find an L-transformable function g, non-vanishing identically, such that the convolution

$$f(t) = \int_0^t x(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

cannot be transformable, no matter what is the continuous function $x(t)$. Last year I proved that $g(t) = e^{t^2}$ is such a function. Till now it is the only one function with this property known. L. Berg (Halle/Saale) has given recently a whole class of non-analytical functions with this property.

There exist several problems where the most natural approach is the distributional one. But there exist other problems where the operational calculus is necessary. J. Wloka (Heidelberg) showed that a conjunction of a distribution and of an operator may also be useful in some problems. Roughly speaking, this is a generalization of a function which can be considered as a distribution in one of the variables and as an operator in another variable. Another interpretation is also possible. This is a distribution whose values are operators. The notion of operator-valued distributions occurs in the recent theory of Schwartz, this being concerned with distributions whose values are in some vector spaces. It is always supposed that those spaces are topological locally convex spaces. Since the space of operators is not topological, the operator-valued distributions of Wloka do not enter into the theory of vector-valued distributions.

It is important to know whether there is an appropriate abstract space which makes possible a common consideration of all distributional spaces we meet in practice.

I say that a linear space with a given sequential topology is *partially normable*, if it is possible to consider it as a directed union of normed subspaces X such that, if $X_1 \subset X_2$, the identical mapping of X_1 onto X_2 is continuous. The space is complete if it can be considered as such a union of Banach spaces.

Although such abstract spaces are very general, and embrace, as particular cases, the spaces of distributions, the spaces of operators, the space of Mazur and Orlicz etc., it is easy to build in them an Analysis very similar to the classical Analysis. The proofs are very easy, since they are reduced, as a matter of fact, to proofs in Banach spaces.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

О теоремах вложения для классов дифференцируемых функций многих переменных

С. М. НИКОЛЬСКИЙ (Москва)

Этот доклад посвящен некоторым вопросам, относящимся к теории которую принято называть в настоящее время теорией вложения классов дифференцируемых функций.

Результаты, о которых я буду здесь говорить, будут приводиться в самых простейших случаях. О возможностях распространения их на более сложные случаи мы будем делать только отдельные замечания, далеко не исчерпывающие вопрос.

Пусть R_n обозначает n-мерное пространство точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с действительными координатами. Будем считать всегда, что число p удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Некоторые результаты, о которых будет идти речь ниже, будут верны только при $1 < p < \infty$.

Если $g \subset R_n$ область и $f(\bar{x})$ — измеримая на g функция, модуль которой интегрируем в p-й степени на g, то положим

$$\|f\|_{L_p(g)} = \Big(\int_g |f|^p dg\Big)^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Как обычно, при $p = \infty$ будем считать

$$\|f\|_{L_\infty(g)} = \sup_{\bar{x} \in g} \operatorname{vrai} |f(\bar{x})|.$$

Пусть r есть неотрицательное целое число. Говорят, что функция f *принадлежит к классу $W_p^{(r)}(g)$ Соболева*, если она интегрируема в p-й степени на g вместе со своими обобщенными производными до порядка r включительно. При этом вводится в рассмотрение норма функции f в метрике $W_p^{(r)}(g)$ при помощи равенства

$$\|f\|_{W_p^{(r)}(g)} = \|f\|_{L_p(g)} + \sum \|f^{(r)}\|_{L_p(g)},$$

где $f^{(r)}$ условно обозначает любую обобщенную производную от f порядка r и сумма распространена на все такие производные.

При $r = 0$ считается, что $W_p^{(0)}(g) = L_p(g)$ есть пространство функций, абсолютные величины которых интегрируемы в p-й степени на g.

В качестве области g мы будем здесь рассматривать все пространство R_n или его подпространство R_m $(1 \leqslant m < n)$. Мы всегда будем считать, что m и n обозначают натуральные числа и выполняются неравенства $1 \leqslant m \leqslant n$, $r > 0$, $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$ или, еще более сильные неравенства, которые будут оговариваться особо.

