и оператор $\Pi\varphi$ есть какой либо проекционный оператор из $W_2^{(m)}$ в $S^{(m-1)}$, сводим задачу к нахождению

$$\max_{\|\varphi\| L_1^{(m)}=1} (l, \varphi) \tag{6}$$

при условии, что $(l, \varphi) = 0$ для $\varphi \in S^{(m-1)}$.

Перенормировкой экстремальной функции задачу можно привести к задаче об экстремуме квадратичного функционала

$$D(\varphi) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha \varphi)^2 dx \tag{7}$$

при условии

$$(l, \varphi) = 0. \tag{8}$$

Задача решается методом Лагранжа. Оказывается, что экстремальная функция есть решением уравнения

$$\Delta^m u = (-1)^m \lambda \left[1 - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - x^{(k)})\right] \tag{9}$$

при соответствующих граничных условиях

$$B_k \varphi|_S = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

Аналогично рассматривается задача о формулах механических кубатур для периодических функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с системой периодов

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n). \tag{11}$$

Исследованы формулы имеющие точки $x^{(k)}$ внутри каждого основного параллелоэдра в вершинах некоторой правильной решетки.

Показано, что выбор $x^{(k)}$ в центрах наиболее плотной упаковки шаров для случая $n = 2, 3, 4$ дает большое преимущество в сравнении с вершинами кубической решетки.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Un calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires de l'espace hilbertien et certaines de ses applications

par

BÉLA SZ.-NAGY (Szeged)

Le calcul fonctionnel en question est fondé sur le fait que toute contraction T de l'espace hilbertien H, c'est-à-dire tout opérateur linéaire tel que $\|T\| \leqslant 1$, admet une dilatation unitaire U. C'est un opérateur unitaire défini dans un espace hilbertien K comprenant H comme un sous-espace, tel qu'on a pour tout $h \in H$ et $n = 0, 1, \ldots$:

$$T^n h = P U^n h, \tag{1}$$

P désignant l'opérateur de projection orthogonale sur H; en bref:

$$T^n = \operatorname{pr} U^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1'}$$

En introduisant la notation

$$T^{(n)} = T^n \text{ pour } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{et} \quad T^{(n)} = T^{*|n|} \text{ pour } n = -1, -2, \ldots$$

on a plus généralement

$$T^{(n)} = \operatorname{pr} U^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1''}$$

Pour ce théorème il y a plusieurs démonstrations. La démonstration originale que j'ai trouvé en 1953 partit de l'observation que pour tout $h \in H$ fixé le problème des moments triginométriques

$$(T^{(n)} h, h) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\alpha_h(\theta) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

admet une solution non-décroissante $\alpha_h(\theta)$ et une seule qui est continue de droite et telle que $\alpha_h(0) = 0$, $\alpha_h(2\pi) = (h, h)$. C'est une conséquence, en vertu d'un théorème classique de F. Riesz, du fait facile à démontrer que la fonction

$$F_h(z) = (h, h) + 2 \sum_{n=1}^\infty z^n (T^n h, h)$$

est holomorphe et de partie réelle non-négative dans le cercle unité $|z|<1$. Cela étant, on conclut à l'existence d'un opérateur autoadjoint $B(\theta)$, fonction non-décroissante et continue de droite de θ, et telle que $B(0)=0$, $B(2\pi)=I$ et

$$T^{(n)}=\int_0^{2\pi} e^{in\theta}dB(\theta) \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots). \tag{2}$$

Cette fonction $B(\theta)$ est déterminée univoquement par T; elle s'appelle la *fonction de distribution attachée à la contraction* T. En vertu d'un théorème de M. A. Neumark, la fonction de distribution $B(\theta)$ peut être représentée comme "projection" d'une famille spectrale ordinaire $E(\theta)$, dans un espace hilbertien plus vaste K,

$$B(\theta)=\mathrm{pr}\,E(\theta) \qquad [E(0)=0,\ E(2\pi)=I].$$

L'opérateur

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}dE(\theta)$$

est unitaire et jouit évidemment de la propriété (1).

