Литература

[1] С. Л. Соболев, *Об одной теореме функционального анализа*, Матем. Сб. Новая серия, т. 4, вып. 3 (1938), стр. 471-497.

[2] — *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Ленинград 1950.

[3] — *О некоторых свойствах функций пространств* L_p, Доклады Акад. Наук СССР 48 (1945), стр. 563-566.

[4] С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Труды Мат. и-та им. В. А. Стеклова 38 (1951), стр. 244-278.

[5] — *Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях*, Матем. Сб. 33 (75): 2 (1953), стр. 261-326.

[6] Т. И. Аманов, *Граничные функции классов* $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ *и* $H_p^{*(r_1,\ldots,r_n)}$, Известия АН СССР, сер. матем. 19, 1 (1955), стр. 17-32.

[7] N. Aronszajn, *Boundary value of function with finite Dirichlet integral*, Conference on partial differential equations, Studies in eigenvalue problems, No. 14 (Univ. of Kansas, 1955).

[8] Л. И. Слободецкий, *Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных*, ДАН СССР 118, № 2 (1958), стр. 243-246.

[9] E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcunae classi di funzioni in n variabili*, Rendiconti del Seminaro matematico della università di Padova 27 (1957).

[10] О. В. Бесов, *О некотором семействе функциональных пространств. Теорема вложения и продолжения*, ДАН СССР 126, № 6 (1959), стр. 1163-1165.

[11] — *О некоторых условиях принадлежности производных периодических функций*, Научные доклады высш. школы 1 (1959), стр. 13-17.

[12] С. В. Успенский, *Теорема о вложении классов С. Л. Соболева* W_p^r *дробного порядка*, ДАН СССР 130, № 5 (1960), стр. 992-993.

[13] — *Свойства классов* $W_p^{(r)}$ *с дробной производной на дифференцируемых многообразиях*, ДАН СССР, 132, № 1, (1960) стр. 60-62.

[14] А. Д. Кудрявцев, *О продолжении функций и вложении классов функций*, ДАН СССР 107 (1956), стр. 501-504.

[15] — *Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом элиптических уравнений*, Труды Математ. И-та им. В. А. Стеклова 1959, LV, стр. 1-181.

[16] А. А. Вашарин, *Граничные свойства функций, имеющих конечный интеграл Дирихле с весом*, ДАН СССР 117, № 5, (1957) стр. 742-744.

[17] П. И. Лизоркин, *Граничные свойства некоторого класса функций*. ДАН СССР 126, № 4 (1959), стр. 703–706.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume*

von

A. PIETSCH (Berlin)

1. Vollkommene Folgenräume (1). Ein *Folgenraum* λ ist eine Menge von komplexen Zahlenfolgen $\overrightarrow{\xi_h}$, die bezüglich der Addition $\overrightarrow{\xi_h}+\overrightarrow{\eta_h} = \overrightarrow{\xi_h+\eta_h}$ und der Multiplikation $\lambda\overrightarrow{\xi_h} = \overrightarrow{\lambda\xi_h}$ einen komplexen linearen Raum bildet. Jedem Folgenraum λ ordnet man die Gesamtheit λ^* aller Folgen $\overrightarrow{a_h}$ zu, für die mit beliebigem $\overrightarrow{\xi_h}\in\lambda$ stets $\sum_1^\infty |a_h\xi_h| < +\infty$ gilt. λ^* ist ebenfalls ein Folgenraum. Wiederholt man diesen Prozeß, so ergibt sich λ^{**}, und es gilt $\lambda\subset\lambda^{**}$. Hat man sogar $\lambda=\lambda^{**}$, so heißt der Folgenraum λ *vollkommen*.

Ist λ ein vollkommener Folgenraum, so wird durch den Ansatz $\langle \overrightarrow{a_h}, \overrightarrow{\xi_h}\rangle = \sum_1^\infty a_h\xi_h$ auf $\lambda^*\times\lambda$ eine Bilinearform definiert, die λ und λ^* zueinander in Dualität setzt. Daraus ergibt sich die Möglichkeit zur Einführung von lokalkonvexen Topologien auf λ und λ^* (vgl. 6).

