We introduce the new sequence of operators,

$$B_n(f;t) = B_n^*(f;t) - \varepsilon_n(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,d\tau,$$

for which all the conditions of our theorems are satisfied. Thus putting B_n^* in place of B_n, an additional term

$$\frac{1}{2\pi}\|\varepsilon_n(t)\|\int_{-\pi}^{\pi}|f(\tau)|\,d\tau, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2\pi}|\varepsilon_n(t)|\int_{-\pi}^{\pi}|f(\tau)|\,d\tau$$

will occur in estimates (2.6), resp. (5.2) and (5.3).

References

[1] G. Freud, *Sui procedimenti lineari d'approssimazione*, Rend. dell'Acad. Naz. d. Lincei VIII, 26 (1959), p. 641-643.

[2] — *Über positive Zygmundsche Approximationsfolgen*, Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Ac. of Sci. 6, A (1961), p. 71-75.

[3] П. П. Коровкин, *Линейные операторы и теория приближения*, Москва 1959.

[4] W. Rogosinski, *Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen*, Math. Ann. 95 (1925), p. 110-134.

[5] С. Б. Стечкин, *О приближении периодических функций суммами Фейера*, Труды Мат. Инст. им. Стеклова 62, p. 48-60.

[6] Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris 1919.

Reçu par la Rédaction le 22. 9. 1962

STUDIA MATHEMATICA, T. XXIII. (1963)

Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen

von

L. LEINDLER (Szeged)

In dieser Note beweisen wir solche Sätze, welche sich aus der auf die beste Annäherungsgrad von $f(x)$ bezüglichen Bedingung, bzw. aus dem Stetigkeitsverhältnis von $f(x)$ ergeben und sich auf die Konvergenz der Orthogonalreihen beziehen.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein bezüglich der Verteilung $d\mu(x)$(1) im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Bezeichne E_n die im Raum L_μ^2 beste Annäherungsgrad von $f(x)$ mit Linearformen

$$\sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k(x),$$

dann ist nach einem bekannten Satz von Gram [2] (s. z. Alexits [1], S. 14)

$$E_n = \Big\{\int_a^b \Big(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big)^2 d\mu(x)\Big\}^{1/2}$$

mit

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,d\mu(x).$$

Sei $\Phi(x)$ eine für $x \geqslant 0$ definierte, positive, monoton wachsende Funktion. Bezeichne $R_\Phi^{(\mu)}(\{\varphi_n(x)\})$ die Klasse aller Funktionen $f(x) \in L_\mu^2$, für welche $E_n^2 = O\big(1/\Phi(n)\big)$.

Wir werden zuerst den folgenden Satz beweisen:

Satz I. *Ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_k}{k} < \infty, \tag{1}$$

(1) Derivierte $\mu'(x)$ verschwindet höchstens auf einer Nullmenge.

so konvergiert die Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

bei jeder Anordnung ihrer Glieder in (a, b) *fast überall.*

Aus dem Satz I ergibt sich unmittelbar die folgende

Folgerung I. *Genügt* $\Phi(x)$ *der Bedingung*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\Phi(x)}}\,dx < \infty \tag{3}$$

und $f(x) \in R_{\Phi}^{(\mu)}(\{\varphi_n(x)\})$, *dann folgt die Konvergenz in* (a, b) *fast überall der Entwicklung* (2) *bei jeder Anordnung ihrer Glieder.*

Mit der Anwendung bekannter Sätze ergeben sich aus der Folgerung I folgendes:

Satz II. *Ist* $\{p_n(x)\}$ *ein beliebiges, zur Verteilung* $d\mu(x)$ *gehörendes Orthonormalpolynomsystem und* $f(x)$ *eine stetige Funktion mit dem Stetigkeitsmodul*

$$\omega(f, \delta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right), \tag{4}$$

so folgt aus der Bedingung (3) *die Konvergenz in* (a, b) *fast überall der Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n p_n(x) \qquad \left(\gamma_n = \int_a^b f(x) p_n(x)\,d\mu(x)\right) \tag{5}$$

bei jeder Anordnung ihrer Glieder.

Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von Uljanov [5] (2).

Satz III. *Sei* $f(x)$ *eine* 2π*-periodische, stetige Funktion. Gelten die Bedingungen* (3) *und* (4), *dann folgt die Konvergenz in* $(-\pi, \pi)$ *fast überall der Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\left(a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)$$

bei jeder Anordnung ihrer Glieder.

---

(2) Der Satz lautet folgenderweise: *Ist*

$$\omega(f, \delta) = O\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\delta}\left(\log\log\frac{1}{\delta}\right)^{1+\varepsilon}}\right), \qquad \delta \to +0,$$

dann konvergiert die Reihe (5) *bei jeder Anordnung ihrer Glieder.*

Beweis von Satz I. Zuerst beweisen wir, daß jede Orthogonalreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{6}$$

bei jeder Anordnung ihrer Glieder unter der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 \log^2 k} < \infty, \tag{7}$$

wobei $\{\nu_n\}$ eine wachsende Indexfolge mit $\log \nu_{n+1} = O(\log \nu_n)$ ist, in (a, b) fast überall konvergiert. Im Spezialfall $\nu_n = 2^{2^n}$ und $\mu(x) = x$ hat Tandori [4] dieses schon früher bewiesen. Unser Beweis verläuft analog zu seinem, aber werden wir der Vollständigkeit halber den Beweis kurz anführen.

