Bibliography

A. Grothendieck

[1] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of Amer. Math. Soc. 1955.

[2] *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), p. 319-384.

T. Leżański

[1] *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 13 (1953), p. 244-276.

[2] *Sur les fonctionnelles multiplicatives*, ibidem 14 (1953), p. 13-23.

A. D. Michel and R. S. Martin

[1] *Some expansions in vector spaces*, Journ. Math. Pures et Appl. 13 (1934), p. 69-91.

A. F. Ruston

[1] *On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space*, Proc. London Math. Soc. (2) 53 (1951), p. 109-124.

[2] *Direct product of Banach spaces and linear functional equations*, ibidem (3) 1 (1951), p. 327-384.

[3] *Formulae of Fredholm type for compact linear operators on a general Banach space*, ibidem (3) 3 (1953), p. 368-377.

[4] *Operators with a Fredholm theory*, Journ. London Math. Soc. 29 (1954), p. 318-326.

R. Sikorski

[1] *On Leżański's determinants of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 14 (1953), p. 24-48.

[2] *On determinants of Leżański and Ruston*, ibidem 16 (1957), p. 99-112.

[3] *Determinant systems*, ibidem 18 (1959), p. 161-186.

[4] *On Leżański endomorphisms*, ibidem 18 (1959), p. 187-188.

[5] *Remarks on Leżański's determinants*, ibidem 20 (1961), p. 145-161.

[6] *On Carleman determinants*, ibidem 20 (1961), p. 327-346.

[7] *The determinant theory of the Carleman type*, Bull. Acad. Pol. Sci. 8 (1960), p. 685-689.

[8] *The determinant theory in Banach spaces*, Coll. Math. 8 (1960), p. 191-198.

F. Smithies

[1] *The Fredholm theory of integral equations*, Duke Math. Journ. 8 (1941), p. 107-130.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

О кубатурных формулах

С. Л. СОБОЛЕВ (Новосибирск)

Формулой механических кубатур называют обычно приближенную формулу

$$\int_{\Omega} \varphi\, dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x^{(k)}), \tag{1}$$

где Ω — некоторая область n-мерного пространства, точки $x^{(k)}$ суть какие то точки внутри этой области, а коэффициенты C_k — заданная система чисел. Ошибка формулы зависит от функции φ. Для различных классов функций эту ошибку можно оценивать по разному. В пространствах $C^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$ и $W_p^{(m)}$ $(m > n/p)$, как это следует из теорем вложения, функционал

$$(l, \varphi) = \int_{\Omega} \varphi\, dx - \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x^{(k)}) \tag{2}$$

является линейным. Максимум такого функционала на единичной сфере в $W_2^{(m)}$ может быть найден эффективно. Ниже будет показано, как это произвести. Имея выражение для максимума можно поставить задачу о нахождении

$$\min_{x^{(k)}, C_k} [\max_{\|\varphi\|=1} (l, \varphi)], \tag{3}$$

т. е. о построении оптимальной формулы механических кубатур с заданным числом точек, что представляет собою задачу о нахождении экстремума функции конечного числа переменных.

Взяв за норму в $W_2^{(m)}$ величину

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{(m)}} = \|H\varphi\|^2_{S^{(m-1)}} + \|\varphi\|^2_{L_2^{(m)}}, \tag{4}$$

где $S^{(m-1)}$ пространство многочленов степени $m-1$, $L_2^{(m-1)}$ фактор-пространство

$$L_2^{(m-1)} = W_2^{(m-1)}/S^{(m-1)}, \tag{5}$$

и оператор $\Pi\varphi$ есть какой либо проекционный оператор из $W_2^{(m)}$ в $S^{(m-1)}$, сводим задачу к нахождению

$$\max_{\|\varphi\| L_1^{(m)}=1} (l, \varphi) \tag{6}$$

при условии, что $(l, \varphi) = 0$ для $\varphi \in S^{(m-1)}$.

Перенормировкой экстремальной функции задачу можно привести к задаче об экстремуме квадратичного функционала

$$D(\varphi) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha \varphi)^2 dx \tag{7}$$

при условии

$$(l, \varphi) = 0. \tag{8}$$

Задача решается методом Лагранжа. Оказывается, что экстремальная функция есть решением уравнения

$$\Delta^m u = (-1)^m \lambda \left[1 - \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(x - x^{(k)})\right] \tag{9}$$

при соответствующих граничных условиях

$$B_k \varphi|_S = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

Аналогично рассматривается задача о формулах механических кубатур для периодических функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с системой периодов

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n). \tag{11}$$

Исследованы формулы имеющие точки $x^{(k)}$ внутри каждого основного параллелоэдра в вершинах некоторой правильной решетки.

Показано, что выбор $x^{(k)}$ в центрах наиболее плотной упаковки шаров для случая $n = 2, 3, 4$ дает большое преимущество в сравнении с вершинами кубической решетки.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Un calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires de l'espace hilbertien et certaines de ses applications

par

BÉLA SZ.-NAGY (Szeged)

Le calcul fonctionnel en question est fondé sur le fait que toute contraction T de l'espace hilbertien H, c'est-à-dire tout opérateur linéaire tel que $\|T\| \leqslant 1$, admet une dilatation unitaire U. C'est un opérateur unitaire défini dans un espace hilbertien K comprenant H comme un sous-espace, tel qu'on a pour tout $h \in H$ et $n = 0, 1, \ldots$:

$$T^n h = P U^n h, \tag{1}$$

P désignant l'opérateur de projection orthogonale sur H; en bref:

$$T^n = \operatorname{pr} U^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1'}$$

En introduisant la notation

$$T^{(n)} = T^n \text{ pour } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{et} \quad T^{(n)} = T^{*|n|} \text{ pour } n = -1, -2, \ldots$$

on a plus généralement

$$T^{(n)} = \operatorname{pr} U^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1''}$$

Pour ce théorème il y a plusieurs démonstrations. La démonstration originale que j'ai trouvé en 1953 partit de l'observation que pour tout $h \in H$ fixé le problème des moments triginométriques

$$(T^{(n)} h, h) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\alpha_h(\theta) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

admet une solution non-décroissante $\alpha_h(\theta)$ et une seule qui est continue de droite et telle que $\alpha_h(0) = 0$, $\alpha_h(2\pi) = (h, h)$. C'est une conséquence, en vertu d'un théorème classique de F. Riesz, du fait facile à démontrer que la fonction

$$F_h(z) = (h, h) + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n (T^n h, h)$$