2. Problemstellung. Wir wollen verallgemeinerte Folgenräume betrachten, die aus Folgen $\overrightarrow{x_h}$ mit $x_h\in E$ bestehen. Dabei soll E ein folgenvollständiger und separierter komplexer lokalkonvexer Raum sein.

3. Definition von $\lambda(E)$ und $\lambda[E]$. Im folgenden sei λ ein beliebiger vollkommener Folgenraum.

a) $\lambda(E)$ soll aus allen Folgen $\overrightarrow{x_h}$ mit $x_h\in E$ bestehen, für die mit $a\in E'$ stets $\overrightarrow{\langle x_h, a\rangle}\in\lambda$ gilt.

b) $\lambda[E]$ soll aus allen Folgen $\overrightarrow{x_h}$ mit $x_h\in E$ bestehen, für die mit $\overrightarrow{a_h}\in\lambda^*$ stets $\sum_1^\infty a_h x_h$ in E konvergiert.

* Bericht über einige Ergebnisse aus *Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume*, Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der Dt. Akad. Wiss. 12 (1962), S. 100.

(1) Eine Einführung in die Theorie der vollkommenen Folgenräume gibt G. Köthe in Math. Nachr. 4 (1951), S. 70-80.

4. Darstellung von $\lambda(E)$ und $\lambda[E]$. Man kann zeigen, daß die Folgen aus $\lambda(E)$ oder $\lambda[E]$ zur Darstellung von gewissen stetigen linearen Abbildungen dienen können.

a) Jeder Folge $\overrightarrow{x_h} \in \lambda(E)$ wird durch den Ansatz

$$X(\overrightarrow{a_h}) = \sum_1^\infty a_h x_h \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{a_h} \in [\lambda_b^*]$$

eine stetige lineare Abbildung X von $[\lambda_b^*]$ in E zugeordnet. Dabei ist $[\lambda_b^*]$ derjenige Unterraum von λ_b^*, der aus allen Folgen $\overrightarrow{a_h}$ besteht, die in der b-Topologie Grenzwert ihrer Abschnitte sind. Umgekehrt entspricht jeder Abbildung $X \in L([\lambda_b^*], E)$, wenn man

$$x_i = X\left(\overrightarrow{\varepsilon_h(i)}\right) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_h(i) = \begin{cases} 0 & \text{für } h \neq i, \\ 1 & \text{für } h = i \end{cases}$$

setzt, die Folge $\overrightarrow{x_i} \in \lambda(E)$. Man kann also $\lambda(E)$ mit $L([\lambda_b^*], E)$ identifizieren.

b) Jeder Folge $\overrightarrow{x_h} \in \lambda[E]$ wird durch den Ansatz

$$X(\overrightarrow{a_h}) = \sum_1^\infty a_h x_h \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{a_h} \in \lambda^*$$

eine stetige lineare Abbildung X von λ_k^* in E zugeordnet. Umgekehrt entspricht jeder Abbildung $X \in L(\lambda_k^*, E)$, wenn man $x_i = X\left(\overrightarrow{\varepsilon_h(i)}\right)$ setzt, die Folge $\overrightarrow{x_i} \in \lambda[E]$. Man kann also $\lambda[E]$ mit $L(\lambda_k^*, E)$ identifizieren.

5. Beziehungen zwischen $\lambda(E)$ und $\lambda[E]$. a) Es besteht stets die Relation $\lambda[E] \subset \lambda(E)$.

b) Für beliebiges E gilt dann und nur dann stets $\lambda[E] = \lambda(E)$, wenn in λ alle beschränkten Teilmengen sogar relativ s-kompakt sind.

c) Für beliebiges λ gilt dann und nur dann stets $\lambda[E] = \lambda(E)$, wenn in E jede Reihe $\sum_1^\infty x_h$ konvergiert, für die mit beliebigem $a \in E'$ die Ungleichung $\sum_1^\infty |\langle x_h, a\rangle| < +\infty$ gilt.