Bezeichne m_k jenen Index, welcher bei einer vorgegebener Umordnung der Reihe (6) dem Index k entspricht. Wir haben zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{m_k} \varphi_{m_k}(x) \tag{8}$$

unter der Bedingung (7) fast überall konvergiert. Bezeichne $m_i^{(n)}$ die in die Anordnung der Folge $\{m_k\}$ gestellten Indizes m_k, für welche $\nu_n < m_k \leqslant \nu_{n+1}$ besteht. Offenbar ist $i = 1, 2, \ldots, \nu_{n+1} - \nu_n$. Nach dem bekannten Lemma von Rademacher-Menchoff (s. z. B. [1], S. 75) gibt es dann eine Funktion $\delta_n(x) \geqslant 0$ derart, daß für jede j $(j = 1, 2, \ldots, \nu_{n+1} - \nu_n)$

$$\left|\sum_{i=1}^{i} c_{m_i^{(n)}} \varphi_{m_i^{(n)}}(x)\right| \leqslant \delta_n(x)$$

und

$$\int_a^b \delta_n^2(x)\,d\mu(x) = O\left(\log^2(\nu_{n+1} - \nu_n)\right) \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 = O(1) \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 \log^2 k$$

sind. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich auf Grund von (7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \delta_n(x)\,d\mu(x) = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b \delta_n^2(x)\,d\mu(x)} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 \log^2 k} < \infty,$$

womit wir nach dem Satz von B. Levi die Konvergenz fast überall der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(x)$ bewiesen haben. Um die Konvergenz der Reihe (8) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für jede p und q mit $p \to \infty$

$$\sum_{k=p}^{p+q} c_{m_k} \varphi_{m_k}(x)$$

fast überall gegen Null strebt. Wählen wir daher den Index p so groß, daß $m_k \geqslant \nu_N$ für alle Indizes $k > p$ seien, wobei N eine beliebig große vorgegebene ganze Zahl ist, so folgt auf Grund der Obigen

$$\Big|\sum_{k=p}^{p+q} c_{m_k}\varphi_{m_k}(x)\Big| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \delta_n(x) = o_x(1)$$

in (a, b) fast überall. Damit haben wir die erste Behauptung bewiesen.

Wir behaupten, daß die Beziehung (7) im Falle $\log\nu_{n+1} \geqslant q\log\nu_n$ $(q > 1)$ aus der Bedingung (1) folgt. Mit einfacher Rechnung ergibt sich für jede N

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2\log^2 k} = O(1)\sum_{n=1}^{N}\log\nu_n \sqrt{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2} =$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{N}\log\nu_n E_{\nu_n} = O(1)\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=\nu_n}^{\nu_{n+1}}\frac{1}{k}\Big)E_{\nu_{n+1}} =$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}\frac{E_k}{k}\Big) = O(1)\sum_{k=1}^{\nu_{N+1}}\frac{E_k}{k}$$

und folglich die Beziehung (7) besteht.

Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

Beweis von Folgerung I. Nach den Bedingungen gilt für jede N

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{E_n}{n} = K\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n\sqrt{\Phi(n)}},$$

wobei K eine positive Konstante ist. Daraus und aus der Bedingung (3) folgt das Erfülltsein der Bedingung (1) für jede $f(x)\in R_{\Phi}^{(\mu)}(\{\varphi_n(x)\})$, so ergibt sich die Behauptung von Folgerung I durch Anwendung des Satzes I.

Beweis von Satz II. Zum Beweis benötigen wir den folgenden bekannten Satz von Jackson [3] (s. noch z. B. [1], S. 268):

Sei $\{p_n(x)\}$ das zur beliebigen Verteilung $d\mu(x)$ gehörende Orthonormalpolynomsystem und $g(x)$ eine in (a, b) stetige Funktion mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(g, \delta)$. Es gibt eine Folge $\{s_n(g, x)\}$ von Linearformen

$$s_n(g, x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}p_k(x),$$

für welche

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x) - s_n(g, x)| = O\Big(\omega\Big(g, \frac{1}{n}\Big)\Big)$$

gilt.

Nach diesem Satz ist die Beziehung

$$E_n^2 = O\Big(\omega^2\Big(g, \frac{1}{n}\Big)\Big)$$

offenbar. Daraus und aus der Bedingung (4) folgt, daß $f(x)\in R_{\Phi}^{(\mu)}(\{p_n(x)\})$ ist. Wir können die Folgerung I verwenden, woraus die Behauptung des Satzes II folgt.

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

Beweis von Satz III. Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zu dem des Satzes II, nur soll man jetzt den folgenden Satz von Jackson [3] (s. noch z. B. [1], S. 266) benützen:

Ist $f(x)$ eine 2π-periodische, stetige Funktion mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(f, \delta)$, so gibt es ein trigonometrisches Polynom $T_n(x)$ höchstens n-ter Ordnung mit der Approximationseigenschaft

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x) - T_n(x)| = O\Big(\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Literaturnachweis

[1] G. Alexits, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*, Budapest 1960.

[2] J. P. Gram, *Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate*, Journal f. reine u. angew. Math. 94 (1883), S. 41-73.

[3] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Dissertation, Göttingen 1911.

[4] K. Tandori, *Sur la convergence inconditionnelle des séries orthogonales*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 253 (1961), S. 928-929.

[5] П. Л. Ульянов, *О безусловной сходимости почти всюду*, Мат. сборник 40 (1956), S. 95-100.

Reçu par la Rédaction le 16. 10. 1962