STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Некоторые применения пространств с отрицательной нормой

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ (Киев)

Пространства с отрицательной нормой типа введенных П. Лаксом весьма удобны при исследовании ряда вопросов, связанных с дифференциальными уравнениями. В докладе рассматриваются некоторые применения таких пространств к краевым задачам и к спектральной теории.

Мы используем следующую общую схему: пусть H_0 — полное гильбертово пространсто (пространство с нулевой нормой), $(f, g)_0$ — скалярное произведение в нем. Обозначим через H_+ некоторое плотное линейное множество в H_0, являющееся полным гильбертовым пространством относительно нового скалярного произведения $(u, v)_+$, причем $\|u\|_0 \leqslant \|u\|_+$ $(u \in H_+)$. Всякий линейный непрерывный функционал $l(u)$ над H_+ может быть реализован в виде $l(u) = (a, u)_0$, где a — элемент некоторого гильбертова пространства H_- — пространства с отрицательной нормой, изометричного H_+. Элементы из H_- можно рассматривать как „обобщенные векторы конечного порядка над основными векторами из H_+".

Рассматриваются следующие применения:

1. *Исследуется краевая задача $\mathcal{L}[u] = f$, где $\mathcal{L}$ — линейное дифференциальное выражение; u удовлетворяет некоторым однородным граничным условиям.* Если справедливо энергетическое неравенство $\|\mathcal{L}[u]\|_{L_2} \geqslant C\|u\|_+$ с некоторой положительной нормой относительно нулевого пространства $H_0 = L_2$ и аналогичное неравенство для сопряженной задачи, то рассматриваемая задача имеет слабое из L_2 решение при любой $f \in H_-$ и гладкое решение единственно. Дается некоторая методика получения энергетических неравенств. Она применяется к следующим классам задач:

а) Краевые задачи для уравнений смешанного типа в плоскости (x_1, x_2), причем $\mathcal{L}$ при $x_2 > 0$ — произвольное эллиптическое выражение второго порядка, которое при $x_2 < 0$ непрерывно переходит в выражение Чаплыгина.

б) Краевые задачи для уравнений вида $du/dt - Au = f$, где $u(t)$ — вектор-функция со значениями в гильбертовом пространстве, а A — самосопряженный, вообще говоря, неэллиптический оператор.

в) Краевые задачи типа Дирихле для уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В частности, задача типа Дирихле для уравнения колебания струны.

2. *Построение разложений по обобщенным собственным векторам самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве* H_0. Доказывается, что при одном дополнительном ограничении на H_+ у такого оператора существует полная система обобщенных собственных векторов из H_-. Более детально исследуются следующие вопросы:

а) Изучается характер разложений для дифференциальных операторов в конечной и бесконечной областях. Исследуется поведение на ∞ собственных функций.

б) Изучаются вопросы, связанные с обобщением n-мерной теоремы Бохнера о положительно определенных функциях на случай разложений по собственным функциям дифференциальных операторов.

3. *Исследование спектральных свойств некоторых классов несамосопряженных операторов.* Предварительно доказывается, что аналитическая функция в верхней полуплоскости с максимум степенным ростом при приближении к вещественной оси имеет предельные значения на этой оси, являющиеся обобщенными функциями из некоторого H_-. Этот результат применяется к построению спектральных разложений вообще говоря неограниченного оператора в гильбертовом пространстве, имеющего чисто вещественный спектр и резольвента которого вблизи вещественной оси удовлетворяет оценке $\|\mathrm{re}\, z\| \leqslant C/|\mathrm{im}\, z|^k$ $(k \geqslant 0)$.

icm©

STUDIA MATHEMATICA, SERIA SPECJALNA, Z. I. (1963)

Approximative dimension of linear topological spaces and some of its applications

(Summary of a report)

by

C. BESSAGA, A. PEŁCZYŃSKI and S. ROLEWICZ (Warszawa)

Certain classes of linear topological spaces introduced by French mathematicians seem to be more similar to finite dimensional spaces than the Banach spaces are. As a measure of this similarity one may consider the so-called *approximative dimension*.

I. Let X be a linear space. A and B — two subsets of X. Put

$$M(A, B, \varepsilon) = \sup\{n\colon \text{there exist } x_1, \ldots, x_n \in A \text{ such that } x_i - x_k \in B \text{ for } i \neq k\},$$

$$M(A, B) = \{\varphi\colon \lim_{\varepsilon\to 0} |\varphi(\varepsilon)| = \infty;\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon)/M(A, B, \varepsilon) = 0\},$$

where $\varphi(\varepsilon)$ are real functions defined for $\varepsilon > 0$. The quantity $M(A, B, \varepsilon)$ is called *ε-capacity* of the set A with respect to B.

Consider X with a fixed locally convex topology σ: $X = \langle X, \sigma\rangle$. Let $\mathcal{O}$ be the class of all convex centrally symmetric neighbourhoods of zero, $\mathcal{T}$ — the class of all convex bounded sets with the centre of symmetry in zero.

Definition. The family of functions

$$M(X) = \bigcup_{U\in\mathcal{O}} \bigcap_{V\in\mathcal{O}} M(V, U)$$

is called *approximative dimension* (a. d.) of the space X (see Kolmogorov [7]).

It is easy to verify that the a. d. of n-dimensional spaces is equal to $\{\varphi\colon \lim_{\varepsilon\to 0} |\varphi(\varepsilon)| = \infty, \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon)\cdot\varepsilon^n = 0\}$; the a. d. of the infinite dimensional Banach spaces is trivial, i. e. it consists of all functions φ for which $\lim_{\varepsilon\to 0} |\varphi(\varepsilon)| = \infty$.

The approximative dimension is an isomorphical invariant: moreover if Y is isomorphic to a subspace of X then $M(Y) \subset M(X)$.