On peut en plus exiger que la dilatation unitaire U soit minimum dans le sens qu'il n'y ait aucun vrai sous-espace de K contenant H et réduisant U, ou, en d'autres termes, que K soit sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ ($h\in H$; $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$). Evidemment, toute dilatation unitaire de T „contient" une dilatation minimum. Il s'ensuit de la relation

$$(U^n h, U^m h')=(U^{n-m}h, h')=(T^{(n-m)}h, h') \qquad (h, h'\in H),$$

vu que le troisième membre est indépendant du choix particulier de U, que la structure $\{K, U, H\}$ attachée à une dilatation unitaire minimum de T est déterminée à isomorphie près. On peut donc parler de la dilatation unitaire minimum de la contraction T.

Une seconde démonstration est fondée sur l'observation que l'opérateur $T^{(n)}$, considéré comme fonction définie sur le groupe additif des nombres entiers n, est de type positif, c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_n\sum_m (T^{(n-m)}h_n, h_m)\geq 0 \tag{3}$$

pour tout système d'éléments $\bar{h}=\{h_n\}$ de H, tel que $h_n=0$ sauf pour un nombre fini d'indices n au plus. Ces systèmes forment évidemment un espace linéaire, et

$$\langle\bar{h},\bar{h}'\rangle=\sum_n\sum_m (T^{(n-m)}h_n, h'_m)$$

y définit une forme bilinéaire positive semi-définie. En passant à l'espace quotient modulo le sous-espace caractérisé par $\langle h, h\rangle=0$ et puis en complétant on arrive à un espace hilbertien K avec le produit scalaire $\langle,\rangle$, dans lequel H peut être plongé en identifiant l'élément h de H avec l'élément $\{\ldots,0,0,\overset{0}{h},0,0,\ldots\}$ de K. Il est alors facile à vérifier que l'opérateur U défini dans K par

$$U\{h_n\}=\{h_{n-1}\}$$

est une dilatation unitaire minimum de T.

Cette démonstration a l'avantage d'être plus immédiate que la première et aussi de plus grande portée (généralisations possibles à des groupes et semi-groupes de type plus général).

Une troisième démonstration, peut-être la plus immédiate mais moins apte à être généralisée, a été proposée par J. J. Schäffer. Elle est calquée sur un raisonnement antérieur dû à P. Halmos. On envisage une infinité dénombrable de répliques de l'espace H, numérotées par les entiers n ($-\infty<n<\infty$), et on forme leur somme directe

$$H^{\sim}=\bigoplus_n H_n.$$

On plonge H sans $H^{\sim}$ en l'identifiant avec H_0. Les opérateurs linéaires de $H^{\sim}$ peuvent être représentés par des matrices (M_{ik}) (i, k allant de $-\infty$ à $+\infty$), composées d'opérateurs linéaires de H. Il est alors facile à vérifier que la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & 0 & & & \end{array} \\ 0 & \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & I & & & & \\ & & Z & -T^* & & \\ & & T & S & & \\ & & & & I & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

où $S=(I-TT^*)^{1/2}$, $Z=(I-T^*T)^{1/2}$ et les éléments non marqués (en dehors la diagonale auxiliaire) sont tous égaux à 0, fournit une dilatation unitaire $\bar{U}$ de T. Elle n'est pas en général minimum; pour qu'elle le soit il faut et il suffit qu'on ait

$$\|Th\|<\|h\| \quad \text{pour tout} \quad h\in H,\ h\neq 0.$$

Toutefois il est aisé de trouver le sous-espace K de H^∞ ($H \subset K \subset H^\infty$), réduisant $\overline{U}$ et tel que la partie de $\overline{U}$ dans K soit la dilatation minimum de T, on a notamment

$$K = \ldots \oplus M_Z \oplus M_Z \oplus H \oplus M_S \oplus M_S \oplus \ldots$$

où M_S et M_Z désignent, suivant les cas, les complémentaires orthogonaux dans H des sous-espaces constitués par les zéros de S et Z.

