As in the classical case, we try to find a solution of the form

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

where the powers are defined by the operational calculus. This substitution leads to a system of equations

$$a_n a_m - a_m a_n = 0,$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n a_{n+1}}{a_n a_m} - a_k a_{n-k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

The properties of this system depend upon the spectral properties of $a_n$ as an element of $B$ and these in their turn determine the spectral properties of the commutator

$$T(a) = a_n x - nx_n.$$

If the spectrum of $T(a)$ does not contain any integer $\neq 0$, then we can take $a_0 = e$ and determine the $a_n$'s successively from (6). The resulting series converges for $0 < \|z\| < e$ and satisfies the differential equation. This case arises if the spectrum of $\sigma_l$ does not contain any two numbers which differ by an integer.

If the spectrum of $T(a)$ does contain integers, but these are poles of the resolvent of $T(a)$, then a modification of the classical method of Frobenius leads to the desired result. If $N$ is the sum of the orders of the poles of the resolvent at the positive integers, then the solution is a polynomial in $\log z$ of degree $N$ where each power of $\log z$ is multiplied by a power series of type (5). The analysis breaks down if singularities of more general nature are allowed.

For the case of an irregular singular point, the reduction of G. D. Birkhoff using Laplace transforms offers a possible mode of approach.

Characterizations of reflexive Banach spaces

by

R. C. James (Claremont, Calif.)

A Banach space $B$ is isometric with a subspace of its second conjugate space under the "natural mapping" for which the element of $B^{**}$ which corresponds to the element $x_n$ of $B$ is the linear functional $E_n$ defined by $E_n(f) = f(x_n)$ for each $f$ of $B^*$. If every $F$ of $B^{**}$ is of this form, then $B$ is said to be reflexive and $B$ is isomorphic with $B^{**}$ under this natural mapping. It is known that for a Banach space $B$ each of the following conditions is equivalent to reflexivity:

(i) the unit sphere of $B$ is weakly compact (Ribe, Ein and Simulian);
(ii) each decreasing sequence of bounded closed convex sets has a non-empty intersection (Simulian).

If the unit sphere is weakly compact, then each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere. Klee used (ii) to show that if each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere of any isomorph of the space, then the unit sphere is weakly compact. It was shown by the author that if each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere of a separable Banach space, then the space is reflexive. The proof used a characterization of reflexitivity which states essentially that a Banach space is reflexive if and only if its unit sphere does not contain a "large flat region", that is,

(iii) there does not exist a sequence of elements $(\epsilon_k)$ and positive numbers, $A_k, \delta_k, k$, and $\epsilon$, for which the following are true:

$$A_k (\epsilon_k) > \|\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n\| > \delta (\epsilon_k)$$

if each $\alpha_n$ is positive;

$$\|\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n\| > \delta (\epsilon_k)$$

if each $\beta_n$ is positive.

This characterization of reflexivity and an extension of the author's original proof of the theorem about sups of continuous linear functionals for separable Banach spaces has been used to prove that a Banach space is reflexive if and only if:

(iv) each continuous linear functional attains its sup on the unit sphere.
О квазиметрических свойствах

М. КАТЕТОВ (Прага)

Свойства метрического пространства, сохраняющиеся при взаимно непрерывных взаимно однозначных отображениях, являются топологическими; аналогично характеризуются "рассеянные" свойства. Представляет некоторый интерес изучение свойств, инвариантных по отношению к более узким классам отображений. Так В. А. Ефремович [2] предложил рассматривать свойства, сохраняющиеся при взаимно однозначных отображениях, удовлетворяющих (в обе стороны) условию Липшица; эти свойства он называет "по租车 топологическим". В настоящем сообщении рассматриваются именно эти свойства (однако, в ней связях, чем было намечено у В. А. Ефремовича); мы предложили термин "квазиметрические" ввиду большей близости этих свойств с чисто метрическими понятиями.

В сообщении даются элементарные основы теории некоторых квазиметрических свойств и понятий, а также ставится ряд проблем, разработан которых предоставляется желательным. Доказательства почти всюду полностью опускаются.

К сожалению, автор только при подготовке опечаточного текста ознакомился с работами [4], [7], в которых уже получены многие результаты, приведенные в сообщении; они все же включены в текст для полноты изложения.

1.

1.1. Мы употребляем, в основном, терминологию Н. Бурбаки; понятие отображения будем называть "квазиметрией", расстояние (на множестве) — метрикой. Буквы α, β обозначают числа > 0. Множество K, снабженное метрикой d, обозначается (K, d); символы (S, d), (T, τ) обозначают метрические пространства. Функцией мы будем называть отображение, принимающее вещественные значения.

1.2. Пусть P — множество. Тогда Мα(P) и, соответственно, Мα(P) обозначает множество всех квазиметрий на P; Мα(P) рас-