STUDIA MATHEMATICA, T. XXIII. (1964)

Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits

par

J. KISYŃSKI (Warszawa)

0. Introduction

0.1. Opérateur de Green. Soit X un espace de Banach. Pour chaque $t \epsilon \langle 0, T\rangle$ nous supposons donné un opérateur linéaire, non nécessairement borné, dont le domaine $\mathscr{D}(A(t))$ et l'ensemble de valeurs $\mathscr{R}(A(t))$ sont contenus dans X, $\mathscr{D}(A(t))$ étant dense dans X. Nous considérons le problème de Cauchy abstrait

$$\text{(i)} \qquad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad \text{pour} \quad t \epsilon \langle 0, T\rangle, \ x(0) = x_0,$$

où $x_0 \epsilon X$ est donné et la fonction $t \to x(t)$, à valeurs dans X, est inconnue.

Nous appellerons *opérateur de Green du problème* (i) une famille $G(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, d'opérateurs linéaires bornés de l'espace X en lui-même, telle que:

(ii) $G(s, s) = 1$ pour tout $s \epsilon \langle 0, T\rangle$;

(iii) $G(t, s)G(s, r) = G(t, r)$ pour $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant T$;

(iv) pour tout $x \epsilon X$ la fonction $t, s \to G(t, s)x$, à valeurs dans X, est continue au sens de la norme dans X sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$;

(v) $G(t, s)\mathscr{D}(A(s)) \subset \mathscr{D}(A(t))$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et pour tout $s \epsilon \langle 0, T)$ et tout $x \epsilon \mathscr{D}(A(s))$ la fonction $t \to G(t, s)x$ est continûment différentiable au sens de la norme dans X sur l'intervalle $\langle s, T\rangle$ et satisfait dans cet intervalle à l'équation

$$\frac{d}{dt} G(t, s)x = A(t)G(t, s)x.$$

Dans ce travail nous nous occuperons surtout de l'existence de l'opérateur de Green et de l'unicité des solutions du problème (i). L'unicité de l'opérateur de Green sera une conséquence immédiate de l'unicité des solutions du problème (i).

Remarquons que l'on peut traiter l'opérateur de Green dans un sens plus large, en formulant une condition analogue à (v) sous une forme moins restrictive (par exemple, sous forme distributionnelle, cf. [7], p. 57). Dans ce travail nous étudierons uniquement le cas où (v) est vérifiée.

Nous prenons pour point de départ le théorème de Hille-Yosida dans la théorie des semi-groupes et la méthode approximative de Yosida.

0.2. Semi-groupes à un paramètre d'opérateurs linéaires. On appelle *semi-groupe* (resp. *groupe*) *fortement continu d'opérateurs* dans l'espace de Banach X une famille $S(t)$, $t \in \langle 0, +\infty)$ (resp. $t \in (-\infty, +\infty)$), d'opérateurs linéaires bornés de l'espace X en lui-même, telle que l'ensemble des conditions suivantes est vérifié:

(vi) $S(0) = 1$;

(vii) $S(t_1)S(t_2) = S(t_1+t_2)$ pour $t_i \in \langle 0, +\infty)$ (resp. $t_i \in (-\infty, +\infty)$), $i = 1, 2$;

(viii) pour tout $x \in X$ la fonction $t \to S(t)x$ est continue au sens de la norme dans X sur l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ (resp. $(-\infty, +\infty)$).

On appelle *opérateur générateur* d'un semi-groupe (resp. groupe) $S(t)$ un opérateur A défini par les conditions:

$$\mathscr{D}(A) = \left\{x: x \in X,\ \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(S(t)x - x\big) \text{ existe au sens de la norme dans } X\right\},$$

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(S(t)x - x\big) \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{D}(A).$$

Si $S(t)$ est un semi-groupe dont l'opérateur générateur est A, alors $G(t, s) = S(t-s)$ est l'opérateur de Green du problème de Cauchy abstrait (i) avec $A(t) = \text{const} = A$.

Si A est l'opérateur générateur d'un semi-groupe fortement continu $S(t)$, si $x \in X$ et si $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(S(t)x - x\big)$ existe au sens faible, alors $x \in \mathscr{D}(A)$.