Par exemple si T est partiellement isométrique ayant le sous-espace initial J et le sous-espace final $F = TJ$, on a $M_S = F^\perp$ et $M_Z = J^\perp$.

La relation (1′) entre les puissances de T et celles de sa dilatation unitaire U peut être écrite aussi sous la forme

$$\varphi(T) = \mathrm{pr}\,\varphi(U) \tag{4}$$

où $\varphi(\lambda)$ est un polynome quelconque de λ, ou, plus généralement, une série entière $\sum_0^\infty c_k \lambda^k$ telle que

$$\sum_0^\infty |c_k| < \infty. \tag{5}$$

La condition (5) assure notamment que les séries d'opérateurs

$$\varphi(T) = \sum_0^\infty c_k T^k, \qquad \varphi(U) = \sum_0^\infty c_k U^k$$

convergent en norme. Ces fonctions $\varphi(\lambda)$ forment une algèbre $\mathscr{A}$ et l'application

$$\varphi(\lambda) \to \varphi(T)$$

de $\mathscr{A}$ dans l'algèbre $\mathscr{L}(H)$ des opérateurs linéaires bornés de H, de même que l'application

$$\varphi(\lambda) \to \varphi(U)$$

de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}(K)$ sont des homomorphismes d'algèbre. De plus on a, en vertu de la théorie spectrale des opérateurs unitaires,

$$\|\varphi(U)\| \leqslant \sup_{|\lambda|\leqslant 1} |\varphi(\lambda)|; \tag{6}$$

en vertu de la relation (4) cela entraîne

$$\|\varphi(T)\| \leqslant \sup_{|\lambda|=1} |\varphi(\lambda)|. \tag{7}$$

Cette inégalité importante a été démontrée pour la première fois et par une toute autre méthode, par J. von Neumann, en 1951.

La relation (4), qui est *démontrée* pour les fonctions de la classe $\mathscr{A}$, peut servir de *définition* de $\varphi(T)$ pour des fonctions de type plus général, notamment pour lesquelles $\varphi(U)$ a un sens. Or, d'après la théorie spectrale des opérateurs unitaires, $\varphi(U)$ a un sens comme opérateur borné (normal) pour toute fonction $\varphi(\lambda)$ dont les valeurs sur la circonférence unité constituent une fonction $\varphi(e^{i\theta})$ bornée et mesurable par rapport à la famille spectrale $E(\theta)$ de U, notamment on a alors par définition

$$\varphi(U) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})\, dE(\theta).$$

Bien entendu, il importe ici de fixer que la dilatation unitaire envisagée dans (4) est celle *minimum*.

L'inégalité (6) et alors aussi l'inégalité (7) sont valables pour toutes ces fonctions et les applications $\varphi(\lambda) \to \varphi(U)$ et $\varphi(\lambda) \to \varphi(T)$ sont évidemment linéaires. Mais tandis que la première est aussi multiplicative la seconde ne l'est pas en général. Si, par exemple $\varphi_1(\lambda) \equiv \lambda$, $\varphi_2(\lambda) \equiv \bar{\lambda}$, alors $\varphi_1(U) = U$, $\varphi_2(U) = U^* = U^{-1}$, $(\varphi_2\varphi_1)(U) = I_K$ donc $\varphi_1(T) = T$, $\varphi_2(T) = T^*$, $(\varphi_2\varphi_1)(T) = I_H$; or $T^*T \neq I_H$ sauf pour T isométrique.

Si l'on veut conserver aussi la propriété multiplicative de l'application $\varphi(\lambda) \to \varphi(T)$ il faut donc renoncer à envisager *toutes* les fonctions pour lesquelles $\varphi(U)$ se trouve défini et il faut se contenter d'une extension moins radicale de la classe $\mathscr{A}$, extension qui permet néanmoins des applications importantes.

