стема Σ удовлетворяет условию Цорна справа. Не трудно убедится, что единственным неразложимым элементом M относительно системы Σ является его первый элемент. Таким образом сформулированный выше принцип принимает следующий вид: если рекурентная часть M содержит его первый элемент, то она содержит все множество M (и следовательно совпадает с ним). Таким образом мы очевидно получили обычный принцип трансфинитной индукции.

Обобщенный принцип индукции можно рассматривать также и как обобщение принципа крайних точек. В самом деле, пусть R некоторое линейное пространство с локально выпуклой топологией и M его бикомпактное подмножество. Обозначим через Σ систему всех открытых выпуклых подмножеств R. В таком случае неразложимые элементы M относительно Σ являются крайними точками M в смысле Минковского. Доказательство проводится по следующей схеме. Обозначим через S множество крайних частей M (подмножество A множества M называется крайней частью, если из условий

$$pb+qc\in A,\quad b\in M,\quad c\in M,\quad p>0,\quad q>0,\quad p+q=1,$$

следует $b\in A$, $c\in A$).

Система S удовлетворяет следующим условиям:

1. $M\in S$;
2. если $A\in S$ и B максимальное множество из Σ, которое не покрывает A, то $A-B\in S$;
3. сечение множеств из S принадлежит S.

(Интерес составляет только проверка условия 2.)

Далее учитывая минимальность S_M получаем $S_M\subset S$, т. е. все Σ-части являются крайними частями. Теперь достаточно учесть, что точки принадлежащие одной и той же минимальной Σ-части неотделимы при помощи множеств из Σ, чтобы заключить, что всякая минимальная Σ-част состоит из одной лишь точки, котороя следовательно является крайней точкой в смысле Минковского.

В рассматриваемом случае обобщенный принцип индукции дает следующее: если открытое и выпуклое множество A содержит все крайние точки бикомпактного множества M, то $M\subset A$. Этот результат, очевидно, является одной из формулировок теоремы Крейна и Мильмана о крайних точках.

Таким образом мы получили новое доказательство теоремы Крейна и Мильмана и выяснили, что трансфинитную индукцию и принцип крайних точек можно рассматривать как частные случаи одного и того же принципа.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

The minimum modulus of a linear operator, and its use for estimates in spectral theory

by

A. E. TAYLOR (Los Angeles, Calif.)

This is a brief report on some investigations conducted jointly by A. E. Taylor and H. A. Gindler. (Mr. Gindler is writing his doctoral dissertation under the supervision of Professor Taylor.) [1]

If X is a complex normed linear space and T is a linear operator with domain and range in X, we define $m(T)$ to be the infimum of the values of $\|Tx\|$ for $\|x\|=1$ and x in the domain of T. We also define $M(T)$ as the supremum of $\|Tx\|$ with the same limitations on x. We may have $M(T)=+\infty$, but $M(T)<+\infty$ if and only if T is continuous.

The following simple theorem is basic:

If T_1 and T_2 have the same domain and if T_1-T_2 is continuous, then

$$|m(T_2)-m(T_1)|\leqslant M(T_1-T_2).$$

As is well known, T has a continuous inverse if and only if $m(T)>0$. In that case

$$M(T^{-1})=\frac{1}{m(T)}.$$

The following theorem may be proved by the arguments used to prove Theorem 5. 1-A in A. E. Taylor's book, *Introduction to Functional Analysis*:

Suppose that T and T_0 have the same domain, that $m(T_0)>0$ and $M(T-T_0)<+\infty$. Then $m(T)>0$ if $M(T-T_0)<m(T_0)$, and in the latter case $\overline{R(T)}$ is not a proper subset of $\overline{R(T_0)}$.

In the foregoing theorem $R(T)$ denotes the range of T, and the bar denotes closure.

