Let $V^{(r)}$ be compact and orientable. The particular tensorial measures obtained by assuming $n = 0$, $p = -1$, are denoted k-measures. In this case $\mathfrak{M}_0$ is isomorphic to the space of the differentiable k-forms on $V^{(r)}$ with locally integrable coefficients. On the other hand, the linear space $\overset{*}{\mathfrak{M}}$ of the singular k-measures contains a subspace that is isomorphic to the linear space of the $(r-k)$-chains on $V^{(r)}$ with real coefficients. Let t be such an isomorphism. An operation d of weak differentiation is introduced for the k-measures. The following identity hold $dt = t\beta$ $(\beta = (-1)^k\partial)$.

The space $H_k^{(m)}$ of m-homology is the quotient space of the closed k-measure (k-measure with a vanishing differential) modulo the space of the k-measure which are homologous to zero (i. e. k-measures that are the differential of $(k-1)$-measures). The space $H_n^{(f)}$ of f-homology is the quotient space of the closed regular k-form (k-form with C_L^0 coefficients and vanishing differential) modulo the space of regular and homologous to zero k-forms. The space $H_k^{(c)}$ of c-homology is the quotient space of the $(r-k)$-cicles modulo the space of the bounding $(r-k)$-cicles. The isomorphism $\int$ induces an homomorphism of $H_k^{(f)}$ into $H_k^{(m)}$. This is called the imbedding of $H_k^{(f)}$ in $H_k^{(m)}$. Analogously — by using t — the imbedding of $H_k^{(c)}$ in $H_k^{(m)}$ is defined. The two main theorems are: I) The imbedding of $H_k^{(f)}$ in $H_k^{(m)}$ is an isomorphism of $H_k^{(f)}$ onto $H_k^{(m)}$. II) The imbedding of $H_k^{(c)}$ in $H_k^{(m)}$ is an isomorphism of $H_k^{(c)}$ onto $H_k^{(m)}$. The de Rham theorems are easily derived from I) and II). When a metric is introduced on $V^{(r)}$ and harmonic forms defined, the following theorem (Hodge) is proved: III) Each m-homology class of $H_k^{(m)}$ contains one and only one harmonic form.

The main analytical tool in proving theorems I) and II) is an inequality for regular differential forms. Let C_k be the Banach space of continuous k-form with a C norm, C_k^0 be the quotient Banach space of C_k modulo the closure of the manifold of the closed regular k-forms. The main inequality is the following that holds for every regular k-form: $\|[v]\|_{C_k^0} \leqslant K_p \|dv\|_{L_k^p}$; $[v]$ denotes an equivalence class of C_k^0, K_p is a constant depending on p, p any real number greater than r. The norms are respectively taken in C_k^0 and in L_k^p (Banach space of k-forms with locally L^p-integrable coefficients).

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

R-fastperiodische Funktionen *

von

S. HARTMAN (Wrocław)

Bekanntlich ist die reelle Achse D stetig isomorph einer dichten Untergruppe der als Bohrsches Kompaktum bezeichneten kompakten Gruppe K mit folgenden Eigenschaften: jede (im Sinne von Bohr) fastperiodische (fp.) Funktion einer reellen Variablen läßt sich zu einer stetigen Funktion auf K erweitern und umgekehrt, jede auf K stetige Funktion ist auf D fastperiodisch. Beschränkt man sich auf fp. Funktionen, deren Fourierexponenten zu einer abzählbaren additiven Gruppe Λ von reellen Zahlen gehören, so kann man eine metrische kompakte Gruppe K_Λ (Untergruppe des $\aleph_0$-dimensionalen Torusses) konstruieren, welche diesen Funktionen gegenüber dieselbe Rolle spielt, wie K gegenüber der Gesamtheit aller fp. Funktionen. Man kann dann jeder auf K_Λ nach dem invarianten Maße μ integrierbaren Funktion eine Besicovitchsche fp. Funktion (B-Funktion) auf D mit Exponenten aus Λ so zuordnen, daß die Fourierreihe erhalten bleibt, wenn man den Koordinaten x_j der Punkte aus K_Λ die Charaktere $e^{i\lambda_j t}$ $(\lambda_j \in \Lambda)$ von D entsprechen läßt. Um diese Korrespondenz eineindeutig zu machen, muß man einzelnen Klassen von μ-äquivalenten Funktionen auf K_Λ (μ-Klassen) volle Klassen B-äquivalenter Funktionen auf D (B-Klassen) zuordnen, wobei zwei Funktionen f und g *B-äquivalent* heißen, wenn

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)-g(t)|\,dt = 0$$

gilt.

