Study of the behavior of continuous linear functionals defined on the spaces (c_0) and l^1 was very helpful in discovering this proof. Two curious and interesting facts were discovered: (1) It is possible to embed (c_0) in a space T in such a way that each norm-preserving extension of a continuous linear functional defined on (c_0) attains its sup on the unit sphere of T, but any such space T contains a subspace isometric with l^1. (2) If l^1 is a subspace of a Banach space T, then there is a norm-preserving extension of a continuous linear functional defined on l^1 which does not attain its sup on the unit sphere of T.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

О квазиметрических свойствах

М. КАТЕТОВ (Прага)

Свойства метрического пространства, сохраняющиеся при взаимно непрерывных взаимно однозначных отображениях, являются топологическими; аналогично характеризуются „равномерные" свойства. Представляет некоторый интерес изучение свойств, инвариантных по отношению к более узким классам отображений. Так В. А. Ефремович [2] предложил рассматривать свойства, сохраняющиеся при взаимно однозначных отображениях, удовлетворяющих (в обе стороны) условию Липшица; эти свойства он называет „почти топологическими". В настоящем сообщении рассматриваются именно эти свойства (однако, в иной связи, чем было намечено у В. А. Ефремовича); мы предпочли термин „квазиметрические" ввиду большой близости этих свойств с чисто метрическими понятиями.

В сообщении даются элементарные основы теории некоторых квазиметрических свойств и понятий, а также ставится ряд проблем, разработка которых представляется желательной. Доказательства почти всюду полностью опускаются.

К сожалению, автор только при подготовке окончательного текста ознакомился с работами [4], [7], в которых уже получены многие результаты, приведенные в сообщении; они все же включены в текст для полноты изложения.

1.

1.1. Мы употребляем, в основном, терминологию Н. Бурбаки; конечное отклонение будет называться псевдометрикой, расстояние (на множестве) — метрикой. Буквы α, β обозначают числа >0. Множество R, снабженное метрикой ϱ, обозначается (R, ϱ); символы (R, ϱ), (S, σ), (T, τ) обозначают всегда метрические пространства. Функцией мы будем называть отображение, принимающее вещественные значения.

1.2. Пусть P — множество. Тогда $\mathfrak{M}_0(P)$ и, соответственно, $\mathfrak{M}(P)$ обозначает множество всех псевдометрик (метрик) на P; $\mathfrak{M}_0(P)$ рассматривается с его обычным упорядочением. Если $S \subset P$, $\varrho \epsilon \mathfrak{M}_0(P)$, то ϱ_S обозначает индуцированную псевдометрику на S, а A_S, где $A \subset \mathfrak{M}_0(P)$, обозначает множество всех ϱ_S, $\varrho \epsilon A$. Если f — отображение множества M в P, $\varrho \epsilon \mathfrak{M}_0(P)$, то $\varrho \cdot f$ определяется равенством $(\varrho \cdot f)(x, y) = \varrho(f(x), f(y))$; для $A \subset \mathfrak{M}_0(P)$, $A \circ f$ обозначает множество всех $\varrho \circ f$, $\varrho \epsilon A$.

1.3. Если дано равномерное или топологическое пространство P, то $\varrho \epsilon \mathfrak{M}_0(P)$, индуцирующее заданную структуру на P, мы будем кратко называть *псевдометрикой* (соответственно, *метрикой*) на пространстве P; множество таких ϱ обозначается через $\mathfrak{M}_0(P)$.

1.4. Пусть P — множество. Введем в $\mathfrak{M}_0(P)$ отношение предпорядка: ϱ *L-мажорирует* σ (иначе говоря, σ *L-минорирует* ϱ) если $a\varrho \geqq \sigma$ при подходящем a; если ϱ одновременно с этим L-минорирует σ, то скажем, что ϱ и σ *L-эквивалентны*. Множество классов L-эквивалентности обозначим через $\mathfrak{Q}_0(P)$; те $q \epsilon \mathfrak{Q}_0(P)$, для которых $q \epsilon \mathfrak{M}(P)$, назовем *квазиметриками* и обозначим их множество через $\mathfrak{Q}(P)$. Множество $\mathfrak{Q}_0(P)$ будет рассматривать с упорядочением, полученным из указанного отношения предпорядка.

1.5. *Квазиметрическим пространством* мы будем называть множество с заданной на нем квазиметрикой. Введя таким образом формально квазиметрические пространства, мы однако в дальнейшем предпочтем говорить о метрических пространствах и рассматривать их „квазиметрические" (или *L-инвариантные*) свойства, т. е. свойства, сохраняющиеся при переходе к L-эквивалентным метрикам. Такие свойства и относящиеся к ним утверждения можно, как правило, немедленно перенести на квазиметрические пространства.