Соболев [1], [2] доказал свои теоремы для областей звездных относительно некоторого шара. Мы сформулируем его основные результаты только для пространства R_n и его R_m-мерного подпространства.

Так как рассматриваемые нами, определенные на R_n функции $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, заданы на R_n с точностью до n-мерной меры нуль, то необходимо объяснить, что мы будем понимать под следом

$$\varphi = f\,|_{R_m} \tag{0}$$

на m-мерном подпространстве R_m точек $\bar{x}$ с произвольными координатами $x_1, \ldots, x_m$ и фиксированными координатами $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.

Если функцию $f(\bar{x})$ можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что после видоизменения для функции

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

в обычном понимании этого слова имеет место

$$\lim \|f(x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n - \varphi(x_1, \ldots, x_m)\|_{L_p(R_m)} = 0,$$

$$\sum_{m+1}^{n} |x_k - x_k^{(0)}| \to 0,$$

то будем называть φ *следом* f на R_m и обозначать как указано в соотношении (0).

Теорема Соболева (с дополнением В. П. Ильина). *Если функция $f \in W_p^{(r)}(R_m)$ и*

$$0 \leqslant k = r - \frac{n-m}{p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)m, \quad 1 < p < p' < \infty, \tag{i}$$

то существует след функции $f|_{R_m} = \varphi$, принадлежащей к классу $W_{p'}^{([k])}(R_m)$. При этом существует константа c не зависящая от f, такая, что выполняется неравенство

$$\|f\|_{W_{p'}^{([k])}(R_m)} \leqslant c\|f\|_{W_p^{(r)}(R_n)}. \tag{ii}$$

С. Л. Соболевым доказано, еще, что в этой теореме при $n = m$ можно считать $p = 1$.

Условимся коротко записывать утверждение теоремы в виде соотношения

$$W_p^{(r)}(R_n) \subset W_{p'}^{([k])}(R_m). \tag{iii}$$

Таким образом соотношение (iii) условно обозначает не только теоретикомножественное вложение класса $W_p^{(r)}(R_n)$ в класс $W_{p'}^{(k)}(R_m)$, но и наличие неравенства (ii).

В дальнейшем мы будем рассматривать наряду с функциональными пространствами W еще и пространства, которые будут обозначаться буквами H и B. Всякий раз, когда будет устанавливаться факт вложения этих пространств друг в друга

$$W \subset W', \quad H \subset H', \quad B \subset B', \quad W \subset B, \ldots$$

эти вложения будут сопровождаться соответствующими неравенствами

$$\|f\|_{W'} < c\|f\|_{W}, \quad \|f\|_{H'} < c\|f\|_{H}, \ldots,$$

где c — константа, зависящая от входящих в соответствующее неравенство классов, но не зависящая от отдельных функций этих классов.

Поэтому когда мы будем констатировать то или иное вложение указанных классов, мы не будем явно выписывать сопровождающее его неравенство между нормами функций.

Теорема Соболева дает возможность установить по дифференциальным свойствам функции, выраженным в метрике $L_p(R_n)$ ее дифференциальные свойства, выраженные в метрике $L_{p'}(R_m)$ при наличии соотношений (i).

В. И. Кондрашев [2], [3] усилил эти теоремы С. Л. Соболева, показав, что входящие в правые части вложений классы $W_{p'}^{(k)}(R_m)$ могут быть уточнены. Именно частные производные k-го порядка, функций входящих в этот класс, удовлетворяют некоторым условиям Гёльдера в соответствующей метрике.

Следующим этапом в этой теории являются мои теоремы [4], [5] для классов, которые я называю классами H.

