varphi \in \Phi = \mathscr{D}(G).$$

Wie im Falle der Lie-Gruppe beweist man, daß $\mathfrak{G}$ dicht in H ist. Eine unitäre Darstellung U der Gruppe G induziert eine auf dem Gårding-Raume definierte Darstellung der universellen umhüllenden Algebra $\mathscr{E}(G)$, die wir mit dU bezeichnen.

Definition 2.5. Für $M \in \mathscr{E}(G)$ ist $dU(M)U(\varphi)h := U(M\varphi)h := \int_G (M\varphi)(g)U(g)h\,dg$, wo $\varphi \in \Phi$.

Auf solche Weise definierte Darstellung der universellen umhüllenden Algebra hat folgende Eigenschaften:

Lemma 2.1. $dU(M_1M_2) = dU(M_1)dU(M_2)$ *für* $M_1, M_2 \in \mathscr{E}(G)$.

Beweis. Tatsächlich, wir haben $dU(M_1M_2)U(\varphi)h = U(M_1M_2\varphi)h = dU(M_1)U(M_2\varphi)h = dU(M_1)dU(M_2)U(\varphi)h$ identisch für $h \in H$.

Lemma 2.2. *Für jedes* $M \in E(G)$ *gilt* $dU(M^+) \subset \big(dU(M)\big)^*$.

Beweis. Für $e, h \in H$ und $\psi, \varphi \in \Phi$ hat man

$$(2.4)\qquad \Big(dU(M^+)U(\varphi)e\,dg \Big| \int_G \psi(s)U(s)h\,ds\Big) = \int\int (M^+\varphi)(g)\bar{\psi}(s)\big(e\big|U(g^{-1}s)\big)h\,ds\,dg.$$

Wegen der linken Invarianz des Masses ds auf G kann man die rechte Seite von (2.4) auf folgende Weise schreiben:

$$(2.5)\qquad \int_G (M^+\varphi)(g)\Big(\int_G \overline{\psi(gs)}(gs)\big(e\big|U(s)h\,ds\Big)dg = \int_G \big(e\big|U(s)h\big)\int_G (M^+\varphi)(g)\overline{\psi(gs)}\,dg\,ds.$$

Aber aus (2.3) folgt

$$(2.6)\qquad \int_G (M^+\varphi)(g)\overline{\psi(gs)}\,dg = \int \varphi(g)\overline{MR_s\psi(g)}\,dg$$

und aus der Vertauschbarkeit von M mit R_s folgt

$$\int_G \varphi(g)\overline{MR_s\psi(g)}\,dg = \int_G \varphi(g)\overline{R_sM\psi(g)}\,dg = \int_G \varphi(g)\overline{(M\psi)(gs)}\,dg.$$

Nach der Änderung der Reihenfolge der Integration erhalten wir aus (2.4), (2.5) und (2.6) wegen der linken Invarianz des Masses folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}\big(dU(M^+)U(\varphi)e\big|U(\psi)h\big) &= \int_G \big(e\big|U(s)h\big)\int_G \varphi(g)\overline{M\psi}(gs)\,dg\,ds \\ &= \int_G\int_G \big(e\big|U(s)h\big)\varphi(g)(\overline{M\psi})(gs)\,ds\,dg = \int_G \varphi(g)\int_G \big(e\big|U(g^{-1}s)h\big)\overline{M\psi(s)}\,ds\,dg \\ &= \int \varphi(g)\int \big(U(g)e\,|\,U(s)h\big)\overline{M\psi(s)}\,ds\,dg \\ &= \Big(\int_G \varphi(g)U(g)e\,dg\Big|\int_G (M\psi)(s)U(s)h\,ds\Big) = \big(U(\varphi)e\big|dU(M)U(\psi)h\big).\end{aligned}$$

Also $dU(M^+) \subset \big(dU(M)\big)^*$, w. z. b. w.

Aus dem Lemma 2.2 folgt

Korollar 2.1. *Wenn* $M \in \mathscr{E}$, *dann* $dU(M^+M) \geqslant 0$.

Beweis. In der Tat, wegen Lemma 2.1, ist für jedes $e \in H$

$$dU(M^+M)U(\varphi)e = dU(M^+)dU(M)U(\varphi)e,$$

also

$$\big(dU(M^+)dU(M)U(\varphi)e\,|\,U(\varphi)e\big) = \big(dU(M)U(\varphi)e\,|\,dU(M)U(\varphi)e\big) \geqslant 0.$$

Aus dem Lemma (2.2) folgt unmittelbar

Korollar 2.2. *Für einen symmetrischen Operator* $M = M^+$ *ist* $dU(M)$ *auch symmetrisch*

$$\big(dU(M)U(\varphi)e\,|\,U(\psi)h\big) = \big(U(\varphi)e\,|\,dU(M)U(\psi)h\big).$$

§ 3. Selbstadjungierte Repräsentanten der Elemente von $\mathscr{E}(G)$. Die in diesem Abschnitt bewiesene Sätze geben eine Verallgemeinerung der von Nelson und Stinespring [9] im Falle einer Lie-Gruppe bewiesenen Sätze.

