is a fixed linear operator with domain and range in X. Then we get (as a well known result): the resolvent set of A is an open set in the complex plane. We also get the result: that part of the spectrum of A, consisting of λ such that $\lambda - A$ has a continuous inverse and $R(\lambda - A)$ is not dense in X, is an open set. As a consequence, if λ is a boundary point of the spectrum, we must have $m(\lambda - A) = 0$.

If X is complete, if the domain of A is dense in X, and if A is a closed operator, it may be shown that λ is an eigenvalue of A and $R(A) = X$ if and only if, for the conjugate operator A', $R(\lambda - A')$ is not dense in X and $\lambda - A'$ has a continuous inverse. Hence, the points λ of this kind also form an open set in the spectrum of A.

By means of the minimum modulus one may develop various estimates for the radius of a disk lying in the spectrum of A and consisting entirely of points λ for which $m(\lambda - A) > 0$ and $R(\lambda - A)$ is not dense in X. Here is one such estimate: If μ is such a point, then so is λ, provided that

$$|\lambda - \mu| < \sup_n \{m[(\mu - A)^n]\}^{1/n}.$$

For this it is assumed that A is a bounded operator defined on all of X.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

О применении свойств областей голоморфности к дифференциальным уравнениям

В. С. ВЛАДИМИРОВ (Москва)

Пусть $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \bar{x}), y, \xi$ обозначают точки R^{n+1} и $\zeta = x+iy$ — точки комплексного пространства C^{n+1}. Обозначим через Γ световой конус $\xi_0^2 > \bar{\xi}^2$ ($\bar{\xi}^2 = \xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$); компоненты Γ, лежащие в полупространствах $\pm\xi_0 > 0$, обозначим через $\Gamma^\pm$ соответственно. Трубатные области в C^{n+1} вида $R^{n+1}+i\Gamma^\pm$ обозначаем $T^\pm$ соответственно; $T = T^+ \cup T^-$. Гладкую кривую назовем *времени подобной*, если во всех ее точках касательный вектор лежит в Γ.

Обобщенную функцию назовем *запаздывающей* (соотв. *опережающей*, *коммутатором*), если она равна нулю вне $\bar{\Gamma}^+$ (соотв. $\bar{\Gamma}^-$, $\bar{\Gamma}$). Будем говорить, что голоморфная в T^+ (соот. T^-) функция $f(\xi)$ принадлежит классу K^+ (соотв. K^-), если при некоторых m и C_δ (зависящих от f) она удовлетворяет неравенству

$$|f(x+iy)| \leqslant C_\delta \left(|y_0| + \frac{1}{|y_0|}\right)^m (1+|x|)^m$$

при всех x и y из области $y_0 \geqslant (1+\delta)|\bar{y}|$ (соотв. $-y_0 \geqslant (1+\delta)|\bar{y}|$), $\delta > 0$ любое.

Можно показать, что если $f(\xi)$ голоморфна в T^+ (соотв. T^-) и принадлежит классу K^+ (соотв. K^-), то в смысле сходимости в S^* соответственно существуют граничные значения

$$f(x+iy) \to f(x_0 \pm i0, \bar{x}) \quad \text{при} \quad y \to 0,\ y \in \Gamma^\pm.$$

Пусть G — произвольное открытое множество в R^{n+1}. Обозначим через $\tilde{G}$ комплексную окрестность G такую, что если шар радиуса η принадлежит G, то и соответствующий комплексный шар радиуса $\theta\eta$ $(0 < \theta < \frac{1}{6})$ принадлежит $\tilde{G}$.

Перечислим необходимые для дальнейшего предложения.

1) Для того чтобы голоморфная в области $T \cup \tilde{G}$ функция $f(\zeta)$ принадлежала классу $K = K^+ \cap K^-$, необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $f(x_0 \pm i0, \bar{x})$ являлись преобразованиями Фурье запаздывающей и опережающей функций соответственно и совпадали в открытом множестве G. Это предложение вытекает из результатов

Шварца [1] и Лионса, а также из теоремы "edge of the wedge", впервые доказанной Н. Н. Боголюбовым [2] (см. также Бремерманн, Эме и Тейлор [3]).