Пусть $r > 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Положим $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — целое и $0 < \alpha \leqslant 1$. По определению функция $f \in H_p^{(r)}(R_n)$, если она интегрируема в p-й степени вместе со всеми своими обобщенными производными $f^{(S)}$ до порядка $\bar{r}$ включительно и при этом выполняется неравенство Зигмунда

$$\|f^{(\bar{r})}(\bar{x} + \bar{h}) - 2f^{(\bar{r})}(\bar{x}) + f^{(\bar{r})}x(\bar{x} - \bar{h})\|_{L_p(R_n)} \leqslant M|h| \quad \text{при } \alpha = 1 \tag{1}$$

или неравенство Гёльдера

$$\|f^{(\bar{r})}(\bar{x} + \bar{h}) - f^{(\bar{r})}(\bar{x})\|_{L_p(R_n)} \leqslant M|\bar{h}|^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \tag{1'}$$

$H_p^{(r)}(R_n)$ образует пространство Банаха, если ввести норму

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)} + M_f,$$

где $M_f = M$ — наименьшая константа, с которой выполняется неравенство (1) или (1′).

В указанных моих работах показано, что для классов $H_p^{(r)}(R_n)$ при любых положительных не обязательно целых r справедливы теоремы вложения типа (I) и (II):

$$\text{(I)} \quad H_p^{(r)}(R_n) \subset H_{p'}^{\left(r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)n\right)}(R_n) \text{ если } 1 \leqslant p < p' \leqslant \infty,\ r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)n > 0.$$

$$\text{(II)} \quad H_p^{(r)}(R_n) \subset H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)}(R_m) \text{ если } 1 \leqslant p \leqslant \infty,\quad r-\frac{n-m}{p} > 0, \quad 1 \leqslant m < n.$$

Теоремы типа (I) и (II) содержатся в одной комбинированной теореме утверждающей, что имеет место вложение классов:

$$H_p^{(r)}(R_n) \subset H_{p'}^{(k)}(R_m), \tag{2}$$

$$0 < k = r - \frac{n-m}{p} - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)m > 0. \tag{3}$$

Эти теоремы для H классов в ряде случаев обобщают и уточняют теоремы С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева, в других случаях они перекрываются между собой. Это вытекает из следующих легко устанавливаемых вложений

$$H_p^{(r+\varepsilon)}(R_n) \subset W_p^{(r)}(R_n) \subset H_p^{(r)}(R_n) \qquad (r > 0 \text{ целое } \varepsilon > 0)$$

и

$$H_p^{(r)}(R_n) \subset H_p^{(r')}(R_n) \qquad (0 < r' < r).$$

Доказано, [4], [6], что эти теоремы не могут быть усилены, во всяком случае в терминах классов H.

Что касается теоремы типа (II), то для нее доказан еще более существенный факт. Она обратима.

Обратная теорема. *Если задана функция*

$$\varphi \in H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)}(R_m) \qquad \left(r - \frac{n-m}{p} > 0\right),$$

то существует функция $f \in H_p^{(r)}(R_n)$, *для которой имеет место*

$$f|_{R_m} = \varphi.$$

При этом для некоторой не зависящей от φ *константы* c *выполняется неравенство*

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)} \leqslant c\, \|\varphi\|_{H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)}(R_m)}.$$

Утверждение этой теоремы в духе сделанного выше соглашения мы еще будем записывать в виде факта вложения:

$$H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)}(R_m) \subset H_p^{(r)}(R_n).$$

Это утверждение можно еще выразить на другом языке:

Если $r - \dfrac{n-m}{p} > 0$, то линейный оператор

$$Af = f|_{R_m} = \varphi$$

отображает пространство $H_p^{(r)}(R_n)$ функций f в пространство $H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)}(R_m)$ функций φ ограниченным образом — A ограниченный оператор.

Обратная теорема утверждает, что оператор A отображает все пространство $H_p^{(r)}(R_n)$ во все пространство $H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)}(R_n)$ и, следовательно, оператор A нормально разрешим.

Отмечу, что теорема (II) имеет место в полном виде, где наряду со значениями функции f на R_m рассматриваются также значения на R_m ее некоторых частных производных. Кроме того, вместо R_m можно рассматривать область $P \subset R_n$ с кусочно гладкой границей. Можно также рассматривать более сложные классы $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ функций, дифференциальные свойства которых относительных разных переменных различны.

Но я не хочу в этом докладе останавливаться на этих вопросах и буду продолжать рассматривать простейший случай.