Der Beweis dieser Sätze stützt sich auf folgenden Hilfssätzen:

Lemma 3.1 (Nelson-Stinespring). *Es sei f eine beliebig oft differenzierbare, positiv definiete Funktion auf einer Lie-Gruppe G_n, und es sei L ein Element der universellen umhüllenden Algebra dieser Gruppe*: $L \in \mathscr{E}(G_n)$. *Dann ist* $(LL^+f)(1) \geqslant 0$; 1 — *die Einheit der Gruppe* G_n.

Lemma 3.2 (Nelson-Stinespring [7]). *Es sei D eine lineare Menge in einem Hilbertschen Raume H, die in H dicht ist, und T_k seien solche Operatoren in H für welche* $T_k(D) \subset D = D(T_k)$, $k = 1, 2$, *und dazu* $T_1 \subset T_2^*$. *Falls* T_1T_2 *wesentlich selbstadjungiert* (*w. s. a*). *ist, dann gilt* $\overline{T}_1 = T_2^*$.

Wir bemerken noch, daß man die Elemente des Gårding-Raumes auf eine andere Weise schreiben kann. Tatsächlich folgt aus Definition (1.2), daß für jedes $\psi \in \Phi$ ein solches n existiert, daß $\psi \in \Phi_n$, also

$$U(\psi)h = \int_G \psi(g)U(g)h\,dg = \int_{G_n} \psi(P)\,dP \int_{N_n} U(g\xi)h\,d\xi. \tag{3.1}$$

Wir führen jetzt den Operator

$$F_n := \int_{N_n} U(\xi)\,d\xi \tag{3.2}$$

ein. Da $U(g\xi) = U(g)U(\xi)$, erhalten wir aus (3.1) für ein beliebiges $\psi \in D(G)$

$$U(\psi)h = \int_G \psi_n(g)U(g)h\,dg = \int_{G_n} \psi_n(P)U(P)F_n h\,dP. \tag{3.3}$$

Wir beweisen die folgenden Hilfssätze:

LEMMA 3.3. *Der durch (2.2) definierte Operator F_n ist ein Projektionsoperator.*

Beweis. Wie man leicht sieht: (a) ist F_n beschränkt, (b) F_n ist selbstadjungiert.

In der Tat, wegen der Biinvarianz des Masses $d\xi$ auf der kompakten Gruppe N_n haben wir für jedes e,

$$h \in H = (F_n e|h) = \Big(\int_{N_n} U(\xi)\,d\xi\, e|h\Big) = \int_{N_n} \big(U(\xi)e|h\big)\,d\xi = \int_{N_n} \big(e|U^{-1}(\xi)h\big)\,d\xi$$
$$= \int_{N_n} \big(e|U(\xi^{-1})h\big)\,d\xi = \int_{N_n} \big(e|U(\eta)h\big)\,d\eta = \Big(e\Big|\int_{N_n} U(\eta)\,d\eta\, h\Big) = (e|F_n h).$$

(c) F_n ist ein Idempotent:

$$F_n F_n e = \iint_{N_n} U(\xi)U(\eta)e\,d\xi\,d\eta = \iint_{N_n} U(\xi\eta)e\,d\xi\,d\eta.$$

Aber wegen der rechten Invarianz des Masses auf N_n ist

$$\iint_{N_n} U(\xi\eta)e\,d\xi\,d\eta = \iint_{N_n} U(\xi)e\,d\xi\,d\eta = \int_{N_n} U(\xi)e\,d\xi = F_n e.$$

(Das Mass $d\xi$ ist normiert, d. h. $\int_{N_n} d\xi = 1$).

LEMMA 3.4. *Es sei $U\colon g \to U(g)$ eine unitäre starkstetige Darstellung der Gruppe G, F_n — ein durch (3.2) definierter Projektionsoperator und $dU(M)$ ein durch Definition 2.5 definierter Operator.*

Dann gilt für jedes $n = 1, 2, \ldots$

$$F_n dU(M)U(\varphi_n)h = dU(M)U(\varphi_n)h$$

identisch für $\varphi_n \in \Phi_n$ und $h \in H$.

Beweis. Wegen der Definition (1.5) erhalten wir aus (2.3) für $\varphi_n = M\varphi_n$:

$$F_n dU(M)U(\varphi_n)h = \int_{N_n} U(\xi)\,d\xi \int_G (M\varphi_n)(g)U(g)h\,dg$$
$$= \int_{N_n} d\xi \int_G (M\varphi_n)(g)U(\xi g)h\,dg.$$

Daher haben wir wegen der linken Invarianz des Masses dg

$$F_n dU(M)U(\varphi_n)h = \int_{N_n} d\xi \int_G (M\varphi_n)(\xi^{-1}g)U(g)h\,dg \tag{3.4}$$
$$= \int_G U(g)h \int_{N_n} (M\varphi_n)(\xi^{-1}g)\,d\xi\,dg.$$

Da aber $M\varphi_n$ konstant auf den Nebenklassen $[g] = gN_n = N_n g$ des Normalteilers N_n ist, haben wir aus (3.4)

$$F_n dU(M)U(\varphi_n)h = \int_G U(g)hM\varphi_n(g)\,dg \int_{N_n} d\xi = dU(M)U(\varphi_n)h,$$

w. z. b. w.