0.3. Théorème de Hille-Yosida. Soit X un espace de Banach muni de la norme $\| \|$. Pour tout semi-groupe (resp. groupe) fortement continu $S(t)$ d'opérateurs dans X il existe des constantes λ_0 et M telles que

(ix) $\|S(t)x\| \leqslant Me^{\lambda_0|t|}\|x\|$ pour $x \in X$ et $t \in \langle 0, +\infty)$ (respectivement $t \in (-\infty, +\infty)$).

THÉORÈME DE HILLE-YOSIDA ([1], th. 12.2.1, p. 238; [12]). *Pour que A soit l'opérateur générateur d'un semi-groupe (resp. groupe) fortement continu $S(t)$ d'opérateurs dans l'espace X satisfaisant à la condition* (ix) *avec $M = 1$, il faut et il suffit que soit vérifié l'ensemble des conditions suivantes*:

(x) *$\mathscr{D}(A)$ est un ensemble dense dans X*;

(xi) *$\mathscr{R}(\lambda - \varepsilon A) = X$ pour tout $\lambda > \lambda_0$ et $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = \pm 1$)*;

(xii) *$\|\lambda x - \varepsilon Ax\| \geqslant (\lambda - \lambda_0)\|x\|$ pour $x \in \mathscr{D}(A)$, $\lambda > \lambda_0$ et $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = \pm 1$).*

Si les conditions (x)-(xii) *sont vérifiées, il existe exactement un semi-groupe (resp. groupe) fortement continu dont l'opérateur générateur est A.*

Nous désignerons par $\exp(tA)$ un semi-groupe (resp. groupe) dont l'opérateur générateur est A.

Remarque. Feller [3], Miyadera [9] et Phillips [10] ont généralisé le théorème de Hille-Yosida de la manière suivante:

THÉORÈME. *Pour que A soit l'opérateur générateur d'un semi-groupe (resp. groupe) fortement continu $S(t)$ d'opérateurs dans l'espace X, satisfaisant à la condition* (ix), *il faut et il suffit qu'on ait* (x) *et que en même temps*

(xiii) *pour tout $\lambda > \lambda_0$ et $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = \pm 1$) l'opérateur $(\lambda - \varepsilon A)^{-1}$ existe et soit un opérateur borné de l'espace X en lui-même tel que $\|(\lambda - \varepsilon A)^{-m}x\| \leqslant (\lambda - \lambda_0)^{-m}M\|x\|$ pour tout $x \in X$ et $m = 1, 2, \ldots$*

Si les conditions (x) *et* (xiii) *sont vérifiées, il existe exactement un semi-groupe (resp. groupe) fortement continu dont l'opérateur générateur est A.*

La démonstration due à W. Feller dans le cas d'un semi-groupe consiste essentiellement à ramener ce théorème à celui de Hille-Yosida par un changement de la norme dans l'espace X et elle montre que sous les hypothèses (x) et (xiii), dans le cas d'un semi-groupe, on a

(xiv) $\sup\{e^{-\lambda_0 t}\|S(t)x\| : t \geqslant 0\} = \sup\{(\lambda - \lambda_0)^m\|(\lambda - A)^{-m}x\| : \lambda > \lambda_0,\ m = 0, 1, \ldots\}$ pour tout $x \in X$.

Nous allons montrer que le raisonnement dû à W. Feller peut aussi être appliqué dans le cas d'un groupe et que dans ce cas, sous les hypothèses (x) et (xiii), on a

(xv) $\sup\{e^{-\lambda_0|t|}\|S(t)x\| : -\infty < t < +\infty\} = \sup\{(\lambda - \lambda_0)^{m+k}\|(\lambda - A)^{-m} \times (\lambda + A)^{-k}x\| : \lambda > \lambda_0;\ m, k = 0, 1, \ldots\}$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. L'ensemble des conditions (x) et (xiii) est suffisant. En effet, posons

$$\|x\|^* = \sup\{\|x\|_\mu : \mu > \lambda_0\},$$

où $\|x\|_\mu = \sup\{(\mu - \lambda_0)^m\|(\mu - A)^{-m}x\| : m = 0, 1, \ldots\}$ (respectivement $\|x\|_\mu = \sup\{(\mu - \lambda_0)^{k+m}\|(\mu - A)^{-m}(\mu + A)^{-k}x\| : k, m = 0, 1, \ldots\}$). Alors

(xvi) $\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant M\|x\|$ pour $x \in X$.