1.6. Если p — квазиметрика на P, $S \subset P$, то p_S является квазиметрикой на S. Это вытекает из следующей леммы:

Пусть $\varrho \epsilon \mathfrak{M}_0(P)$, $S \subset P$, $\sigma \epsilon \mathfrak{M}_0(S)$; пусть τ — наибольшее $\mu \epsilon \mathfrak{M}_0(P)$ такое, что $\mu_S \leqq \sigma$, $\mu \leqq \varrho$; тогда (1) *$\tau_S = \sigma$, если и только если $\varrho_S \geqq \sigma$,* (2) *τ_S L-эквивалентно с σ, если и только если ϱ_S L-мажорирует σ,* (3) *τ L-эквивалентно с ϱ, если и только если σ L-мажорирует ϱ_S.*

1.7. Пусть f отображение (R, ϱ) в (S, σ). Обозначим через $|f|_L$ нижнюю грань a таких, что $\sigma \circ f \leqq a\varrho$ (если таких a нет, то $|f|_L = \infty$. Если $|f|_L < \infty$, назовем f *L-отображением* (или *L-непрерывным* отображением); если $|f|_L \leqq \beta$, назовем f *L_β-отображением*. Если f взаимно однозначно, $|f|_L < \infty$, $|f^{-1}|_L < \infty$, назовем f *L-изоморфным* отображением. Отметим, что для суперпозиции отображений имеет место неравенство $|f \circ g|_L \leqq |f|_L |g|_L$.

1.8. Пусть f — отображение (R, ϱ) в (S, σ). Обозначим через $\omega_f(\xi)$, где $\xi \geqq 0$, верхнюю грань чисел $\sigma(f(x), f(y))$ при $\varrho(x, y) \leqq \xi$.

Обозначим через Ω множество функций φ на $[0, \infty]$ таких, что $\omega_\varphi = \varphi$ и φ непрерывно в точке 0. Очевидно, если τ—метрика и $\varphi \epsilon \Omega$, то $\varphi_0 \tau$—метрика; если $\varphi \epsilon \Omega$ и $\omega_f \leqq \varphi$, то $\varphi \circ \varrho \geqq \sigma \circ f$.

Назовем f *L-ограниченным*, если существуют a, β такие, что всегда $\sigma(f(x), f(y)) \leqq a + \beta\varrho(x, y)$. Легко видеть, что f равномерно непрерывно и L-ограничено, если и только если существует $\varphi \epsilon \Omega$ такое, что $\omega_f \leqq \varphi$.

1.9. Пусть ϱ — метрика на множестве R, f — отображение R на множество S. Обозначим через ϱ/f наибольшую из псевдометрик σ на S таких, что $\sigma \circ f \leqq \varrho$. Легко установить, что $(\varrho/f)(x, y) = \inf \sum_{n=1}^{n} \varrho(f^{-1}(x_{k-1}), f^{-1}(x_k))$, где нижняя грань берется по всем $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ таким, что $x_k \epsilon S$, $x_0 = x$, $x_n = y$, а $\varrho(A, B)$ означает, конечно, $\inf \varrho(u, v)$ при $u \epsilon A$, $v \epsilon B$. Очевидно, ϱ/f является метрикой, если и только если существует метрика на S, относительно которой f L-непрерывно.

1.10. Теорема. *Пусть дано L-отображение f пространства (R, ϱ) в (S, σ). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *если φ—отображение (S, σ) в какое-нибудь (T, τ) и $\varphi \circ f$ L-непрерывно, то также φ L-непрерывно;*

(2) *если φ — взаимно однозначное отображение (S, σ) в какое-нибудь (T, τ) и отображения φ^{-1}, $\varphi \circ f$ L-непрерывны, то φ L-непрерывно;*

(3) *существует a такое, что для любых $x \epsilon f(R)$, $y \epsilon f(R)$ найдутся $x_k \epsilon R$ такие, что $x_0 = x$, $x_n = y$,* $\sum_{k=1}^{n} \varrho(f^{-1}(x_{k-1}), f^{-1}(x_k)) \leqq a\sigma(x, y)$;

(4) *метрика σ L-эквивалентна с ϱ/f.*

Определение. Отображение (L-непрерывное), обладающее указанными свойствами, называется *L-гомоморфным*.

1.11. Если отображение f пространства (R, ϱ) в (S, σ) L-гомоморфно, то существует a такое, что для любого отображения φ пространства (S, σ) в некоторое (T, τ) выполняется неравенство $|\varphi \circ f|_L \geqq |\varphi|_L$.

1.12. Если дано равномерно непрерывное отображение f пространства (R, ϱ) в (S, σ), то всегда существует равномерно эквивалентная (в очевидном смысле; ср. 1.6.) с ϱ метрика ϱ' (например, $\varrho' = \varrho + \sigma \circ f$), при которой f становится L-отображением. Однако, далеко не всегда можно найти равномерно эквивалентную с σ метрику σ' так, чтобы f было L-отображением (R, ϱ) на (S, σ'). В связи с этим возникают различные проблемы, из которых укажем следующую: характеризовать равномерно непрерывные отображения f (метризуемого равномерного пространства R в такое же S) такие, что для любой метрики ϱ на R (см. 1.3.) существует метрика σ на S, для которой $\varrho \geqq \sigma \circ f$.