LEMMA 3.5. (a) *Die Funktion $f(g) = \big(U(g)F_n h|F_n h\big)$ ist konstant auf den Nebenklassen $[g]_n = gN_n$ des Normalteilers N_n;* (b) *$[f]_n$ ist stetig und* (c) *positivdefinit auf G_n.*

Beweis. (a) Es sei $s \in N_n$, $f(gs) = \big(U(gs)F_n h|F_n h\big)$. Aber aus der Definition F_n (siehe (3.2)) folgt

$$U(gs)F_n h = U(g)U(s)\int_{N_n} U(\xi)\,d\xi\,h = U(g)\int_{N_n} U(s\xi)\,d\xi\,h, \tag{3.5}$$

also wegen der linken Invarianz des Masses auf N_n haben wir aus (2.5)

$$U(gs)F_n h = U(g)\int_{N_n} U(\xi)\,d\xi\,h = U(g)F_n h$$

und daher

$$F(gs) = \big(U(gs)F_n h|F_n h\big) = \big(U(g)F_n h|F_n h\big) = f(g),$$

das heißt, f ist konstant auf den Nebenklassen $[g]_n = gN_n$.

(b) Stetigkeit von $[f]_n$ auf G_n folgt aus der Stetigkeit von $U(g)$ auf G.

(c) Für eine beliebige Funktion $\varphi_n \in \Phi_n$ gilt

$$\iint_G \big(U(gs^{-1})h\big|\,h\big)\varphi_n(g)\overline{\varphi_n(s)}\,dg\,ds \tag{3.6}$$
$$= \iint_G \big(U(s^{-1})h\big|\,U(g^{-1})h\big)\varphi_n(g)\overline{\varphi_n(s)}\,dg\,ds$$
$$= \Big(\int_G \overline{\varphi_n(s)}\,U(s^{-1})h\,ds\Big|\int_G \overline{\varphi_n(g)}\,U(g^{-1})h\,dg\Big) \geqslant 0.$$

Aber analog wie (3.3) kann man folgende Identität erhalten:

$$\int_G \overline{\varphi_n(s)}\, U(s^{-1})\, h\, ds = \int_{G_n} \overline{\varphi_n(s)}\, U(s^{-1})\, F_n\, h\, ds. \tag{3.7}$$

Wegen (3.7) erhalten wir aus (3.6)

$$\Big(\int_{G_n} \overline{\varphi_n(s)}\, U(s^{-1}) F_n h\, ds \,\Big|\, \int_{G_n} \overline{\varphi_n(g)}\, U(g^{-1}) F_n h\, dg\Big) \geqslant 0.$$

Aber

$$\Big(\int_{G_n} \overline{\varphi_n(s)}\, U(s^{-1}) F_n h\, ds \,\Big|\, \int_{G_n} \overline{\varphi_n(g)}\, U(g^{-1}) F_n h\, dg\Big) = \iint_{G_n} \overline{\varphi_n(s)}\,\varphi_n(g) \big(U(gs^{-1}) F_n h \,|\, F_n h\big)\, dg\, ds,$$

also

$$\iint_{G_n} \overline{\varphi_n(s)}\,\varphi_n(g) \big(U(gs^{-1}) F_n h \,|\, F_n h\big)\, dg\, ds = \iint_{G_n} \overline{\varphi_n(s)}\,\varphi_n(g) f(gs^{-1})\, ds\, dg \geqslant 0 \tag{3.8}$$

identisch für $\varphi_n \in \Phi_n$.

Wegen der Stetigkeit von f auf G_n folgt aus (3.8) bekanntlich, daß $[f]_n$ auf G_n positiv definit ist, w. z. b. w.

Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

SATZ 3.1. *Es sei U: $g \to U(g)$ eine stark-stetige unitäre Darstellung einer l. k. zusammenhängenden Gruppe G und L ein elliptischer Operator aus der universellen umhüllenden Algebra $E(G)$ dieser Gruppe; dann gilt*

$$\overline{dU(L^+)} = \big(dU(L)\big)^*.$$

Beweis. 1° Wir beweisen den Satz zuerst in dem Spezialfall $L = K^+K$ und $K \in E(G)$ (vgl. [9]). Wir werden uns auf die Tatsache stützen, daß ein Operator $A \geqslant 0$ w. s. a. ist, wenn $A+I$ einen in H dichten Wertevorrat $R(A+I)$ besitzt. Wir bezeichnen $L+I = M$ und $A = dU(L)$ und beweisen, daß $A+I = dU(L)+I = dU(M)$ einen in H dichten Wertevorrat besitzt.

