STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. 1. (1963)

Lineare Räume und Limitierung

von

K. ZELLER (Tübingen)

Funktionalanalysis und Limitierung haben sich in ihrer Entwicklung gegenseitig befruchtet. Viele Fragen aus der Limitierungstheorie konnten erst mit Hilfe der linearen Räume angegriffen oder in befriedigender Allgemeinheit gelöst werden. Umgekehrt gaben diese Probleme Anlass zur Einführung neuer Begriffe und Raumtypen.

Die Charakterisierung regulärer Matrixtransformationen durch Lebesgue (1909) und Toeplitz (1911) regte an zur Aufstellung allgemeiner Sätze über Stetigkeit von Abbildungen und Kondensation von Singularitäten, wobei der gleitende Buckel (Hahn 1922) und das Kategorieprinzip (Saks; Banach-Steinhaus 1927) verwendet wurden. Zusammen mit dem Grundmengenprinzip liefern diese Methoden bei vielen Paaren E, F von Folgenräumen genaue Bedingungen für Matrizen, die E in F abbilden.

Mazur (1930) fasste die Wirkfelder normaler Matrizen als Banach-Räume auf. Mit Hilfe der eben erwähnten Stetigkeitsaussagen gewann er Verträglichkeitssätze für Matrizen, in deren Wirkfeld die konvergenten Folgen eine Grundmenge bilden (Perfektheit). Wilansky bemerkte 1950, dass gewisse Wirkfelder sogar Abschnittskonvergenz besitzen, was von unmittelbarer Bedeutung für Umkehr- und Vergleichssätze ist. Eine der Abschnittskonvergenz entsprechende Ungleichung (Mittelwertsatz, Riesz 1911) war schon früher bekannt und ausgiebig verwendet worden.

Um auch nichtnormale Matrizen behandeln zu können, führten Mazur und Orlicz (1933, 1955) die B_0-Räume (F-Räume) ein. Sie erhielten auf diesem Wege grundlegende Sätze der allgemeinen Limitierungstheorie. Als besonders vorteilhaft für die Formulierung der Ergebnisse erwies sich der Begriff des FK-Raumes, dessen Bedeutung auf dem „closed graph theorem" beruht. Bei manchen Untersuchungen, etwa über Doppelfolgen, benützt man noch allgemeinere Typen linearer topologischer Räume.

Die neuen Methoden gestatten vor allem Aussagen über die Struktur von Wirkfeldern. Als typisches Beispiel sei genannt: Limitiert ein permanentes Matrixverfahren eine beschränkte divergente Folge, so auch eine unbeschränkte Folge; der Schluss in der umgekehrten Richtung ist jedenfalls für perfekte Verfahren zulässig. Das erleichtert den Beweis von Umkehrsätzen; so genügt es bei vielen Lückensätzen, beschränkte Folgen zu betrachten (Meyer-König 1956).

Weitere Strukturuntersuchungen — auch mit elementaren Mitteln — führen zu Inäquivalenzsätzen und zu einer Klasseneinteilung der Wirkfelder. Man fragt dabei, ob sich Vereinigung und Durchschnitt von Matrixverfahren, starke Summierbarkeit, Fastkonvergenz usw. durch gewöhnliche Matrixverfahren darstellen lassen; wie weit sich zeilenfinite Matrizen von zeileninfiniten unterscheiden; welche konvergenztreue Verfahren durch permanente zu ersetzen sind, usw. Ergebnisse in dieser Richtung stammen von Lorentz (1941), Kuttner (1946), Erdös-Piranian (1950) und anderen.

In neuerer Zeit hat die Limitierung beschränkter Folgen grössere Beachtung gefunden. Erwähnt seien: Die auf Banach-Limites beruhende Fastkonvergenz von Lorentz (1948), die Brudno-Normen von Wirkfeldern (Brudno 1945), die Fast-Unverträglichkeit von Matrixverfahren (Lorentz 1958) und vor allem die Verwendung von Saks-Räumen durch Alexiewicz und Orlicz (ab 1955).

Man kann hoffen, dass sich bei Umkehrsätzen die linearen Räume (ganz abgesehen von den Banach-Algebren) noch stärker durchsetzen werden. Es sollte möglich sein, die Methoden von R. Schmidt und N. Wiener in allgemeinere Gestalt zu bringen und die Beziehungen zwischen der Limitierbarkeit beschränkter und unbeschränkter Folgen stärker auszunützen. Dabei dürften sich Saks-Räume und angeordnete Räume als wertvolle Hilfsmittel erweisen.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Über die Mengen der regulären und singulären Punkte einer Distribution

von

Z. ZIELEŹNY (Wrocław)

Der Gegenstand unserer Betrachtungen sind die Distributionen von L. Schwartz einer Veränderlichen.

S. Łojasiewicz führte in [1] und [2] den Begriff des Wertes einer Distribution in einem Punkte ein. Die Definition lautet: Die Distribution T hat im Punkte x_0 einen Wert, wenn der Limes

$$\lim_{\lambda\to 0} T(x_0+\lambda x)$$

existiert und konstant ist.

Die Existenz bzw. Nichtexistenz des Wertes im oben angedeuteten Sinne nehmen wir als Grundlage zur Klassifikation der Punkte auf reguläre und singuläre für die gegebene Distribution. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Charakterisation der Mengen regulärer und singulärer Punkte einer Distribution.

Zunächst führen wir für eine Distribution den Begriff „beschränkt in einem Punkte" ein.

Definition. Die in einer Umgebung von x_0 definierte Distribution T heiße im Punkte x_0 *beschränkt*, wenn die Menge der Distributionen

$$T(x_0+\lambda x) \quad \text{mit} \quad 0<\lambda<1 \tag{1}$$

beschränkt ist; die Distribution T heiße in x_0 *rechtsseitig* bzw. *linksseitig beschränkt*, wenn die Menge (1) in einer Umgebung von $x=0$ für $x>0$ bzw. $x<0$ beschränkt ist.

Es zeigt sich, daß die Beschränktheit der Distribution T im Punkte x_0 der Existenz in x_0 der endlichen extremen n-ten Differentialkoeffizienten im Sinne von Denjoy

$$F(x) = a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+O(|x-x_0|^n) \tag{2}$$

für ihre beliebige Primitive F der hinreichend großen Ordnung n gleichwertig ist.

Die rechts- bzw. linksseitige Beschränktheit der Distribution T im