Характерным отличием теоремы для H классов является тот факт, что они доказаны для произвольных $r > 0$ не обязательно целых, кроме того, в них впервые рассматривается важный случай $p = p'$ (прямые и обратные теоремы типа (II)).

В дальнейшем, когда мы введем новые классы $W_p^{(r)}$ и $B_p^{(r)}$ для произвольных $r \geqslant 0$, нас будут интересовать теоремы типа (I), (II) и комбинированная теорема для этих классов.

После того как для классов H были установлены обращения теорем типа (II), возникая тенденция получить подобные обращения для классов W Соболева.

В результате исследований N. Aronszajn [7], Л. И. Слободецкого [8], E. Gagliardo [9], О. В. Бесова [10] возникло понятие класса $W_p^{(r)}(R_n)$, определенного для нецелых r. Оно вводится следующим образом.

Пусть $1 \geqslant p < \infty$, $r > 0$, $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — целое и $0 < \alpha < 1$

Функция f принадлежит к классу $W_p^{(r)}(R_n)$, если она принадлежит к классу $W_p^{(\bar r)}(R_n)$ Соболева и если для любой ее частной производной $f^{(\bar r)}$ порядка $\bar r$ является конечной величина

$$\|f^{(r)}\|_{\overline{W}_p^{(\alpha)}(R_n)} = \left(\int\limits_{R_n}\int\limits_{R_n} \frac{|f^{(\bar r)}(\bar x) - f^{(\bar r)}(\bar y)|^p}{|\bar x - \bar y|^{n+p\alpha}}\, dR_n\, dR_n\right)^{1/p} < \infty,$$

$$|\bar x - \bar y| = \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}.$$

Класс $W_p^{(r)}(R_n)$ представляет собой пространство Банаха, если ввести норму

$$\|f\|_{W_p^{(r)}(R_n)} = \|f\|_{W_p^{(\bar r)}(R_n)} + \sum \|f^{(\bar r)}\|_{\overline{W}_p^{(\alpha)}(R_n)},$$

где сумма распространена на всевозможные частные производные от f порядка $\bar r$.

В работах указанных авторов показано, что для целых r имеет место теорема вложения типа (II)

$$W_p^{(r)}(R_n) \subset W^{\left(r - \frac{n-1}{p}\right)}(R_{n-1}), \tag{4}$$

если

$$r - \frac{n-1}{p} > 0, \qquad 1 < p < \infty, \tag{5}$$

и соответствующая обратная теорема, имеющая место, если выполняются неравенства (5).

Л. И. Слободецким, кроме этого, была получена до конца прямая теорема типа (II) и ей обратная при всяком r и $p = 2$.

В указанных теоремах уже осуществляется переход от целых r к нецелым $r - \dfrac{n-1}{p}$ при произвольном r, а при $p = 2$ любые возможные переходы от $r > 0$ к $r - \dfrac{n-m}{2}$ и обратные им.

Естественно возникает вопрос, верна ли теорема типа (I), а также теорема типа (II) и ей обратная при произвольных допустимых r, p, m, n. Иначе говоря, нельзя ли в сформулированных выше моих теоремах, полученных для классов $H_p^{(r)}(R_n)$ заменить всюду H на W.

Совсем недавние исследования моих молодых учеников О. В. Бесова и С. В. Успенского, полностью исследовавших этот вопрос, показали, что этот вопрос решается положительно только в отношении теоремы типа (I), что касается теоремы типа (II), то здесь имеются существенные исключения.

Сейчас я перехожу к изложению результатов Бесова [10], [11] и Успенского [12], [13].

Оставляя обозначения r, n, m прежними, введем в рассмотрение величину

$$k = r - \frac{n-m}{p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)m.$$

В следующей теореме собраны результаты О. В. Бесова и С. В. Успенского, а также результаты о классах W предшествующих авторов, о которых уже говорилось выше.