Nehmen wir an, es gäbe ein Element $0 \neq e \in H$, das zu $dU(M)\mathfrak{G} = \{dU(M)\,U(\varphi)h;\ h \in H\}$ orthogonal ist. Es gilt also

$$\big(dU(M)\,U(\varphi_n)e \,|\, e\big) = 0 \text{ identisch für } \varphi_n \in \Phi_n. \tag{3.9}$$

Wegen Lemma 3.4 und 3.3 erhalten wir aus (3.9)

$$\big(F_n dU(M)\,U(\varphi_n)e \,|\, e\big) \equiv \big(dU(M)\,U(\varphi_n)e \,|\, F_n e\big) \underset{\varphi_n}{\equiv} 0.$$

Aber $M\varphi_n = \Delta_n\varphi_n \in \Phi_n$, wo Δ_n ein elliptischer Operator auf G_n ist, also

$$dU(M)\,U(\varphi_n)e = \int_{G_n} dP \int_{N_n} (M\varphi_n)(g\xi)\, U(g\xi)\, e\, d\xi = \int_{G_n} (\Delta_n\varphi_n)(P)\, U(g) F_n e\, dP.$$

Daher folgt

$$0 \equiv \big(dU(M)\,U(\varphi_n)e \,\big|\, F_n e\big) \equiv \int_{G_n} (\Delta_n\varphi_n)(P)\big(U(g)F_n e \,\big|\, F_n e\big)\, dP,$$

d. h. die Funktion $g \to \big(U(g)F_n e | F_n e\big) = f(g)$ ist eine schwache Lösung der elliptischen Gleichung $\Delta_n\Psi = 0$; f ist also eine klassische Lösung. Es gilt daher

$$\Delta_n\big(U(g)F_n e | F_n e\big) = 0. \tag{3.10}$$

Aber aus Lemma 3.1 und 3.5 folgt

$$[L]_n\big(U(g)F_n e | F_n e\big) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad g = 1, \tag{3.11}$$

denn $[L]_n = [K^+]_n[K]_n = [K]_n^+[K]_n$ (siehe Lemma 2.1 und 2.2). Da $\Delta_n = [M]_n = [L+I]_n = [L]_n + [I]_n$, erhalten wir aus (3.11)

$$\Delta_n\big(U(g)F_n e | F_n e\big) = [L]_n\big(U(g)F_n e | F_n e\big) + \big(U(g)F_n e | F_n e\big) > 0 \tag{3.12}$$

für $g = 1$. Aber das widerspricht der Gleichung (3.10), also $dU(M)$ besitzt einen in H dichten Wertevorrat und folglich $dU(L)$ ist w. s. a.

2° Der Beweis des Satzes im Falle eines beliebigen elliptischen Operators $L \in E(G)$ folgt aus Lemma 3.2. Es genügt nur im Lemma 3.2 $T_1 = dU(L^+)$, $T_2 = dU(L)$ zu setzen. Da $dU(L^+L) = dU(L^+)dU(L)$ w. s. a. ist (vergleiche den ersten Teil des Beweises), erhalten wir aus Lemma 3.2 $\overline{dU(L^+)} = \big(dU(L)\big)^*$, w. z. b. w.

Für spätere Anwendungen ist der folgende Satz sehr nützlich:

SATZ 3.2. *Es sei U eine unitäre stark stetige Darstellung einer l. k. zusammenhängenden Gruppe G. Es sei L ein symmetrischer elliptischer Operator aus $\mathscr{E}(G)$ und M ein solches Element aus $\mathscr{E}(G)$, daß $dU(M^+M)$ mit $dU(L)$ auf dem Raume G vertauschbar ist. Dann gilt*

$$\overline{dU(M^+)} = \big(dU(M)\big)^*.$$

Beweis. Für jedes $n = 1, 2$ sei $r = r(n)$ eine positive ganze Zahl, die grösser als die Ordnung des Operators $[M]_n$ ist. $[L]_n^{2r}$ ist ein elliptischer Operator auf G_n, weil er eine Superposition elliptischer Operatoren auf G_n ist.

Es sei $\mathscr{L}$ ein solcher Operator aus $E(G)$, daß $[\mathscr{L}]_n = [L]_n^r$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist. Wie aus der Definition 2.2 folgt, ist sowohl $\mathscr{L}$ als auch $\mathscr{L}\mathscr{L}$ elliptisch. Aus der Definition 2.2 folgt ebenfalls, daß der Operator

$M^+M+\mathscr{L}\mathscr{L}$ auch elliptisch ist, denn für jedes n ist der Operator $[M^+M+\mathscr{L}\mathscr{L}]_n = [M^+M]_n+[\mathscr{L}\mathscr{L}]_n = [M^+M]_n+[L]_n^{2r}$ elliptisch (die Ordnung des Operators $[L]_n^{2r}$ ist grösser als die des Operators $[M^+M]_n$).