2) Если преобразование Фурье коммутатора $f \in S^*$ обращается в нуль в области G, то оно обращается в нуль и в её оболочке $B(G)$ — наименьшей области, содержащей G и обладающей свойством: если точки x_1 и x_2 из $B(G)$ могут быть соединены времени подобной кривой, целиком лежащей в $B(G)$, то и все времени подобные крывые, соединяющие x_1 и x_2, содержатся в $B(G)$ [8].

3) Пусть $B(G)$ ограничена двумя пространственно подобными поверхностями. Тогда всякая голоморфная в области $T \cup \tilde{G}$ функция $f(\zeta)$ класса K голоморфна в оболочке $K(T \cup \tilde{G})$, состоящей из тех точек ζ^0, для которых существует окрестность $O(\zeta^0)$, что для любой $\zeta \in O(\zeta^0)$ всякий комплексный гиперболоид $(z_0-a_0)^2-(\overline{z}-\overline{a})^2 = \lambda$ (a и $\lambda \geqslant 0$ — вещественные параметры), содержащий ζ, обладает тем свойством, что при вещественных $z = x$ множество $(x_0-a_0)^2-(\overline{x}-\overline{a}_0)^2 > \lambda$ имеет хотя бы одну общую точку с областью G [8].

Этот результат устанавливается с помощью интегрального представления Иоста-Лемана-Дайсона [4], [5].

Приведенные результаты применяются к изучению решений из S^* уравнения свертки

$$u(x) * f_0(x) = f(x), \quad f \in S^*, \; f_0 \in \theta'_c, \tag{1}$$

в предположении

$$\tilde{f}(\xi) = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{f}_0(\xi) \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi_0^2 < \xi^2.$$

Теорема. *Всякое решение уравнения* (1) *из* S^*, *обращающееся в нуль в области* G, *представимо в виде*

$$u(x) = f(x_0+i0, \overline{x}) - f(x_0-i0, \overline{x}),$$

где $f(\zeta)$ *есть голоморфная функция в* $K(T \cup \tilde{G})$ *класса* K.

Следствие. *Если два решения из* S^* *уравнения* (1) *совпадают в области* G, *то они совпадают и в ее оболочке* $\operatorname{Re} K(T \cup \tilde{G})$; *в частности, они совпадают в* $B(G)$.

Из этой теоремы вытекает, что для дифференциальных уравнений нельзя произвольно задавать начальные данные Коши на поверхностях непространственно подобного типа. Точнее для уравнения

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} = P\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u, \tag{2}$$

разрешенного относительно старшей производной по x_n и удовлетворяющего условию

$$i^k \xi_n^k \neq P(i\xi_0, i\overline{\xi}) \quad \text{при} \quad \xi_0^2 < \overline{\xi}^2,$$

справедлива теорема: для существования решения $u \in S^*$, обращающегося в нуль вместе с производными по x_n до порядка $k-1$ включительно в области g гиперплоскости $x_n = 0$, необходимо, чтобы эти данные Коши обращались в нуль в оболочке $B(g)$ (на гиперплоскости $x_n = 0$).

Аналогичные результаты получены Ионом [6] и Ниренбергом [7].

Изложенные здесь методы возникли в квантовой теории поля, при доказательстве дисперсионных соотношений [2-5].

Литература

[1] Z. Schwartz, Medd. Lunds univ. mat. semin., Suppl., 1952, стр. 196-206.

[2] Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, *Вопросы теории дисперсионных соотношений*, Москва 1958.

[3] H. J. Bremermann, R. Oehme and J. G. Taylor, Phys. Rev, 109 (1958), стр. 2178-2190.

[4] R. Jost und H. Lehmann, Nuovo Cimento 5 (1957), стр. 1598-1610.

[5] F. J. Dyson, Phys. Rev., 110 (1958), стр. 1460-1464.

[6] F. John, Communs pure and appl. mathem. 2 (1949), стр. 209-253.

[7[L. Nirenberg, Communs pure and appl. mathem., 10 (1957), стр. 89-105.

[8] В. С. Владимиров, Труды МИАН 60 (1961), стр. 101-144.