As a corollary of this we deduce that under the given conditions on T_0 and T, $\overline{R(T)}=X$ if and only if $\overline{R(T_0)}=X$. In particular, suppose A

[1] The dissertation of Mr. Gindler, *Some properties of operator spectra*, was accepted by the University of California, Los Angeles, in June, 1961.

is a fixed linear operator with domain and range in X. Then we get (as a well known result): the resolvent set of A is an open set in the complex plane. We also get the result: that part of the spectrum of A, consisting of λ such that $\lambda - A$ has a continuous inverse and $R(\lambda - A)$ is not dense in X, is an open set. As a consequence, if λ is a boundary point of the spectrum, we must have $m(\lambda - A) = 0$.

If X is complete, if the domain of A is dense in X, and if A is a closed operator, it may be shown that λ is an eigenvalue of A and $R(A) = X$ if and only if, for the conjugate operator A', $R(\lambda - A')$ is not dense in X and $\lambda - A'$ has a continuous inverse. Hence, the points λ of this kind also form an open set in the spectrum of A.

By means of the minimum modulus one may develop various estimates for the radius of a disk lying in the spectrum of A and consisting entirely of points λ for which $m(\lambda - A) > 0$ and $R(\lambda - A)$ is not dense in X. Here is one such estimate: If μ is such a point, then so is λ, provided that

$$|\lambda - \mu| < \sup_n \{m[(\mu - A)^n]\}^{1/n}.$$

For this it is assumed that A is a bounded operator defined on all of X.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

О применении свойств областей голоморфности к дифференциальным уравнениям

В. С. ВЛАДИМИРОВ (Москва)

Пусть $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \bar{x}), y, \xi$ обозначают точки R^{n+1} и $\zeta = x + iy$ — точки комплексного пространства C^{n+1}. Обозначим через Γ световой конус $\xi_0^2 > \bar{\xi}^2$ $(\bar{\xi}^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)$; компоненты Γ, лежащие в полупространствах $\pm\xi_0 > 0$, обозначим через $\Gamma^{\pm}$ соответственно. Трубатные области в C^{n+1} вида $R^{n+1} + i\Gamma^{\pm}$ обозначаем $T^{\pm}$ соответственно; $T = T^+ \cup T^-$. Гладкую кривую назовем *времени подобной*, если во всех ее точках касательный вектор лежит в Γ.

Обобщенную функцию назовем *запаздывающей* (соотв. *опережающей, коммутатором*), если она равна нулю вне $\bar{\Gamma}^+$ (соотв. $\bar{\Gamma}^-$, $\bar{\Gamma}$). Будем говорить, что голоморфная в T^+ (соот. T^-) функция $f(\xi)$ принадлежит классу K^+ (соотв. K^-), если при некоторых m и C_δ (зависящих от f) она удовлетворяет неравенству

$$|f(x+iy)| \leqslant C_\delta \left(|y_0| + \frac{1}{|y_0|}\right)^m (1+|x|)^m$$

при всех x и y из области $y_0 \geqslant (1+\delta)|\bar{y}|$ (соотв. $-y_0 \geqslant (1+\delta)|\bar{y}|$), $\delta > 0$ любое.

Можно показать, что если $f(\xi)$ голоморфна в T^+ (соотв. T^-) и принадлежит классу K^+ (соотв. K^-), то в смысле сходимости в S^* соответственно существуют граничные значения

$$f(x+iy) \to f(x_0 \pm i0, \bar{x}) \quad \text{при} \quad y \to 0,\ y \in \Gamma^{\pm}.$$

Пусть G — произвольное открытое множество в R^{n+1}. Обозначим через $\tilde{G}$ комплексную окрестность G такую, что если шар радиуса η принадлежит G, то и соответствующий комплексный шар радиуса $\theta\eta$ $(0 < \theta < \frac{1}{6})$ принадлежит $\tilde{G}$.

Перечислим необходимые для дальнейшего предложения.

1) Для того чтобы голоморфная в области $T \cup \tilde{G}$ функция $f(\zeta)$ принадлежала классу $K = K^+ \cap K^-$, необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $f(x_0 \pm i0, \bar{x})$ являлись преобразованиями Фурье запаздывающей и опережающей функций соответственно и совпадали в открытом множестве G. Это предложение вытекает из результатов