Wegen der Symmetrie von L gilt, für jedes n, $[\mathscr{L}]_n = ([L]_n^+)^r = [L^r]_n^+ = [\mathscr{L}]_n^+$, d. h.

$$L = L^+. \tag{3.13}$$

Wir bezeichnen:

$$B = dU(M^+M), \quad A = dU(\mathscr{L}\mathscr{L}), \quad C = A+B = dU(M^+M+\mathscr{L}\mathscr{L}).$$

Wie aus dem Satze 2.1 folgt, sind A und C — als Repräsentanten elliptischer symmetrischer Operatoren — w. s. a. Wir beweisen zuerst, daß A mit B vertauschbar ist. Tatsächlich, für jedes $\varphi_n \in \Phi_n$ und $h \in H$ haben wir wegen (3.13)

$$\begin{aligned} dU(M^+M)\,dU(\mathscr{L}\mathscr{L})\,U(\varphi_n)h &= U(M^+M\mathscr{L}\mathscr{L}\varphi_n)h \\ &= U(M^+M[L]_n^{2r}\varphi_n)h = U(M^+M[L]_n[L]_n^{2r-1}\varphi_n)h \\ &= dU(M^+M)\,dU(L)\,U([L]_n^{2r-1}\varphi_n)h. \end{aligned}$$

Wegen der Vertauschbarkeit von $dU(M^+M)$ mit $dU(L)$ erhalten wir daher

$$dU(M^+M)dU(\mathscr{L}\mathscr{L})\,U(\varphi_n)h = dU(L)dU(M^+M)\,U([L]_n^{2r-1}\varphi_n)h. \tag{3.14}$$

Nach der $(2r(n)-1)$-fachen Wiederholung derselben Prozedur erhalten wir aus (3.14):

$$dU(M^+M)dU(\mathscr{L}\mathscr{L})\,U(\varphi_n)h = dU(\mathscr{L}\mathscr{L})dU(M^+M)\,U(\varphi_n)h$$

für jedes n identisch für $\varphi_n \in \Phi_n$; also, da $\Phi = \lim \Phi_n$ ist, gilt auch für jedes $\varphi \in \Phi$:

$$dU(M^+M)dU(\mathscr{L}\mathscr{L})\,U(\varphi)h = dU(\mathscr{L}\mathscr{L})dU(M^+M)\,U(\varphi)h,$$

d. h. ist A mit B vertauschbar. Aus der Vertauschbarkeit A mit B folgt die Vertauschbarkeit A mit C.

Der weitere Teil des Beweises ist identisch wie im Beweise des Satzes von Nelson und Stinespring [9]. Man beweist, daß A und C vertauschbare Spektralscharen haben: die beschränkten Operatoren $(I+A)^{-1}\times\times(I+C)^{-1}$ und $(I+C)^{-1}(I+A)^{-1}$ sind gleich auf dem Wertevorrat des Operators $(I+A)(I+C) = (I+C)(I+A)$. Aber diese Menge ist dicht in H, denn $(I+A)(I+C) = I+A+C+AC$ der Repräsentant eines symmetrischen, elliptischen Operators ist, und der Operator $A+C+AC \geqslant 0$ ist. Daher folgt, daß $(I+A)^{-1}$ mit $(I+C)^{-1}$ auf dem ganzen H vertauschbar ist.

Um zu beweisen, daß B w. s. a. ist, genügt es zu zeigen, daß der s. a. Operator $B_1 = \bar{C}-\bar{A}$ mit dem Definitionsbereich: $D(B_1) = D(\bar{A}) \cup D(\bar{C})$ eine Einschränkung von $\bar{B}$ ist, d. h. $B \subset B_1 \subset \bar{B}$. Da aber jeder s. a. Operator abgeschlossen und $\bar{B}$ die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von B ist, erhalten wir aus $B_1 \subset \bar{B}$, daß $\bar{B} = B_1$ s. a. ist.

Es sei $v \in D(B_1) = D(\bar{A}) \cap D(\bar{C})$. Aus der Abgeschlossenheit von $\bar{C}$ folgt, daß eine solche Folge (v_n) existiert, daß

$$\mathfrak{G} \ni v_n \to v \quad \text{und} \quad Cv_n \to Cv. \tag{3.15}$$

Für ein beliebiges $u \in \mathfrak{G}$ haben wir:

$$\|Au\| \leqslant \|Cu\|.$$

Tatsächlich,

$$(Cu\,|\,Cu) = \big((A+B)u\,|\,(A+B)\big) = \|Au\|^2+\|Bu\|^2+(Bu\,|\,Au)+ +(Au\,|\,Bu). \tag{3.16}$$

Aber wegen Lemma 2.1 ist $A = dU(\mathscr{L}\mathscr{L}) = dU(\mathscr{L})dU(\mathscr{L})$. Aber, da $dU(\mathscr{L})$ — als Repräsentant eines symmetrischen Operators — symmetrisch ist (siehe Korollar 2.2) und mit B vertauschbar, kann man es auf dieselbe Weise wie die Vertauschbarkeit von $dU(\mathscr{L}\mathscr{L})$ mit $dU(M^+M)$ beweisen. Daher haben wir $(Bu|Au)+(Au|Bu) = 2\big(BdU(\mathscr{L})u\,|\,dU(\mathscr{L})u\big)$. Da, wegen Korollar 2.1, $\big(BdU(\mathscr{L})u\,|\,dU(\mathscr{L})u\big) \geqslant 0$ ist, erhalten wir aus (3.16)

$$\|Cu\|^2 \geqslant \|Au\|^2.$$

Es sei jetzt $u = v_n - v_m$, also haben wir aus (3.15)

$$\|Av_n - Av_m\| \leqslant \|Cv_n - Cv_m\| \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty.$$