L'une des possibilités est d'envisager la classe $\mathscr{O}_T$ des fonctions $\varphi(\lambda)$ qui sont définies, bornées et holomorphes dans l'*intérieur* du cercle unité et dont les limites radiales

$$\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} \varphi(re^{i\theta})$$

existent en tout point $e^{i\theta}$ de la circonférence sauf peut-être une infinité dénombrable de points dont aucun n'est une valeur propre de T. Tel ensemble d'exception sera appelé „T-négligeable". On peut montrer notamment que toute valeur propre de T de module 1 est une valeur propre de U aussi, avec les mêmes vecteurs propres, et *qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres de* U [1]. Donc tout ensemble T-négligeable est aussi U-négligeable et la fonction $\varphi(e^{i\theta})$ est bornée et mesurable par rapport à $dE(\theta)$; par conséquent $\varphi(U)$ et $\varphi(T) = \mathrm{pr}\,\varphi(U)$ existent.

---

(1) En effet, l'implication $\{Th = \lambda h,\ h \in H,\ |\lambda| = 1\} \Rightarrow \{Uh = h\lambda\}$ est immédiate puisque $Th = PUh$, $\|Th\| = |\lambda|\,\|h\| = \|h\| = \|Uh\|$. L'implication inverse $\{Uf = \lambda f,\ f \in K\} \Rightarrow \{f \in H,\ Tf = \lambda f\}$, sera démontrée pour la dilatation unitaire minimum U dès qu'on l'a démontrée pour une dilatation unitaire quelconque, par exemple pour la dilatation unitaire $\overline{U}$ obtenue par la construction de Schäffer. Or $\{\overline{U}f = \lambda f,\ f = \{h_n\}_{-\infty}^{\infty} \in H^\infty\}$ veut dire que

$$Th_0 + Sh_1 = \lambda h_0, \quad Zh_0 \quad T^*h_1 = \lambda h_{-1}, \quad h_{n+1} = h_n \quad (n \neq -1, 0);$$

vu que $\sum_{-\infty}^{\infty} \|h_n\|^2 = \|f\|^2 < \infty$, cela n'est possible que si $h_n = 0$ $(n \neq 0)$ et alors $f = h_0 \in H$, $Tf = \lambda f$.

Afin de vérifier la multiplicativité de l'application $\varphi(\lambda) \to \varphi(T)$ pour la classe $\mathcal{O}_T$ on montre d'abord que cette application est *continue* dans le sens suivant. On dira que la suite $\varphi_n(\lambda) \in \mathcal{O}_T$ „T-converge" vers $\varphi(\lambda) \in \mathcal{O}_T$, lorsque cette suite est uniformément bornée dans le cercle unité et telle que

$$\varphi_n(e^{i\theta}) \to \varphi(e^{i\theta}) \qquad (n \to \infty)$$

en tout point $e^{i\theta}$ de la circonférence unité sauf peut-être les points d'un ensemble T-négligeable. Or, dans ce cas on a

$$\varphi_n(T) \to \varphi(T). \tag{8}$$

En effet, la convergence

$$\varphi_n(U) \to \varphi(U)$$

résulte de la théorie spectrale des opérateurs unitaires (application du théorème de convergence de Lebesgue) et (8) en découle par application de la projection P.

En particulier, il s'ensuit de la définition de la classe $\mathcal{O}_T$ que si $\varphi(\lambda) \in \mathcal{O}_T$, on a pour tout r $(0 < r < 1)$:

$$\varphi_r(\lambda) \equiv \varphi(r\lambda) \in \mathcal{A},$$

et si $r \to 1-0$, $\varphi_r(\lambda)$ T-converge vers $\varphi(\lambda)$, donc

$$\varphi_r(T) \to \varphi(T).$$

Par cette relation de convergence, la multiplicativité pour la classe $\mathcal{A}$ entraîne celle pour la classe $\mathcal{O}_T$.