Теорема. *Пусть $1 < p \leqslant p' < \infty$ и, кроме того, выполняется одно из следующих двух условий:*

1) $k \geqslant 0$, $p < p'$;

2) $k > 0$, k — *нецелое.*

Тогда имеет место вложение классов

$$W_p^{(r)}(R_n) \subset W_{p'}^{(k)}(R_m). \tag{6}$$

Вложение (6) *имеет место также при $p = p'$ и $k = r - \dfrac{n-m}{p}$ целом, если только $1 \leqslant p \leqslant 2$.*

В случае $p > 2$ это последнее утверждение уже оказывается неверным. Можно, в частности, подобрать числа r, n, m и p так, что r и $k = r - \dfrac{n-m}{p}$ будут целыми и

$$W_p^{(r)}(R_n) \not\subset W_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m).$$

Таким образом, теорема типа (II) может не быть верной даже, если мы будем рассматривать классические соболевские классы $W_p^{(r)}(R_n)$, $W_p^{(k)}(R_m)$ при целых r и k. Следовательно, не может быть речи о продолжении классов $W_p^{(r)}(R_n)$ с целых r на произвольные дробные r так чтобы полученное семейство классов было замкнутым относительно даже теорем только типа (II).

Обратная теорема (к теореме типа (II)) также не всегда может быть выражена в терминах классов W. Во всяком случае имеет место следующая теорема:

Теорема. *Если*

$$k = r - \frac{n-m}{p} > 0,$$

то при нецелом k или при целом k, но при $p \geqslant 2$, имеет место вложение

$$W_p^{(k)}(R_m) \subset W_p^{(r)}(R_n).$$

При целом k и $p<2$ это утверждение уже не имеет места.

В свете этих результатов представляют большой интерес исследования Бесова [10], [11], который показал, что классы $W_2^{(r)}(R_n)$ $(r=0,1,2,\ldots)$ можно продолжить на произвольные p $(1\leqslant p<\infty)$ и $r>0$ так что полученные семейства классов $B_p^{(r)}(R_n)$ уже оказываются полностью замкнутыми относительно теоремы вложения типа (I), (II) и комбинированного типа, а также относительно обратной теоремы (и теоремы типа (II)). Более точно, если в соотношениях (I), (II), (III), сформулированных для классов H всюду заменить H на B, то они полностью сохраняются. Для классов B имеет место также и обратная теорема (к теореме типа (II)) совершенно аналогичная высказанной выше для классов H соответствующей теоремы.

Класс $B_p^{(r)}(R_n)$ определяется следующим образом: при дробных r этот класс совпадает с $W_p^{(r)}(R_n)$ с той же метрикой. При условии $r>0$ целое, функция f принадлежит к классу $B_p^{(r)}(R_n)$, если она на R_n интегрируема в p-ой степени вместе со своимин есмешанными обобщенными частными производными до порядка $r-1$ включительно и если, кроме того, конечна норма

$$\|f\|_{B_p^{(r)}(R_n)}=\|f\|_{L_p(R_n)}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^1 t^{-p\alpha-1}\omega_2^p\left(\frac{\partial^{r-1}f}{\partial x_i^{r-1}},te_i\right)_p dt\right\}^{1/p}<\infty.$$

Здесь

$$\omega_2(\varphi,te_i)_p=\sup_{|h|\leqslant t}\|\Delta^2(\varphi,he_i)\|_{L_p(R_n)}=$$

$$=\sup_{|h|\leqslant t}\|\varphi(\bar{x}+he_i)-2\varphi(\bar{x})+\varphi(\bar{x}-he_i)\|_{L_p(R_n)}$$

есть модуль непрерывности второго порядка функции φ в метрике L_p по переменной x_i (e_i есть единичный вектор, направленный по оси x_i).