Also wegen der Abgeschlossenheit von $\bar{A}$ haben wir $Av_n \to \bar{A}v$. Daher aus (3.15) erhalten wir

$$Bv_n = (Cv_n - Av_n) \to \bar{C}v - \bar{A}v = B_1 v.$$

Also für $v \in D(B_1)$ ist $B_1 v = \bar{B}v$, d. h. $B_1 \subset \bar{B}$ und daher $B_1 = \bar{B}$; der Operator $\bar{B}$ ist also s. a. Da $B = dU(M^+)dU(M)$ w. s. a. und $dU(M^+) \subset dU(M)^*$ (Lemma 1.2) ist, erhalten wir aus Lemma 3.2

$$\overline{dU(M^+)} = \big(dU(M)^*\big),$$

w. z. b. w.

§ 4. Zerlegung der Darstellung (U, H). In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die in § 3 gegebene Konstruktion der Operatoren $dU(M)$ eine Zerlegung der Darstellung (U, H) in ein direktes Integral $\big(\int U(\lambda), \int H(\lambda)\,d\mu(\lambda)\big)$ erlaubt, wobei die Darstellungsraüme $H(\lambda)$ als gemeinsame

Eigenraüme der selbstadjungierten Operatoren $\overline{dU(M)}$ — wo M zentral und symmetrisch ist — verstanden werden dürfen. Dazu ist notwendig: 1° die starke Vertauschbarkeit der Operatoren $\overline{dU(M)}$, $M^+ = M \in Z(G)$, 2° die Vertauschbarkeit dieser Operatoren mit der Darstellung U, 3° die Existenz eines der Darstellung U gemässen Gelfand-Triplets $\Psi \subset H \subset \Psi'$.

LEMMA 4.1. *Es seien M_k $(k = 1, 2)$ zentral und symmetrisch, dann sind die s. a. Operatoren $\overline{dU(M_1)}$ und $\overline{dU(M_2)}$ stark vertauschbar.*

Beweis folgt augenblicklich aus einem wichtigen Satz von E. Nelson [8], der das folgende Kriterium der starken Vertauschkeit gibt:

Es seien A_1, A_2 symmetrische Operatoren in H. Falls es eine solche lineare in H dichte Menge Q gibt, daß Q in den Definitionsgebieten von $A_1, A_2, A_1^2, A_2^2, A_1A_2, A_2A_1$ enthalten ist, wobei $A_1A_2h = A_2A_1h$ für alle h in Q, und falls $(A_1^2+A_2^2)|_Q$ wesentlich s. a. ist, dann sind A_1, A_2 w. s. a. und die s. a. Operatoren $\bar{A}_1$ und $\bar{A}_2$ sind stark vertauschbar.

Wir erhalten die Behauptung von Lemma 4.1, wenn wir $A_k = dU(M_k)$, $Q = \mathfrak{G}$ setzen. Der Operator

$$dU(M_1)^2 + dU(M_2)^2 = dU(M_1^2+M_2^2) \tag{4.1}$$

ist w. s. a., da $M_1^2+M_2^2$ zentral und symmetrisch ist. Die Behauptung folgt, da auf dem Gårding-Raum die Operatoren $dU(M_1)$ und $dU(M_2)$ als Repräsentanten zentraler Elemente vertauschbar sind.

LEMMA 4.3. *Für $M = M^+ \in Z(G)$ sind die Operatoren $\overline{dU(M)}$ und $U(s)$, $s \in G$, vertauschbar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Operatoren $dU(M)$ und $U(s)$ auf dem Gårding-Raume kommutieren. Es sei $e \in H$, dann ist $U(\varphi)e \in \mathfrak{G}$. Also

$$\begin{aligned} U(s)dU(M)U(\varphi)e &= U(s)U(M\varphi)e = U(s)\int (M\varphi)(g)U(g)e\,dg \\ &= \int U(sg)(M\varphi)(g)e\,dg = \int U(g)(M\varphi)(s^{-1}g)e\,dg = U(L_{s^{-1}}M\varphi)e \\ &= U(ML_{s^{-1}}\varphi)e = dU(M)U(L_{s^{-1}}\varphi)e = dU(M)\int \varphi(s^{-1}g)U(g)e\,dg \\ &= dU(M)\int \varphi(g)U(s)U(g)e\,dg = dU(M)U(s)\int \varphi(g)U(g)e\,dg \\ &= dU(M)U(s)U(\varphi)e. \end{aligned}$$

Es sei $h \in D(\bar{A})$, wo wir zur Abkürzung $A = dU(M)$ setzen. Es gibt also eine Folge (h_n), wobei $h_n \in \mathfrak{G} = D(A)$ und $h_n \to h$, $Ah_n \to w$ für $n \to \infty$. Da $\bar{A}$ die Abschliessung von A ist, folgt daraus, daß $Ah_n \to \bar{A}h = w$. Da der Operator $U(s)$ stetig ist, haben wir also

$$\begin{aligned} U(s)\bar{A}h &= U(s)\lim Ah_n = \lim\big(U(s)Ah_n\big) = \lim\big(AU(s)h_n\big) \\ &= \bar{A}U(s)(\lim h_n) = \bar{A}U(s)h. \end{aligned}$$

Wir haben daher die Vertauschbarkeit von $\overline{dU(M)}$ und $U(s)$ bewiesen.

