STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

О методе крайних точек

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ (София)

Обычную трансфинитную индукцию можно обобщить следующим образом. Пусть M некоторое непустое бикомпактное множество топологического пространства R и Σ некоторая система его открытых множеств, удовлетворяющая условию Цорна справа (это значит, что всякая возрастающая по включению трансфинитная последовательность множеств из Σ имеет верхнюю грань в Σ). Обозначим через S_M наименьшую систему из всех систем S состоящихся из подмножеств множества M и удовлетворяющих следующим условиям:

1. $M \in S$;
2. если $A \in S$ и B максимальное в смысле Цорна множество из Σ, которое не покрывает A, то $A-B \in S$;
3. сечение множеств из S принадлежит S.

Множества, составляющие S_M будем называть Σ-частями множества M. Не трудно убедиться, что среди непустых Σ-частей есть минимальные в смысле Цорна. Также легко видеть, что никакие два элемента минимальной непустой Σ-части нельзя отделить при помощи множеств из Σ. Это означает, что если a и b два элемента одной и той же минимальной Σ-части, то всякое множество из Σ, которое содержит один из них, содержит и другой. Элемент, принадлежащий непустой минимальной Σ-части, будем называть *неразложимым* элементом множества M относительно системы Σ. В таком случае верно, как легко видеть, следующее:

Если множество A из Σ содержит все неразложимые элементы M, то $M \subset A$.

Это утверждение можно рассматривать как обобщение обычного принципа трансфинитной индукции по следующим соображениям.

Пусть M вполне упорядоченное множество и Σ система его рекурентных частей (рекурентной частью M мы называем всякое его подмножество A, которое всегда содержит элемент a, если содержит отрезок $a_1 \leqslant x < a$, где через a_1 обозначен первый элемент A, а знаком неравенства обозначено соотношение порядка в M).

Определим в M топологию выбрав в качестве окрестностей рекурентные части M. В таком случае множество M бикомпактно и система Σ удовлетворяет условию Цорна справа. Не трудно убедится, что единственным неразложимым элементом M относительно системы Σ является его первый элемент. Таким образом сформулированный выше принцип принимает следующий вид: если рекурентная часть M содержит его первый элемент, то она содержит все множество M (и следовательно совпадает с ним). Таким образом мы очевидно получили обычный принцип трансфинитной индукции.

Обобщенный принцип индукции можно рассматривать также и как обобщение принципа крайних точек. В самом деле, пусть R некоторое линейное пространство с локально выпуклой топологией и M его бикомпактное подмножество. Обозначим через Σ систему всех открытых выпуклых подмножеств R. В таком случае неразложимые элементы M относительно Σ являются крайними точками M в смысле Минковского. Доказательство проводится по следующей схеме. Обозначим через S множество крайних частей M (подмножество A множества M называется крайней частью, если из условий

$$pb+qc\in A,\quad b\in M,\quad c\in M,\quad p>0,\quad q>0,\quad p+q=1,$$

следует $b\in A$, $c\in A$).

Система S удовлетворяет следующим условиям:

1. $M\in S$;

2. если $A\in S$ и B максимальное множество из Σ, которое не покрывает A, то $A-B\in S$;

3. сечение множеств из S принадлежит S.

(Интерес составляет только проверка условия 2.)

Далее учитывая минимальность S_M получаем $S_M\subset S$, т. е. все Σ-части являются крайними частями. Теперь достаточно учесть, что точки принадлежащие одной и той же минимальной Σ-части неотделимы при помощи множеств из Σ, чтобы заключить, что всякая минимальная Σ-част состоит из одной лишь точки, которая следовательно является крайней точкой в смысле Минковского.

В рассматриваемом случае обобщенный принцип индукции дает следующее: если открытое и выпуклое множество A содержит все крайние точки бикомпактного множества M, то $M\subset A$. Этот результат, очевидно, является одной из формулировок теоремы Крейна и Мильмана о крайних точках.

Таким образом мы получили новое доказательство теоремы Крейна и Мильмана и выяснили, что трансфинитную индукцию и принцип крайних точек можно рассматривать как частные случаи одного и того же принципа.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

The minimum modulus of a linear operator, and its use for estimates in spectral theory

by

A. E. TAYLOR (Los Angeles, Calif.)

This is a brief report on some investigations conducted jointly by A. E. Taylor and H. A. Gindler. (Mr. Gindler is writing his doctoral dissertation under the supervision of Professor Taylor.) [1]

If X is a complex normed linear space and T is a linear operator with domain and range in X, we define $m(T)$ to be the infimum of the values of $\|Tx\|$ for $\|x\|=1$ and x in the domain of T. We also define $M(T)$ as the supremum of $\|Tx\|$ with the same limitations on x. We may have $M(T)=+\infty$, but $M(T)<+\infty$ if and only if T is continuous.

The following simple theorem is basic:

If T_1 and T_2 have the same domain and if T_1-T_2 is continuous, then

$$|m(T_2)-m(T_1)|\leqslant M(T_1-T_2).$$

As is well known, T has a continuous inverse if and only if $m(T)>0$. In that case

$$M(T^{-1})=\frac{1}{m(T)}.$$

The following theorem may be proved by the arguments used to prove Theorem 5. 1-A in A. E. Taylor's book, *Introduction to Functional Analysis*:

Suppose that T and T_0 have the same domain, that $m(T_0)>0$ and $M(T-T_0)<+\infty$. Then $m(T)>0$ if $M(T-T_0)<m(T_0)$, and in the latter case $\overline{R(T)}$ is not a proper subset of $\overline{R(T_0)}$.

In the foregoing theorem $R(T)$ denotes the range of T, and the bar denotes closure.

As a corollary of this we deduce that under the given conditions on T_0 and T, $\overline{R(T)}=X$ if and only if $\overline{R(T_0)}=X$. In particular, suppose A

[1] The dissertation of Mr. Gindler, *Some properties of operator spectra*, was accepted by the University of California, Los Angeles, in June, 1961.