On démontre sans peine que dans le cas où T est un opérateur normal, le calcul fonctionnel ainsi défini coïncide, pour la classe $\mathcal{O}_T$, avec le calcul fonctionnel basé sur la décomposition spectrale de T.

Le calcul fonctionnel pour les contractions de type général a été élaboré dans sa forme ci-dessus dans un travail que j'ai écrit en commun avec C. Foiaş. Indépendamment, M. Schreiber a proposé un calcul fonctionnel, ne faisant pas intervenir la dilatation unitaire mais la fonction de distribution $B(\theta)$ de T; il pose par définition

$$\varphi(T) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})\, dB(\theta).$$

Puisque $B(\theta) = \mathrm{pr}\, E(\theta)$, les deux méthodes sont équivalentes.

L'application la plus intéressante du calcul fonctionnel ci-dessus porte sur les semi-groupes à un paramètre $\{T_s\}_{s \geq 0}$ de contractions de l'espace H, continus dans le sens que $T_s \to I$ pour $s \to 0$.

On sait que, même dans le cas d'une espace de Banach quelconque B, un semi-groupe continu de contractions $\{T_s\}_{s \geq 0}$ admet le *générateur infinitésimal*

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(T_s - I)$$

qui est un opérateur fermé, de domaine partout dense dans B et tel que

$$(I - \varepsilon A)^{-1}$$

est, pour tout $\varepsilon > 0$, une contraction de B; inversement, tout opérateur linéaire A jouissant de ces propriétés est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions et d'un seul (théorème de Hille et Yosida). Dans le cas particulier $B = H$ la condition concernant A est équivalente à ce que

(a) $A - I$ admet un inverse borné partout défini,
(b) $T = (A+I)(A-I)^{-1}$ est une contraction.

Cette contraction T n'a évidemment pas la valeur propre 1. Inversement, on montre aisément que toute contraction T dont 1 n'est pas une valeur propre, est attachée de cette façon à un semi-groupe continu de contractions $\{T_s\}_{s \geq 0}$ et à un seul; on peut appeler T le *cogénératrice infinitésimal* de $\{T_s\}_{s \geq 0}$. Il y a des avantages évidents de considérer le cogénérateur T au lieu du générateur A qui, en général, n'est pas borné.

La relation mutuelle entre le semi-groupe $\{T_s\}_{s \geq 0}$ et son cogénérateur infinitésimal T peut être explicitée, en écartant le rôle intermédiaire de A, et cela en faisant usage du calcul fonctionnel ci-dessus.

Appelons $\mathcal{C}$ la classe des fonctions à valeurs complexes $\varphi(\lambda)$, définies et continues sur l'ensemble

$$C = \{\lambda : |\lambda| \leq 1,\ \lambda \neq 1\}$$

(disque unité privé du point $\lambda = 1$), holomorphes et bornées dans l'intérieur de C. Evidemment on a

$$\mathcal{O}_T \supseteq \mathcal{C}$$

pour toute contraction T n'ayant pas la valeur propre 1. En particulier, les fonctions

$$e_s(\lambda) = \exp\left(s\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) \qquad (s \geq 0)$$

appartiennent à $\mathcal{C}$ et on a même $|e_s(\lambda)| \leq 1$ sur C. Comme de plus

$$e_t(\lambda) \cdot e_s(\lambda) = e_{t+s}(\lambda), \qquad e_0(\lambda) = 1, \qquad e_s(\lambda) \to e_t(\lambda), \qquad (s \to t)$$

sur C, il s'ensuit par le calcul fonctionnel en question que pour toute contraction T de H, n'ayant pas la valeur propre 1, les opérateurs

$$T_s = e_s(T) \quad (s > 0)$$

forment un semi-groupe continu de contractions. C'est précisément le semi-groupe dont T est le cogénérateur infinitésimal. En effet, on vérifie aisément que la fonction