Konstruktion des nuklearen Raumes Ψ. Es sei $\mathcal{O}(e) = \{\varphi \in \mathcal{D}(G) : U(\varphi)e = 0\}$. Die lineare Menge $\mathcal{O}(e)$ ist abgeschlossen. Es sei (φ_a) eine verallgemeinerte Folge der Elemente aus $\mathcal{O}(e)$ und es sei $\varphi = \lim \varphi_a$. Aber $O = U(\varphi_a)e \to U(\varphi)e$, daher $U(\varphi)e = 0$, d. h. $\varphi \in \mathcal{O}(e)$. Somit ist der Quotientenraum $\mathcal{D}(G)/\mathcal{O}(e)$ nuklear. Es sei $\mathcal{H}(e)$ die Menge $\{U(\varphi)e : \varphi \in \mathcal{D}(G)\}$ ausgestattet mit nuklearen Topologie des Raumes $\mathcal{D}(G)/\mathcal{O}(e)$. Wenn nötig vervollständigen wir $\mathcal{H}(e)$.

Falls $\mathcal{H}(e_1)$ dicht in H ist, sind wir am Ziel. Wenn nicht — nehmen wir $e_2 \perp \mathcal{H}(e_1)$ und bilden topologische direkte Summe $\mathcal{H}(e_1) \oplus \mathcal{H}(e_2)$.

Wir wiederholen diese Prozedur und erhalten schließlich Ψ: $= \bigoplus_k \mathcal{H}(e_k)$. Als direkte Summe abzählbar vieler vollständiger nuklearer Raüme ist Ψ nuklear. Die (identische) Einbettung $\mathcal{J}: \Psi \to H$ ist stetig, weil jede Einbettung $\mathcal{J}_k: H(e_k) \to H$ stetig ist. Tatsächlich

$$\|U(\varphi)e_k\| = \Big\|\int \varphi(g)U(g)e_k\,dg\Big\| \leqslant |[\varphi]|_p \|e_k\|,$$

wo $|[\varphi]|_p$ eine Halbnorm in $\mathcal{D}(G)/\mathcal{O}(e_k)$ ist ([3]).

Weil, für jedes $M \in \mathcal{E}(G)$, $dU(M)$ ein stetiger Operator in Ψ ist, haben wir den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 4.1. *Es seien M_1 und M_2 zwei beliebige zentrale und symmetrische Elemente aus $\mathcal{E}(M)$, dann:* 1° *sind $\overline{dU(M_1)}$ und $\overline{dU(M_2)}$ stark vertauschbar;* 2° *$\overline{dU(M_k)}$ ist mit allen Elementen $U(s)$ der Darstellung U vertauschbar;* 3° *es gibt einen solchen nuklearen in H dichten Raum Ψ, daß die Einbettung $\Psi \to H$ stetig ist;* 4° *alle Operatoren $dU(M)$ bilden den Raum Ψ stetig in sich ab.*

Es sei $\mathcal{A}$ eine abelsche mit U vertauschbare C^*-Algebra, die Cayley--Transformierte $C_{\bar{A}}$ der Operatoren $\bar{A} = \overline{dU(M)}$ aus Satz 4.1 enthält. Bekantlich (vgl. [6]) induziert $\mathcal{A}$ eine Zerlegung der Darstellung (U, H) in ein direktes Integral

$$\int_\Lambda \oplus U(\lambda), \int_\Lambda H(\lambda)\,d\mu(\lambda).$$

Wie wir in [4] und [7] gezeigt haben, kann man $H(\lambda)$ als Unterräume von Ψ' wählen. Genauer: es gibt eine solche μ-Nullmenge Λ_0, daß für jedes $\lambda \in \Lambda - \Lambda_0$ die Elemente $e(\lambda) \in H(\lambda)$ der folgenden Identität genügen

$$\langle dU(M)\psi, e(\lambda)\rangle = M(\lambda)\langle \psi, e(\lambda)\rangle, \qquad M(\lambda) \in R^1,$$

identisch für $\psi \in \Psi$. Die Vektoren $e(\lambda)$ sind also tatsächlich (verallgemeinerte) Eigenelemente der Operatoren $dU(M)$, wo $M = M^+ \in Z(G)$.