Легко установить, например, что f имеет это свойство, если R и S компактны, а все $f^{-1}(y)$, за исключением конечного числа, одноточечны. С другой стороны, если R и S компактны, $\dim R < \dim S$, to f не может иметь упомянутого свойства.

1.13. Только что приведенное утверждение можно немедленно получить при помощи понятия ε-энтропии (отметим, что, повидимому, вообще многие проблемы, касающиеся L-отображений и модулей непрерывности ω_f равномерно непрерывных отображений, имеют связь с этим понятием).

Обозначим через $H_\varepsilon(R, \varrho)$ или просто через $H_\varepsilon(R)$ ε-энтропию (абсолютную) вполне ограниченного (R, ϱ) (см. [1]). Очевидно, если существует L_a-отображение (R, ϱ) на (S, σ), то $H_{a\varepsilon}(S) \leqq H_\varepsilon(R)$. Как известно, (см. [11]), если компактное (R, ϱ) имеет конечную размерность n, то $H_\varepsilon(R) \geqq -n\log\varepsilon+\gamma$ при подходящем числе γ, и существует топологически эквивалентная с ϱ метрика ϱ' такая, что $H_\varepsilon(R, \varrho') = -\varphi(\varepsilon)\log\varepsilon$, где $\varphi(\varepsilon) \to n$ при $\varepsilon \to 0$. Из этого немедленно вытекает, что при L-отображении компактного (R, ϱ) размерность не повышается.

2.

2.1. Пусть P — метризуемое равномерное пространство. Обозначим через $\mathfrak{Q}(P)$ множество всех квазиметрик, индуцирующих заданную равномерную структуру на P; через $\mathfrak{Q}_b(P)$ обозначим множество всех ограниченных $q \in \mathfrak{Q}(P)$.

2.2. *Для того, чтобы на метризуемом равномерном P существовала только одна ограниченая квазиметрика, необходимо и достаточно, чтобы P было дискретным.*

Однако, на дискретном P бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ имеется $2^{\mathfrak{m}}$ неограниченных квазиметрик. Действительно, пусть P состоит из точки a и точек $x_{\mu,n}$, где $n = 1, 2, \ldots, \mu$, пробегает множество M мощности $\mathfrak{m}$. Для любой положительной функции φ на M полагаем $\varrho_\varphi(x_{\mu,n}, a) = e^{n\varphi(\mu)}$, $\varrho_\varphi(x, y) = \varrho_\varphi(x, a)+\varrho_\varphi(y, a)$. Очевидно, разные ϱ_φ не могут быть эквивалентными.

2.3. Не устанавливая мощности $\mathfrak{Q}(P)$, $\mathfrak{Q}_b(P)$ в общем случае, приведем только следующий результат:

Пусть P — метризуемое равномерное пространство бесконечного веса $\mathfrak{m}$. Если P не содержит изолированных точек, то для любого $q_0 \in \mathfrak{Q}_b(P)$ имеется ровно $2^{\mathfrak{m}}$ квазиметрик $q \in \mathfrak{Q}_b(P)$, $q \geqq q_0$.

Это утверждение можно доказать, исходя из того, что метрическое пространство веса $\mathfrak{m}$ содержит $2^{\mathfrak{m}}$ замкнутых множеств. Выбрав $\varrho \in q_0$, для каждого замкнутого A и точек x, y полагаем $\varrho^{(A)}(x, y) = \varrho(x, y)+|\sqrt{\varrho(x, A)}-\sqrt{\varrho(y, A)}|$. Оказывается, что каждое $\varrho^{(A)}$ индуцирует заданную равномерную структуру и для различных замкнутых A, B метрики $\varrho^{(A)}$, $\varrho^{(B)}$ не являются L-эквивалентными.

2.4. Пусть на множестве M задано отношение предпорядка. Назовем $A \subset M$ *конфинальным справа* (*слева*) в M, если всякое $x \in M$ мажорируется (минорируется) каким-нибудь $a \in A$. Наименьшую мощность такого A назовем *правым* (*левым*) *конфинальным характером* множества M.

2.5. Упорядочим естественным образом множество N^N всех последовательностей $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел. Конфинальный характер (правый) N^N обозначим через $\mathfrak{b}$. Очевидно, $\aleph_1 \leqq \mathfrak{b} \leqq 2^{\aleph_0}$, но не удастся (конечно, без гипотезы континуума) доказать ни $\aleph_1 = \mathfrak{b}$, ни $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$ (относительно мощности $\mathfrak{b}$ см. также статьи [8], [9]).

2.6. Пусть $D \subset [0, \infty)$, и нуль является точкой сгущения множества D. На множестве Ω (см. 1.8) введем отношение предпорядка: $\varphi_1 \leqq \varphi_2$, если $\varphi_1(\xi) \leqq \varphi_2(\xi)$ для $\xi \in D$. Можно показать, что D содержит конфинальное (справа) множество M подобное N^N.

