As in the classical case, we try to find a solution of the form

$$w(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{c_0+nc}, \tag{5}$$

where the powers are defined by the operational calculus. This substitution leads to a system of equations

$$\begin{aligned} &c_0 a_0 - a_0 c_0 = 0, \\ &n a_n - (c_0 a_n - a_n c_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k a_{n-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

The properties of this system depend upon the spectral properties of c_0 as an element of B and these in their turn determine the spectral properties of the commutator

$$T(x) = c_0 x - x c_0. \tag{7}$$

If the spectrum of $T(x)$ does not contain any integer $\neq 0$, then we can take $a_0 = e$ and determine the a_n's successively from (6). The resulting series converges for $0 < |\zeta| < \varrho$ and satisfies the differential equation. This case arises if the spectrum of c_0 does not contain any two numbers which differ by an integer.

If the spectrum of $T(x)$ does contain integers, but these are poles of the resolvent of $T(x)$, then a modification of the classical method of Frobenius leads to the desired result. If N is the sum of the orders of the poles of the resolvent at the positive integers, then the solution is a polynomial in $\log\zeta$ of degree N where each power of $\log\zeta$ is multiplied by a power series of type (5). The analysis breaks down if singularities of more general nature are allowed.

For the case of an irregular singular point, the reduction of G. D. Birkhoff using Laplace transforms offers a possible mode of approach.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Characterizations of reflexive Banach spaces

by

R. C. JAMES (Claremont, Calif.)

A Banach space B is isometric with a subspace of its second conjugate space under the "natural mapping" for which the element of B^{**} which corresponds to the element x_0 of B is the linear functional F_{x_0} defined by $F_{x_0}(f) = f(x_0)$ for each f of B^*. If every F of B^{**} is of this form, then B is said to be *reflexive* and B is isomorphic with B^{**} under this natural mapping. It is known that for a Banach space B each of the following conditions is equivalent to reflexivity:

(i) *the unit sphere of B is weakly compact* (Eberlein and Šmulian);

(ii) *each decreasing sequence of bounded closed convex sets has a non-empty intersection* (Šmulian).

If the unit sphere is weakly compact, then each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere. Klee used (ii) to show that if each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere of any isomorph of the space, then the unit sphere is weakly compact. It was shown by the author that if each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere of a separable Banach space, then the space is reflexive. The proof used a characterization of reflexivity which states essentially that a Banach space is reflexive if and only if its unit sphere does not contain a "large flat region", that is,

(iii) *there does not exist a sequence of elements $\{z_i\}$ and positive numbers, Δ, δ, and σ, for which the following are true*:

$$\Delta(\Sigma a_i) > \|\Sigma a_i z_i\| > \delta(\Sigma a_i) \text{ if each } a_i \text{ is positive};$$

$$\|\Sigma_1^n a_i z_i - \Sigma_{n+1}^p \beta_i z_i\| > \sigma \|\Sigma_1^n a_i z_i\| \text{ if each } \beta_i \text{ is positive}.$$

This characterization of reflexivity and an extension of the author's original proof of the theorem about sups of continuous linear functionals for separable Banach spaces has been used to prove that a Banach space is reflexive if and only if:

(iv) *each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere.*

Study of the behavior of continuous linear functionals defined on the spaces (c_0) and l^1 was very helpful in discovering this proof. Two curious and interesting facts were discovered: (1) It is possible to embed (c_0) in a space T in such a way that each norm-preserving extension of a continuous linear functional defined on (c_0) attains its sup on the unit sphere of T, but any such space T contains a subspace isometric with l^1. (2) If l^1 is a subspace of a Banach space T, then there is a norm-preserving extension of a continuous linear functional defined on l^1 which does not attain its sup on the unit sphere of T.

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

О квазиметрических свойствах

М. КАТЕТОВ (Прага)

Свойства метрического пространства, сохраняющиеся при взаимно непрерывных взаимно однозначных отображениях, являются топологическими; аналогично характеризуются „равномерные" свойства. Представляет некоторый интерес изучение свойств, инвариантных по отношению к более узким классам отображений. Так В. А. Ефремович [2] предложил рассматривать свойства, сохраняющиеся при взаимно однозначных отображениях, удовлетворяющих (в обе стороны) условию Липшица; эти свойства он называет „почти топологическими". В настоящем сообщении рассматриваются именно эти свойства (однако, в иной связи, чем было намечено у В. А. Ефремовича); мы предпочли термин „квазиметрические" ввиду большой близости этих свойств с чисто метрическими понятиями.

В сообщении даются элементарные основы теории некоторых квазиметрических свойств и понятий, а также ставится ряд проблем, разработка которых представляется желательной. Доказательства почти всюду полностью опускаются.

К сожалению, автор только при подготовке окончательного текста ознакомился с работами [4], [7], в которых уже получены многие результаты, приведенные в сообщении; они все же включены в текст для полноты изложения.

1.

1.1. Мы употребляем, в основном, терминологию Н. Бурбаки; конечное отклонение будет называться псевдометрикой, расстояние (на множестве) — метрикой. Буквы α, β обозначают числа >0. Множество R, снабженное метрикой ϱ, обозначается (R, ϱ); символы (R, ϱ), (S, σ), (T, τ) обозначают всегда метрические пространства. Функцией мы будем называть отображение, принимающее вещественные значения.

1.2. Пусть P — множество. Тогда $\mathfrak{M}_0(P)$ и, соответственно, $\mathfrak{M}(P)$ обозначает множество всех псевдометрик (метрик) на P; $\mathfrak{M}_0(P)$ рас-