([3]) Man kann z. B. $|[\varphi]|_p = \inf_{\psi \in \mathcal{O}(e_k)} (\sup|\varphi(x) + \psi(x)|)$ nehmen.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes in dem folgenden Satz zusammen:

SATZ 4.2. *Es sei* (U, H) *eine stark stetige unitäre Darstellung einer zusammenhängenden separablen l. k. Gruppe G. Es sei* $Z(G)$ *das Zentrum der u. u. A. von G. Dann kann man die Darstellung* (U, H) *in ein direktes Integral* $\int_\Lambda \big(U(\lambda), H(\lambda)\big) d\mu(\lambda)$ *irreduzibler unitärer Darstellungen* $\big(U(\lambda), H(\lambda)\big)$ *der Gruppe G zerlegen, wobei fast alle Darstellungsräume* $H(\lambda)$ *gemeinsame (verallgemeinerte) Eigenräume der Repräsentanten* $dU(M)$ *symmetrischer Elemente aus* $Z(G)$ *sind.*

§ 5. Anwendungen. Sphärische Distributionen. Es sei G_0 eine abgeschlossene Untergruppe von G und $X = G/G_0$ sei der homogene Raum linker Nebenklassen. Es sei σ ein invariantes Mass auf X. Im Raume $H = L^2(X, \sigma)$ bilden die Verschiebungen

$$U(g)f(x) := f(gx), \quad g \in G,\ x \in X, \tag{5.1}$$

eine unitäre Darstellung von G im Raume $L^2(X, \sigma)$.

Definition. Repräsentanten $dU(M)$ der Elemente M aus $E(G)$ nennen wir *Differentialoperatoren* auf dem homogenen Raum $X = G/G_0$; Repräsentanten $Y = dU(M)$ zentraler symmetrischer Elemente aus $\mathscr{E}(G)$ sind mit den Verschiebungen $U(g)$ vertauschbar; wir nennen sie daher *invariante Differentialoperatoren auf dem homogenen Raum*. Als Korollar zu Satz 4.2 erhalten wir den

SATZ 5.1. *Es sei G eine separable zusammenhängende Gruppe und* G_0 *sei eine abgeschlossene Untergruppe von G. Es sei* $X = G/G_0$ *und* σ *ein invariantes Mass auf X. Es sei* $U(g)f(x) = f(gx)$. *Dann kann man die Darstellung* $\big(U, L^2(X)\big)$ *so in ein direktes Integral* $\big(\int_\Lambda U(\lambda), \int_\Lambda H(\lambda) d\mu(\lambda)\big)$ *unitärer irreduzibler Darstellungen von G zerlegen, daß für* μ*-f. a.* λ *die Räume* $H(\lambda)$ *gemeinsame Eigenräume invarianter (symmetrischer) Operatoren* $Y = dU(M)$ *auf den Räumen* G/G_0 *sind.*

Es gilt die Parsevalsche Formel

$$\int_x f(x)\overline{h(x)}\, d\sigma(x) = \int_\Lambda \sum_{k=1}^{\dim H(\lambda)} \langle f, e_k(\lambda)\rangle \overline{\langle h, e_k(\lambda)\rangle}\, d\mu(\lambda)$$

für jedes $f, h \in \Psi$, wobei $e_k(\lambda)$ gemeinsame Eigendistributionen invarianter Operatoren sind:

$$Ye_k(\lambda) = \lambda_Y e_k(\lambda) \quad (k = 1, \ldots), \quad \dim\big(H(\lambda)\big), \quad \lambda_Y \in R^1.$$

Es gilt die Umkehrformel

$$f = \int_\Lambda \sum \langle f, e_k(\lambda)\rangle e_k(\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad e_k(\lambda) \in \Psi.$$

Bemerkung. Die Eigenelemente $e_k(\lambda)$ $(k = 1, \ldots)$, $\dim H(\lambda)$ sind eine natürliche Verallgemeinerung sphärischer Funktionen: sie spannen den irreduziblen Raum $H(\lambda)$ und sind „Eigenfunktionen" invarianter Differentialoperatoren.

Literaturnachweis

[1] F. Bruhat, *Distributions sur une groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques*, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), S. 43-75.

[2] I. M. Gelfand and H. Ja. Vilenkin, *Some applications of harmonic analysis*, Moskau 1961 (russisch).

[3] G. I. Kac, *Generalised functions on a l. c. group and decomposition of unitary representations*, Trudy Mosk. Mat. Obšč. 10 (1961), S. 3-40 (russisch).

[4] K. Maurin, *Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Spektraldarstellung abstrakter Kerne...*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 7 (1959), S. 471-479.

[5] — *Distributionen auf Yamabe-Gruppen. Harmonische Analyse einer Abelschen l. k. Gruppe*, ibidem 9 (1961), S. 845-850.

[6] — *Sphärische Distributionen auf homogenen Räumen. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Bochner-Weil-Rajkow*, ibidem 7 (1959), S. 151-155.

[7] L. Maurin und K. Maurin, *Spektraltheorie separierbarer Operatoren* Studia Math. 23 (1962), S. 1-29.

[8] E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. Math. 70 (1959), S. 572-615.

[9] — and W. F. Stinespring, *Representation of elliptic operators in an enveloping algebra*, Amer. J. Math. 81 (1959), S. 547-560.

Reçu par la Rédaction le 27. 6. 1963