2.7. Легко видеть, что конфинальные характеры множества $\mathfrak{Q}(P)$ а также левый конфинальный характер множества $\mathfrak{Q}_b(P)$ существенно зависят от P. Однако, имеет место следующее утверждение:

Теорема. *Если метризуемое равномерное пространство P не является дискретным, то правый конфинальный характер $\mathfrak{Q}_b(P)$ равен $\mathfrak{b}$.*

Действительно, пусть ϱ — ограниченная метрика на P. Возьмем множество M, указанное в 2.6. Очевидно (см. 1.8), множество всех $\varphi \circ \varrho$, $\varphi \in \Omega$, конфинально (справа) в множестве $\mathfrak{M}$ всех ограниченных метрик на равномерном пространстве P. Из этого вытекает, что исследуемый характер не превышает $\mathfrak{b}$. С другой стороны, пусть B конфинально в $\mathfrak{M}$; для каждого $\sigma \in B$ найдем $\varphi_\sigma \in \Omega$ такое, что $\sigma \leqq \varphi_\sigma \circ \varrho$. Обозначим через D множество всех чисел $\varrho(x, y)$, где $x \in P$, $y \in P$; очевидно, D ограничено, нуль является его точкой сгущения. Введем в Ω отношение предпорядка, заданное множеством D (см. 2.6) и возьмем соответствующее конфинальное M, подобное множеству N^N. Тогда для всякого $\psi \in M$ найдется $\sigma \in B$ такое, что $\psi \circ \varrho \leqq \sigma$ и потому $\psi \circ \varrho \leqq \varphi_\sigma \circ \varrho$, $\psi(\xi) \leqq \varphi_\sigma(\xi)$ для $\xi \in D$, т. е. $\psi \leqq \varphi_\sigma$ при указанном выше предпорядке. Из этого вытекает, что мощность B не меньше $\mathfrak{b}$.

2.8. Для некоторых равномерных пространств P множество $\mathfrak{Q}_b(P)$ и, следовательно, также $\mathfrak{Q}(P)$ является фильтрующимся влево (разумеется, $\mathfrak{Q}_b(P)$ и $\mathfrak{Q}(P)$ всегда — фильтрующиеся вправо множества). Так, например, пусть компактное метризуемое P содержит единственную неизолированную точку a; остальные точки обозначим через a_n, $n=1,2,\ldots$ Пусть ϱ и σ — метрики на P. Положим $\alpha_n = \inf\limits_{m\neq n}\min\big(\varrho(a_n,a_m),\sigma(a_n,a_m)\big)$, $\tau(a_n,a)=\frac{1}{2}\alpha_n$, $\tau(a_m,a_n)=\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_n)$. Легко устанавливается, что τ — метрика на P, $\tau\leqq\varrho$, $\tau\leqq\sigma$.

Однако, не считая этого и других простейших примеров, автору не удалось установить, при каких условиях $\mathfrak{D}_b(P)$ фильтруется влево.

3.

3.1. Приведем вкратце некоторые содержащиеся в [4] и [7] результаты, касающиеся продолжения L-отображений; мы будем их формулировать в несколько иных выражениях.

Замкнутый шар с центром a и радиусом α (в данном метрическом пространстве) мы будем обозначать через $S(a,\alpha)$. Метрическое пространство (R,ϱ) называется *гипервыпуклым*, если любая система $\{S(a_\lambda,\alpha_\lambda)\}$ такая, что всегда $\alpha_\lambda+\alpha_\mu\geqq\varrho(a_\lambda,a_\mu)$, имеет непустое пересечение.

Теорема. *Для того, чтобы (R,ϱ) было гипервыпуклым, необходимо и достаточно каждое из следующих условий:* (1) *если (T,τ) — метрическое пространство, а f является L_1-отображением множества $A\subset T$ в R, то f можно продолжить до L_1-отображения T в R;* (2) *если (T,τ) — метрическое пространство, f — отображение множества $A\subset T$ в R, $\varphi\in\Omega$ и $\omega_f\leqq\varphi$, то существует отображение F пространства T в R такое, что $\omega_F\leqq\varphi$ (и, следовательно, F равномерно непрерывно и L — ограничено).*

Подмножество A пространства (R,ϱ) назовем *L_α-ретрактом* (*L-ретрактом*) пространства R, если существует L_α-отображение (L-отображение) f пространства на такое, что $f\circ f=f$. Назовем пространство (S,σ) *абсолютным L_α-ретрактом* (*абсолютным L-ретрактом*), если оно является L_α-ретрактом (L-ретрактом) всякого (T,τ), в которое оно вложено.

Подмножество гипервыпуклого пространства гипервыпукло, если и только если оно является его L_1-ретрактом.