Die nach Riemann integrierbaren (d. h. μ-fast überall stetigen) Funktionen auf K_Λ bilden einen linearen Unterraum (Unterring) der Gruppenalgebra $L(K_\Lambda)$. Es liegt die Frage nahe, wie die entsprechenden B-Funktionen beschaffen sind. Dazu werde folgender Begriff einer R-fp. Funktion eingeführt:

Definition. Eine B-Funktion f ist *R-fastperiodisch*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Bohrsche fp. Funktionen φ_1 und φ_2 gibt, so daß

* Für ausführliche Darstellung siehe Verfassers die Arbeit des *Über Niveaulinien fastperiodischer Funktionen*, Studia Math. 20 (1961), S. 313-325.

$$\varphi_1(t) \leqslant f(t) \leqslant \varphi_2(t) \quad \text{überall auf } D,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\varphi_2(t) - \varphi_1(t)]\, dt < \varepsilon.$$

Vermöge der Korrespondenz zwischen den stetigen Funktionen auf K_Λ und den Bohrschen fp. Funktionen mit Exponenten aus Λ beweist man nun mühelos den

SATZ 1. *Damit eine B-Klasse eine R-fp. Funktion enthält, ist notwendig und hinreichend, daß die entsprechende μ-Klasse eine nach Riemann integrierbare Funktion enthalte.*

Um sich klarzumachen, welchen Platz die R-fp. Funktionen unter den bekannten Typen von verallgemeinerten fp. Funktionen einnehmen, bemerke man zuerst, daß jede Bohrsche fp. Funktion trivialerweise auch R-fastperiodisch ist und daß eine fp. Funktion von Stepanoff nicht R-fastperiodisch zu sein braucht. Wohl aber gilt der leicht beweisbare

SATZ 2. *Eine R-fp. Funktion ist für jedes $p \geqslant 1$ W^p-fastperiodisch, d. h. der Limes einer Folge trigonometrischer Polynome mit reellen Exponenten nach der Norm*

$$\left\{\lim_{l\to\infty} \sup_x \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p dt\right\}^{1/p}$$

Die R-fp. Funktionen erscheinen bei der Untersuchung gewöhnlicher Bohrscher Funktionen, es gilt nämlich der

SATZ 3. *Wird $c_a(y) = 1$ oder 0 gesetzt, je nachdem man $y < a$ oder $y \geqslant a$ hat und ist f eine fp. Funktion von Bohr mit Exponenten aus Λ, so ist die Funktion $c_a(f(t))$ für jedes a bis auf eine höchstens abzählbare Menge R-fastperiodisch mit Exponenten aus Λ.*

Satz 3 erhält man am leichtesten durch einen Umweg über das Kompaktum K_Λ.

Es ist beinahe evident, daß die Grenzfunktion f einer gleichmäßig auf D konvergenten Folge $\{f_n\}$ von R-fp. Funktionen selbst R-fp. ist. Darüber hinaus gilt aber

SATZ 4. *Konvergiert die Folge $\{f_n\}$ auf D gleichmäßig und sind die Funktionen f_n mit R-fp. Funktionen B-äquivalent, so ist es die Limesfunktion auch.*

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Measure algebras on locally compact groups: a case history in functional analysis

by

E. HEWITT (Seattle, Wash.)

The study of function algebras as such and of abstractions arising therefrom appeared only at a comparatively late period in the development of functional analysis. The fundamental work of Hilbert, F. Riesz, Hahn, and others had already produced the famous examples of normed linear spaces that every student is familiar with today; Banach had axiomatized the theory of these spaces into the very important class of spaces that bear his name; Banach and other workers had established the fundamental facts of the theory of Banach spaces and applied them to many important problems in analysis: all of this before anyone apparently thought of studying *algebras* that are also topological structures.

Algebras that are Banach spaces and in which $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ are called Banach algebras [*нормированные кольца* in Soviet terminology]. The general theory of these algebras is the creation of I. M. Gel'fand, who in his famous 1941 memoir [3] defined Banach algebras, established their basic properties, and pointed the way for the future development of the subject. His axiomatic development was anticipated by several writers. In 1936, Nagumo [18] and Yosida [31] gave independently the definition of a Banach algebra. Yosida used it to prove that a locally compact multiplicative subgroup of a Banach algebra is a Lie group. In 1938, Mazur [17] defined real normed algebras and proved that a real normed division algebra is the real number field, the complex number field, or the quaternions.

As is so frequently the case, the general theory of Banach algebras was preceded by the analysis of a number of special examples of Banach algebras. The first study of an infinite-dimensional algebra with an accompanying topological structure seems to have been v. Neumann's work [19] on rings of bounded linear operators in Hilbert spaces. In the years since v. Neumann's work, this theory has grown into a vast and complicated field. It is not subsumed under the ordinary theory of Banach algebras [desirable though this would be], however, and we shall not consider it here.