$$v_s(\lambda) = \frac{e_s(\lambda)-(1-s)}{e_s(\lambda)-(1+s)}$$

appartient pour $s > 0$ à $\mathscr{C}$, de plus on a $|v_s(\lambda)| \leqslant 1$ et $\lim\limits_{s\to 0} v_s(\lambda) = \lambda$ dans C. En vertu du calcul fonctionnel $v_s(T)$ est donc une contraction et on a $\lim\limits_{s\to 0} v_s(T) = T$. De la relation

$$v_s(T)[T_s-(1+s)I] = T_s-(1-s)I$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$v_s(T)\left[\frac{T_s-I}{s}-I\right] = \frac{T_s-I}{s}+I$$

on obtient pour $s \to 0$

$$T(A-I) = A+I,$$

où A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T_s\}$. Donc $T = (A+I)(A-I)^{-1}$, c'est-à-dire T est vraiment le cogénérateur du semi-groupe $\{T_s\}$.

Donc les relations explicites entre un semi-groupe continu de contractions $\{T_s\}_{s \geqq 0}$ et son cogénérateur infinitésimal sont les suivantes:

$$T = \lim_{s\to 0}[T_s-(1-s)I][T_s-(1+s)I]^{-1}, \qquad T_s = e_s(T)$$

où la seconde formule est entendue dans le sens du calcul fonctionnel pour les contractions.

On montre sans peine que le semi-groupe $\{T_s\}$ est constitué d'opérateurs normaux, autoadjoints ou unitaires si, et seulement si son cogénérateur infinitésimal T est de même type, suivant les cas. Cela fournit une possibilité de démontrer les décompositions spectrales de ces semi-groupes (théorèmes de Stone, Sz.-Nagy et Hille) comme conséquences presque immédiates des décompositions spectrales d'un seul opérateur normal, autoadjoint ou unitaire.

De plus si T est le cogénérateur infinitésimal du semi-groupe continu de contractions T_s et U la dilatation unitaire minimum de T opérant dans l'espace $K \supseteqq H$, alors U n'a pas la valeur propre 1 (puisque T ne l'a pas), donc U engendre le semi-groupe continu unitaire $U_s = e_s(U)$. Par la définition même de $e_s(T)$ comme projection de $e_s(U)$ on a donc

$$T_s = \operatorname{pr} U_s \quad (s \geqslant 0).$$

Ce résultat, affirmant que tout semi-groupe continu de contractions admet un semi-groupe continu unitaire comme „dilatation", a été démontré pour la première fois dans mes articles de 1953/54 par d'autres méthodes.

L'application des relations ci-dessus entre un semi-groupe de contractions et son cogénérateur infinitésimal a fait possible de traiter, dans un article récent que j'ai écrit en commun avec C. Foiaş et L. Gehér, des interrelations des conditions de permutabilité de Heisenberg et Schrödinger

$$AB-BA = -iI$$

et de Weyl

$$T_tS_s = e^{its}S_sT_t \quad (s, t \geqslant 0),$$

posées pour deux semi-groupes continus de contractions $\{S_s\}$ et $\{T_t\}$ et leurs générateurs infinitésimaux A et B.

Travaux cités

B. Sz.-Nagy

[1] *Sur les contractions de l'espace de Hilbert, I*, Acta Sci. Math. 15 (1953), p. 87-92; *II*, ibidem, 18 (1957), p. 1-15.

[2] *Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe*, ibidem, 15 (1954), p. 104-114.

B. Sz.-Nagy — C. Foiaş

[1] *Sur les contractions de l'espace de Hilbert, III*, Acta Sci. Math., 19 (1958), p. 26-45.

J. J. Schäffer

[1] *On unitary dilations of contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), p. 322.

C. Foiaş — L. Gehér — B. Sz.-Nagy

[1] *On the permutability condition of quantum machanics*, Acta Sci. Math., 21 (1960), p. 78-89.

M. Schreiber

[1] *A functional calculus for general operators in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958), p. 108-118.