3.2. Пусть дано семейство метрических пространств (R_μ,ϱ_μ), $\mu\in\boldsymbol{M}$; пусть $a_\mu\in R_\mu$, $\mu\in\boldsymbol{M}$. Обозначим через B множество $\{x_\mu\}$ таких что $\sup\varrho_\mu(x_\mu,a_\mu)<\infty$, и для $x=\{x_\mu\}\in B$, $y=\{y_\mu\}\in B$ положим $\varrho(x,y)=\sup\varrho_\mu(x_\mu,y_\mu)$. Очевидно, если все R_μ гипервыпуклы, то гипервыпукло также B. В частности, гипервыпукло пространство $B(M)$ всех ограниченных функций на заданном множестве M. Напомним, что всякое метрическое пространство можно вложить в $B(M)$. Из

указанных фактов сразу вытекает, что (R,ϱ) гипервыпукло, если и только если оно является абсолютным L_1-ретрактом.

3.3. Назовем (R,ϱ) *L-экстензором* (*L_α-экстензором*), если для любого (S,σ) и любого $A\subset S$ каждое L-отображение (L_β-отображение) множества A в R можно продолжить до L-отображения ($L_{\alpha\beta}$-отображения) всего S в R.

Понятия L-экстензора (соответственно, L_α-экстензора) и абсолютного L-ретракта (соответственно, абсолютного L_α-ретракта) совпадают. Очевидно, пространство, L-изоморфное с L_α-экстензором, является L_β-экстензором при подходящем β; в частности, пространство, L-изоморфное с гипервыпуклым, является L-экстензором.

Автору неизвестно, можно ли обратить последнее утверждение, т. е. можно ли L-изоморфно отобразить всякий L-экстензор на гипервыпуклое пространство.

3.4. Пусть R — банаховское пространство. Тогда, очевидно, R гипервыпукло, если и только если оно обладает свойством $\mathfrak{P}_1$ (см., например, [6], стр. 94); если R обладает свойством $\mathfrak{P}_\alpha$, то оно является L_α-экстензором. Однако, неизвестно, может ли R быть L-экстензором, не обладая свойством $\mathfrak{P}_\alpha$ ни при каком α.

3.5. *Всякий L-экстензор является также L_α-экстензором при подходящем α.*

Наметим доказательство. Предположим, что (R,ϱ) не является L_n-экстензором ни при каком n. Тогда для $n=1,2,\ldots$ существует (T_n,τ_n), множество $A_n\subset T_n$ и L_1-отображение f_n множества A_n в R, которое нельзя продолжить до L_n-отображения всего T_n в R. Объединяя, в надлежащем смысле, пространства T_n в одно пространство T, получаем L-отображение множества $\bigcup A_n$ в R, которое нельзя продолжить до L-отображения всего T в R.

3.6. Отметим, что в L_α-экстензоре любые точки x,y, $x\neq y$, можно соединить дугой длины, не превосходящей $\alpha\varrho(x,y)$.

3.7. Примеры. A) Пусть непересекающиеся (R_μ,ϱ_μ) являются L_α-экстензорами (с одним и тем же α). Выберем $a_\mu\in R_\mu$, отождествим все a_μ, сохраним в R_μ заданную метрику, а при $\mu\neq\nu$, $x\in R_\mu$, $y\in R_\nu$, положим $\varrho(x,y)=\varrho_\mu(x,a_\mu)+\varrho(y,a_\nu)$. Полученное пространство является L_α-экстензором.

B) Будем обозначать через E^n n-мерное эвклидово пространство. Множество $(\xi,\eta)\in E^2$ таких, что $|\xi|\leqq 1$, $0\leqq\eta\leqq\sqrt{2-|\xi|}$, является L-экстензором. Легко видеть, что его нельзя L-изоморфно отобразить на квадрат.

C) Множество $(\xi,\eta)\in E^2$ таких, что $|\xi|\leqq 1$, $-1\leqq\eta\leqq\sqrt{|\xi|}$, не является L-экстензором, как вытекает из 3.5. и 3.6.

3.8. Неизвестно, при каких условиях на метризуемом пространстве (топологическом или равномерном) существует метрика, при которой оно является L-экстензором (необходимо, конечно, чтобы пространство было, в соответствующем смысле, во-первых, полным, а во-вторых, абсолютным ретрактом относительно метризуемых пространств).

3.9. Далее, неизвестен метод, при помощи которого можно было бы обозреть множество всех квазиметрик на данном равномерном пространстве (хотя бы только n-мерном кубе, $n>1$), при которых оно становится L-экстензором. При $n=1$, т. е. для отрезка, ответ получается сразу — существует только одна такая квазиметрика.

3.10. Пусть (R, ϱ) является L_a-экстензором. Пусть даны (S_1, σ_1), (S_2, σ_2); пусть отображение f множества $M \subset S_1 \times S_2$ в R равномерно непрерывно относительно x (соответственно, y) при любом y (соответственно, x). Ставится задача — продолжить f на все $S_1 \times S_2$ без ухудшения упомянутой равномерной непрерывности.