6. Lokalkonvexe Topologien auf $\lambda(E)$. Ist M eine beliebige beschränkte Teilmenge aus λ^* und U eine Nullumgebung von E, so ist

$$(M, U) = \{\overrightarrow{x_h} : \overrightarrow{x_h} \in \lambda(E) \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{\langle x_h, a\rangle} \in M^0 \quad \text{für} \quad a \in U^0\}$$

eine absolutkonvexe und absorbierende Teilmenge von $\lambda(E)$. Gewissen Systemen m von beschränkten Teilmengen aus λ^* entspricht dann eine lokalkonvexe Topologie von $\lambda(E)$, die sich ergibt, wenn man die Mengen (M, U) als Nullumgebungen verwendet. Dabei soll M alle Mengen aus m und U alle Nullumgebungen von E durchlaufen.

Beispiele:

$s(\lambda^*) = \{S$: endliche Teilmenge von $\lambda^*\}$,
$b(\lambda^*) = \{B$: beschränkte Teilmenge von $\lambda^*\}$,
$k(\lambda^*) = \{K$: relativ s-kompakte Teilmenge von $\lambda^*\}$,
$g(\lambda^*) = \{G$: relativ k-kompakte Teilmenge von $\lambda^*\}$,
$c(\lambda^*) = \{C$: relativ b-kompakte und normale Teilmenge von $\lambda^*\}$.

7. Folgenvollständigkeit. $\lambda(E)$ und $\lambda[E]$ sind für jede m-Topologie mit $m \supset s(\lambda^*)$ folgenvollständig.

8. Beschränkte Teilmengen von $\lambda(E)$. Eine Teilmenge B von $\lambda(E)$ ist für eine m-Topologie mit $m \supset s(\lambda^*)$ dann und nur dann beschränkt, wenn $B_a = \{\overrightarrow{\langle x_h, a\rangle} : \overrightarrow{x_h} \in B\}$ für alle $a \in E'$ eine beschränkte Teilmenge von λ ist. Da diese Charakterisierung nicht von m abhängt, ergeben sich stets die gleichen beschränkten Teilmengen.

9. Kompakte Teilmengen von $\lambda(E)$. Eine Teilmenge K von $\lambda(E)$ ist für eine m-Topologie mit $m \supset s(\lambda^*)$ dann und nur dann kompakt, wenn folgende Aussagen gelten:

a) Die Mengen $K_i = \{x_i : \overrightarrow{x_h} \in K\}$ sind kompakte Teilmengen von E.

b) Wenn die verallgemeinerte Folge $\{\overrightarrow{x_h^{[\nu]}}\}$ aus K komponentenweise gegen die Folge $\overrightarrow{x_h}$ konvergiert, so liegt $\overrightarrow{x_h}$ in K und es gilt $m - \lim_\nu \overrightarrow{x_h^{[\nu]}} = \overrightarrow{x_h}$.

10. Abschnittskonvergenz in $\lambda(E)$. Wenn man mit $[\lambda(E)_m]$ die Gesamtheit aller Folgen $\overrightarrow{x_h} \in \lambda(E)$ bezeichnet, die in der m-Topologie Grenzwert ihrer Abschnitte sind, so ergeben sich die folgenden Aussagen: $[\lambda(E)_c] = \lambda(E)$, $[\lambda(E)_s] = [\lambda(E)_g] = \lambda[E]$, $[\lambda(E)_k] \approx L(\lambda_g^*, E)$ und $[\lambda(E)_b] \approx L(\lambda_c^*, E)$.

11. Beispiele. Für die vollkommenen Folgenräume σ^1 (absolut summierbare Folgen) und σ^∞ (beschränkte Folgen) ergibt sich:

$$\sigma^1(E) = \left\{\overrightarrow{x_h} : \sum_1^\infty |\langle x_h, a\rangle| < +\infty \text{ für } a \in E'\right\},$$

$$\sigma^1[E] = \left\{\overrightarrow{x_h} : \sum_1^\infty x_h \text{ ist unbedingt summierbar}\right\},$$

$$\sigma^\infty(E) = \sigma^\infty[E] = \left\{\overrightarrow{x_h} : \text{die Menge der } x_h \text{ ist beschränkt}\right\}.$$