Если ввести понятие наилучшего приближения

$$E_n(f)_p=\inf_{g_n}\|f-g_n\|_{L_p(R_n)}$$

функции f, при помощи целых функций

$$g_n=g_n(x_1,\ldots,x_n)$$

экспоненциального типа степени n по каждой из переменных x_i $(i=1,\ldots,n)$, то оказывается, что норма функции $f\in B_p^{(r)}(R_n)$ при любом r целом и не целом эквивалентна норме

$$\|f\|_{B_p^{(r)}(R_n)}=\|f\|_{L_p(R_n)}+\left\{\sum_0^{\infty}a^{kpr}E_{a^k}(f)_p\right\}^{1/p}<\infty,$$

которая, таким образом, выглядит теперь единым образом. Здесь $a>1$.

Классы $W_p^{(r)}$ и $B_p^{(r)}$ тесно связаны между собой, они совпадают при дробных r и при любых r при $p=2$. При $p\neq 2$ и целых r они уже отличаются между собой.

Связь их между собой проявляется еще при рассмотрении теоремы вложения типа (II). Как показал О. В. Бесов, если

$$k=r-\frac{n-m}{p}>0,$$

то

$$W_p^{(r)}(R_n)\subset B_p^{(r)}(R_n)\quad \text{и}\quad B_p^{(k)}(R_m)\subset W_p^{(r)}(R_n).$$

Кроме этого (О. В. Бесов) имеют место вложения

$$B_p^{(r)}(R_n)\subset W_p^{(r)}(R_n)\qquad (1<p\leqslant 2),$$

$$W_p^{(r)}(R_n)\subset B_p^{(r)}(R_n)\qquad (p\geqslant 2).$$

При целых r и $p\neq 2$ левые части этих соотношений существенно отличаются от правых.

Из сказанного выше вытекает, что, теоремы вложения типа (II) нельзя при любых обстоятельствах выразить только в терминах W. Что касается классов B, то они в этом смысле так же как классы H замкнуты в себе.

Отмечу еще, что в исследованиях С. В. Успенского существенную роль играло изучение так называемых весовых классов функций, частные производные которых нитегрируемы в p-й степени с некоторым весом, вырождающимся на границе области, по которой происходит нитегрирование.

Систематическое изучение весовых классов начато в работах Л. Д. Кудрявцева [14], [15] и затем продолжалось в работах А. А. Вашарина [16], П. И. Лизоркина [17], и С. В. Успенского [12], [13].

Наконец замечу, что результаты, о которых здесь шла речь, в ряде случаев распространены на области $G\subset R_n$ с достаточно гладкой границей. R_n в предыдущих формулировках здесь заменяется на G и R_m соответственно на границу Γ области G.

С другой стороны, эти результаты распространялись также на случаи более общих классов $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и даже $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ функций, обладающих тем свойством, что они по различным переменным имеют частные производные, вообще говоря, различного порядка и даже могут иметь различные нормы.

Все это уже не входит в рамки данного доклада.

Литература

[1] С. Л. Соболев, *Об одной теореме функционального анализа*, Матем. Сб. Новая серия, т. 4, вып. 3 (1938), стр. 471-497.

[2] — *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Ленинград 1950.

[3] — *О некоторых свойствах функций пространств L_p*. Доклады Акад. Наук СССР 48 (1945), стр. 563-566.

[4] С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Труды Мат. и-та им. В. А. Стеклова 38 (1951), стр. 244-278.

[5] — *Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях*, Матем. Сб. 33 (75): 2 (1953), стр. 261-326.

[6] Т. И. Аманов, *Граничные функции классов $H_p^{(r_1,\dots,r_n)}$ и $H_p^{*(r_1,\dots,r_n)}$*. Известия АН СССР, сер. матем. 19, 1 (1955), стр. 17-32.

[7] N. Aronszajn, *Boundary value of function with finite Dirichlet integral*, Conference on partial differential equations, Studies in eigenvalue problems, No. 14 (Univ. of Kansas, 1955).

[8] Л. И. Слободецкий, *Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных*, ДАН СССР 118, № 2 (1958), стр. 243-246.

[9] E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcunae classi di funzioni in n variabili*, Rendiconti del Seminaro matematico della università di Padova 27 (1957).

[10] О. В. Бесов, *О некотором семействе функциональных пространств. Теорема вложения и продолжения*, ДАН СССР 126, № 6 (1959), стр. 1163-1165.