Эту еще довольно неопределенную задачу можно уточнить и видоизменить различным образом. Не вдаваясь в эти вопросы, отметим только следующие очевидные факты: (1) если $\varphi_1 \epsilon \Omega$, $\varphi_2 \epsilon \Omega$ и $\varrho \circ f \leqq \varphi_1 \circ \sigma_1 \circ \pi_1 + \varphi_2 \circ \sigma_2 \circ \pi_2$, где π_i — проекция $S_1 \times S_2$ на S_i, то можно продолжить f до F, определенного на $S_1 \times S_2$, таким образом, что $\varrho \circ F \leqq a\varphi_1 \circ \sigma_1 \circ \pi_1 + a\varphi_2 \circ \sigma_2 \circ \pi_2$; (2) если $M = T_1 \times T_2$, T_2 вполне ограничено, f равномерно непрерывно относительно x при любом y и является L_β-отображением относительно y при любом x, то f продолжается до равномерно непрерывного F, являющегося $L_{a\beta}$-отображением относительно y при любом x.

4.

4.1. Предел равномерно сходящейся последовательности L-отображений пространства (T, τ) в (R, ϱ) является, очевидно, равномерно непрерывным L-ограниченным отображением. Если (R, ϱ) таково, что при любом (T, τ) это утверждение можно обратить, т. е. каждое L-ограниченное равномерно непрерывное отображение T в R является пределом равномерно сходящейся последовательности L-отображений то мы скажем, что (R, ϱ) имеет *свойство* A.

4.2. Пусть R — метрическое пространство, $S \subset R$. Назовем S *L-ретрактом* (*L_a-ретрактом*) *окрестности* в R, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что S является L-ретрактом (L_a-ретрактом) подпространства, состоящего из $y \epsilon R$ таких, что $\varrho(y, S) < \varepsilon$.

4.3. В статье [7] доказан (в иной формулировке) следующий результат.

Теорема. *Гипервыпуклое пространство имеет свойство* A.

4.4. Теорема. *Для того, чтобы метрическое пространство (R, ϱ) имело свойство A, достаточно каждое из следующих условий*: (1) *R является L-ретрактом окрестности в некотором пространстве, обладающем свойством* A; (2) *существует пространство, обладающее свойством* A, *и его взаимно однозначное L-отображение f на R такое, что f^{-1} равномерно непрерывно и L-ограничено*; (3) *для любого $\varepsilon > 0$ существует подпространство $S \subset R$, обладающее свойством* A, *и L-отображение f пространства R в S такое, что $\varrho\big(x, f(x)\big) < \varepsilon$ для всех $x \epsilon R$*; (4) *для любого $\varepsilon > 0$ существует (T, τ) обладающее свойством* A, *и отображения f пространства R в T, g — пространства T в R такие, что f L-ограничено и равномерно непрерывно, g L-непрерывно, $\varrho\Big(g\big(f(x)\big), x\Big) < \varepsilon$ для всех $x \epsilon R$.*

Разумеется, условие (4) охватывает условия (2) и (3).

4.5. Легко доказывается (на основании 4.4.) следующий результат (допускающий значительное обобщение):

Теорема. *Пусть (R, ϱ) гомеоморфно с одномерным полиэдром. Тогда R имеет свойство* A, *если и только если каждая его внутренняя точка обладает окрестностью, длина которой конечна.*

Внутренней здесь названа, конечно, точка, отображающаяся на внутреннюю (геометрически) точку полиэдра. „Длину" (точнее говоря, 1-мерную меру) метрического пространства R можно определить хотя бы как нижнюю грань обычных мер множеств $M \subset E^1$, допускающих L_1-отображение на R (см. [10]).

Отметим, что, в частности, метрическое пространство, гомеоморфное с окружностью, имеет свойство A, если и только если его длина конечна.

4.6. Примеры. A) Пространство из 3.7 C имеет свойство A, хотя оно не является L-экстензором.

B) Множество точек $(\xi, \eta) \epsilon E^2$ таких, что $|\xi| \leqq 1$, $-1 \leqq \eta \leqq 1 + \varphi(\xi)$, где $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\xi) = \xi \sin\dfrac{1}{\xi}$ при $\xi \neq 0$, имеет свойство A (как вытекает из 4.4.), гомеоморфно с квадратом, но не является его образом при взаимно однозначном L-отображении.

C) Множество точек $(\xi, \eta) \epsilon E^2$ таких, что или $0 < \xi \leqq 1$, $\eta = \sin 1/\xi$, или $\xi = 0$, $|\eta| \leqq 1$, имеет свойство A, хотя оно и не является локально связным.

4.7. В числе других, остаются открытыми следующие вопросы: (1) при каких условиях можно метризовать равномерное пространство так, чтобы оно имело свойство A; (2) обладает ли всякое подмножество пространства E^n, гомеоморфное с n-мерным кубом, свойством A.

5.