[11] — *О некоторых условиях принадлежности производных периодических функций*, Научные доклады высш. школы 1 (1959), стр. 13-17.

[12] С. В. Успенский, *Теорема о вложении классов С. Л. Соболева W_p^r дробного порядка*, ДАН СССР 130, № 5 (1960), стр. 992-993.

[13] — *Свойства классов $W_p^{(r)}$ с дробной производной на дифференцируемых многообразиях*, ДАН СССР, 132, № 1, (1960) стр. 60-62.

[14] А. Д. Кудрявцев, *О продолжении функций и вложении классов функций*, ДАН СССР 107 (1956), стр. 501-504.

[15] — *Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом элиптических уравнений*, Труды Математ. И-та им. В. А. Стеклова 1959, LV, стр. 1-181.

[16] А. А. Вашарин, *Граничные свойства функций, имеющих конечный интеграл Дирихле с весом*, ДАП СССР 117, № 5, (1957) стр. 742-744.

[17] П. И. Лизоркин, *Граничные свойства некоторого класса функций*. ДАН СССР 126, № 4 (1959), стр. 703 — 706.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume*

von

A. PIETSCH (Berlin)

1. Vollkommene Folgenräume(¹). Ein *Folgenraum* λ ist eine Menge von komplexen Zahlenfolgen $\overrightarrow{\xi_h}$, die bezüglich der Addition $\overrightarrow{\xi_h}+\overrightarrow{\eta_h} = \overrightarrow{\xi_h+\eta_h}$ und der Multiplikation $\lambda\overrightarrow{\xi_h} = \overrightarrow{\lambda\xi_h}$ einen komplexen linearen Raum bildet. Jedem Folgenraum λ ordnet man die Gesamtheit λ^* aller Folgen $\overrightarrow{a_h}$ zu, für die mit beliebigem $\overrightarrow{\xi_h}\in\lambda$ stets $\sum_1^\infty |a_h\xi_h| < +\infty$ gilt. λ^* ist ebenfalls ein Folgenraum. Wiederholt man diesen Prozeß, so ergibt sich λ^{**}, und es gilt $\lambda\subset\lambda^{**}$. Hat man sogar $\lambda = \lambda^{**}$, so heißt der Folgenraum λ *vollkommen*.

Ist λ ein vollkommener Folgenraum, so wird durch den Ansatz $\langle\overrightarrow{a_h}, \overrightarrow{\xi_h}\rangle = \sum_1^\infty a_h\xi_h$ auf $\lambda^*\times\lambda$ eine Bilinearform definiert, die λ und λ^* zueinander in Dualität setzt. Daraus ergibt sich die Möglichkeit zur Einführung von lokalkonvexen Topologien auf λ und λ^* (vgl. 6).

2. Problemstellung. Wir wollen verallgemeinerte Folgenräume betrachten, die aus Folgen $\overrightarrow{x_h}$ mit $x_h\in E$ bestehen. Dabei soll E ein folgenvollständiger und separierter komplexer lokalkonvexer Raum sein.

3. Definition von $\lambda(E)$ und $\lambda[E]$. Im folgenden sei λ ein beliebiger vollkommener Folgenraum.

a) $\lambda(E)$ soll aus allen Folgen $\overrightarrow{x_h}$ mit $x_h\in E$ bestehen, für die mit $a\in E'$ stets $\overrightarrow{\langle x_h, a\rangle}\in\lambda$ gilt.

b) $\lambda[E]$ soll aus allen Folgen $\overrightarrow{x_h}$ mit $x_h\in E$ bestehen, für die mit $\overrightarrow{a_h}\in\lambda^*$ stets $\sum_1^\infty a_h x_h$ in E konvergiert.

---

* Bericht über einige Ergebnisse aus *Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume*, Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der Dt. Akad. Wiss. 12 (1962), S. 100.

(¹) Eine Einführung in die Theorie der vollkommenen Folgenräume gibt G. Köthe in Math. Nachr. 4 (1951), S. 70-80.