5.1. Для любого (R, ϱ) обозначим через $L(R)$ или, подробнее, через $L(R, \varrho)$ векторное пространство всех L-функций на R, через $L_b(R)$ его подпространство, состоящее из ограниченных L-функций. Через $L_0(R)$ будет обозначаться факторпространство пространства $L(R)$ по подпространству констант.

5.2. Введем в $L(R)$ норму $\|f\| = \max(|f(a)|, |f|_L)$ где a — фиксированная точка (итак, норма зависит от выбора a, но все эти нормы эквивалентны). Очевидно, $L(R)$ — банаховское пространство. В $L_0(R)$ получаем в качестве нормы $|f|_L$; очевидно, $L_0(R)$ изометрически изоморфно с подпространством пространства $L(R)$, состоящим из функций анулирующихся в точке a.

Легко видеть, что если (R, ϱ) неограничено, то $L_b(R)$ рассматриваемое как подпространство в $L(R)$ — первой категории в себе и его замыкание отлично от $L(R)$. Однако, $L_b(R)$ можно также рассматривать как банаховское пространство, взяв в качестве нормы $\max(\sup_{x\in R}|f(x)|, |f|_L)$.

5.3. Если R имеет бесконечный вес $\mathfrak{m}$, то существует множество $M \subset L(R)$ мощности $2^{\mathfrak{m}}$ такое, что $|f-g|_L \geqq 1$ для $f \in M$, $g \in M$, $f \neq g$; достаточно взять функции $f^{(A)}(x) = \varrho(x, A)$, где A — замкнутое непустое множество. Из этого следует, что как вес, так и мощность $L(R)$ равны $2^{\mathfrak{m}}$.

5.4. Теорема. *Пусть ϱ_1 и ϱ_2 — метрики на множестве R. Если $L(R, \varrho_1)$ и $L(R, \varrho_2)$ совпадают (как множества), то ϱ_1 и ϱ_2 L-эквивалентны.*

Действительно, легко установить существование метрики ϱ_3 такой, что $\varrho_3 \leqq \varrho_1$, $\varrho_3 \leqq \varrho_2$ и $L(R, \varrho_3) = L(R, \varrho_1) = L(R, \varrho_2)$. Очевидно, тождественное отображение $L_0(R, \varrho_3)$ на $L_0(R, \varrho_i)$ $i = 1, 2$, непрерывно и линейно; так как $L_0(R, \varrho_j)$ — банаховские пространства, то упомянутое отображение открыто, и потому существует β такое, что всегда $|f|_3 \leqq \beta |f|_i$, где $f \in L(R, \varrho_j)$, $|f|_j$ обозначает $|f|_L$, взятое относительно ϱ_j. Если $a \in R$, $b \in R$, $a \neq b$, то находим функцию f такую, что $|f|_i = 1$, $|f(a)-f(b)| = \varrho_i(a, b)$. Тогда $|f|_3 \leqq \beta$, и поэтому $|f(a)-f(b)| \leqq \beta\varrho_3(a, b)$. Итак, $\beta\varrho_3 \geqq \varrho_i$, из чего вытекает, что ϱ_3 и ϱ_i L-эквивалентны.

5.5. Рассмотрим банаховское пространство $L_0'(R)$, сопряженное к $L_0(R)$. Для $x \in R$ обозначим через $\hat{x}$ элемент из $L_0'(R)$, определяемый при помощи равенства $\hat{}(f) = f(x) - f(a)$, где a фиксировано. Обозначим через $E(R)$ наименьшее замкнутое подпространство в $L_0'(R)$, содержащее все $\hat{x}$. Легко видеть, что соответствие $x \to \hat{x}$ является изометрическим отображением R в $E(R)$. Пространство $E(R)$ было, по существу, уже введено, иным способом, в работе [3]; точнее говоря, там рассматривалось его подпространство, состоящее из линейных комбинаций элементов $\hat{x}$. Пространство $E(R)$ является в смысле, который мы здесь не будем уточнять, максимальным банаховским пространством, содержащим R как плотное подмножество или, иначе говоря, „свободным банаховским пространством над R". Очевидно, $E'(R)$ естественным образом изометрически изоморфно с $L_0(R)$.

Отметим еще, в качестве примера, что если в R имеем $\varrho(x, y) = 1$ при $x \neq y$, то $E(R)$ изоморфно с $L^1(R)$, где R понимается как абстрактное множество.

5.6. Пусть имеется L-отображение φ пространства (R, ϱ) в (S, σ). Обозначим через φ' отображение $L_0(S)$ в $L_0(R)$, соответствующее отображению $f \to f\circ\varphi$ пространства $L(S)$ в $L(R)$. Очевидно, φ' — непрерывное линейное отображение с нормой, равной $|\varphi|_L$.

5.7. *Отображение φ' открыто, если φ L-гомоморфно; φ' взаимно однозначно, если и только если $\varphi(R)$ плотно в S; φ' отображает $L_0(S)$ на все пространство $L_0(R)$, если и только если φ является L-изоморфизмом.*

Нерешенным остается вопрос, может ли φ' быть открытым, если φ не является L-гомоморфизмом.

5.8. Рассмотрим отображение φ'', сопраженное к φ'. Можно доказать следующее утверждение: *если φ L-гомоморфно, то φ'' открыто; φ L-изоморфно, если и только если φ'' является изоморфизмом.* Аналогичные результаты получаются для сужения φ'' на $E(R)$.

5.9. Если R — отрезок (с обычной метрикой), то $L_0(R)$ изометрически изоморфно с пространством существенно ограниченных функций $L^\infty(R)$ (и, значит, с некоторым $C(X)$, где X компактно).

Из работ [5], [12] вытекает, что $L_0(R)$ изоморфно с $L^\infty(R)$ (и, следовательно, имеет свойство $\mathfrak{P}_\alpha$ при некотором α и является L-экстензором) и для различных других метрик на R, в частности для метрик вида $\varrho(\xi, \eta) = |\xi - \eta|^\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$.

С другой стороны, легко видеть, что перейдя к подходящей L-эквивалентной метрике на R, можно получить $L_0(R)$, которое, конечно, изоморфно с $L^\infty(R)$, однако не может быть изометрически отображено ни на какое $C(X)$.

5.10. Автору неизвестно, при каких условиях, наложенных на пространство (R, ϱ), пространство $L_0(R)$ имеет, соответственно, следующие свойства: (1) $L_0(R)$ изометрически изоморфно с некоторым $C(X)$ (и тогда, как легко показать, гипервыпукло); (2) $L_0(R)$ изоморфно с некоторым $C(X)$; (3) $L_0(R)$ обладает свойством $\mathfrak{P}_\alpha$; (4) $L_0(R)$ является L-экстензором.

Литература

[1] А. Г. Витушкин, *Оценка сложности задачи табулирования*, Москва 1959.

[2] В. А. Ефремович, *Почти топологические свойства*, Ученые записки Ивановского пед. института, 5 (1954), стр. 3-8 (см. также Успехи мат. наук, 10, вып. 2 (64), стр. 213).

[3] R. Arens, J. Eells, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacif. J. Math., 6 (1956), стр. 397-403.

[4] N. Aronszajn, P. Panitchpakdi, *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, Pacif. J. Math., 6 (1956), стр. 405-439.

[5] Z. Ciesielski, *On the isomorphisms of the spaces H_α and m*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 8 (1960), стр. 217-222.

[6] M. Day, *Normed Linear Spaces*, 1958.

[7] L. Géher, *Ueber Fortsetzungs-und Approximationsprobleme für stetige Abbildungen von metrischen Räumen*, Acta scient. math. (Szeged), 20 (1959), стр. 48-66.

[8] M. Katětov, *Remarks on characters and pseudocharacters*, Comm. Math. Univ. Carol., 1 (1960), стр. 20-25.

[9] M. Katětov, *On the space of irrational numbers*, Comm. Math. Univ. Carol., 1 (1960), No 2, стр. 38-42.

[10] A. Kolmogoroff, *Beiträge zur Masstheorie*, Math. Ann. 107 (1933), стр. 351-366.

[11] L. Pontrjagin, L. Schnirelmann, *Sur une propriété métrique de la dimension*, Ann. of Math. 33 (1932), стр. 156-162.

[12] A. Pełczyński, *On the isomorphism of the spaces M and m*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 6 (1958), стр. 695-696.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Topological structure of infinite-dimensional linear spaces: the classification problem*

by

V. KLEE (Seattle, Wash.)

In studying a class T of topological spaces, it is natural to ask what topological possibilities are represented by the members of T. We call this the *classification problem* for T. A solution consists of exhibiting, in a more or less constructive way, a minimal class M of topological representatives for T — that is, a class M of topological spaces such that every member of T is homeomorphic with some member of M but no two members of M are homeomorphic. The problem is of fundamental importance and has been completely solved in a few significant cases (Seifert and Threlfall for the two-dimensional manifolds, de Groot for the countable closed subsets of E^n). But for most interesting choices of T, the problem is unsolved and appears to be exceedingly difficult. Even in these cases, consideration of the problem may be a good approach to the study of T, and partial results may illuminate the topological structure of individual members of T. Papakyriakopoulos has supplied an interesting survey of this development in the case of three-dimensional manifolds. In the present report, we consider the classification problem for certain classes of normed linear spaces and their convex subsets. Extant fragments of the theory originated largely in response to specific questions raised by various authors, and of course the answers have stimulated new questions. These questions, both old and new, play a prominent role in our exposition. It is especially fitting that this topic should be discussed at a conference in honor of Stefan Banach, since some of the problems mentioned in his path-breaking book of 1932 are still the basic unsolved problems in the area under discussion, and since Banach himself made some of the initial contributions to the area.

Our report consists mainly of a summary of known results and unsolved problems which are at least indirectly related to the classification problem for convex sets in normed linear spaces, together with an outline

* This is extracted from a long report which will soon appear; it cover also the methods of Bessaga and Pełczyński.