Pour $\lambda_0 < \lambda_i < \mu$, $\varepsilon_i = 1$ (resp. $\varepsilon_i = \pm 1$), $i = 1, \ldots, m$, on a

$$(\lambda_i - \varepsilon_i A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda_i)^n (\mu - \varepsilon_i A)^{-n-1},$$

d'où

$$\Big(\prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda_0)\Big) \Big\| \Big(\prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \varepsilon_i A)^{-1}\Big) x \Big\|$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{m} \Big((\lambda_i - \lambda_0) \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda_i)^n \|(\mu - \varepsilon_i A)^{-n-1} x\|\Big)$$

$$\leqslant \|x\|_\mu \prod_{i=1}^{m} \Big((\lambda_i - \lambda_0) \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda_i)^n (\mu - \lambda_0)^{-n-1}\Big) = \|x\|_\mu .$$

Par conséquent pour tout $x \in X$ la fonction $\mu \to \|x\|_\mu$ est non décroissante et pour $\lambda_0 < \lambda \leqslant \mu' < \mu''$ et $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = \pm 1$) on a $(\lambda - \lambda_0)\|(\lambda - \varepsilon A)^{-1} x\|_{\mu'} \leqslant \|x\|_{\mu''}$, d'où en passant à la limite pour $\mu', \mu'' \to +\infty$,

(xvii) $\|(\lambda - \varepsilon A)^{-1} x\|^* \leqslant (\lambda - \lambda_0)^{-1} \|x\|^*$ pour $x \in X$, $\lambda > \lambda_0$ et $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = \pm 1$).

D'après (x), (xvi) et (xvii), en vertu du théorème de Hille-Yosida, A est l'opérateur générateur d'un semi-groupe (resp. groupe) $S(t)$ tel que

(xviii) $\|S(t)x\|^* \leqslant e^{\lambda_0 |t|} \|x\|^*$ pour $x \in X$ et $t \in \langle 0, +\infty)$ (resp. $t \in (-\infty, +\infty)$),

d'où, avec (xvi), résulte (ix).

Les conditions (x) et (xiii) sont nécessaires. En effet, posons $\|x\|^0 = \sup e^{-\lambda_0 |t|} \|S(t)x\|$. Alors d'après (ix) on a

(xix) $\|x\| \leqslant \|x\|^0 \leqslant M \|x\|$ pour $x \in X$

et on vérifie aisément que

(xx) $\|S(t)x\|^0 \leqslant e^{\lambda_0 |t|} \|x\|^0$ pour $x \in X$ et $t \in \langle 0, +\infty)$ (resp. $t \in (-\infty, +\infty)$).

D'après (xix) et (xx), en vertu du théorème de Hille-Yosida, la condition (x) est donc vérifiée et pour tout $\lambda > \lambda_0$ et $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = \pm 1$) $(\lambda - \varepsilon A)^{-1}$ est opérateur borné de X en lui-même avec

(xxi) $\|(\lambda - \varepsilon A)^{-1} x\|^0 \leqslant (\lambda - \lambda_0)^{-1} \|x\|^0$ pour $x \in X$,

ce qui, avec (xix), entraîne (xiii).

Il reste à prouver (xiv) et (xv). Dans les notations de cette démonstration chacune de ces égalités équivaut à $\|x\|^* = \|x\|^0$. Comme $\|x\| \leqslant \|x\|^*$ et $\|x\| \leqslant \|x\|^0$ d'accord avec (xvi) et (xix), donc $\|x\|^0 \leqslant \|x\|^{*0}$ et $\|x\|^* \leqslant \|x\|^{0*}$. D'autre part, d'après (xviii) et (xxi), on a $\|x\|^{*0} = \|x\|^*$ et $\|x\|^{0*} = \|x\|^0$. Par conséquent $\|x\|^* = \|x\|^0$ et la démonstration est achevée.

Le fait que, pour tout semi-groupe (resp. groupe) fortement continu d'opérateurs dans un espace de Banach X, il existe dans X une norme pour laquelle la condition (ix) est vérifiée avec $M = 1$, joue dans ce travail un rôle important.

0. 4. La méthode de l'intégrale multiplicative. Dans le cas du problème (i) avec $A(t)$ variable il est naturel d'admettre que

1° pour tout $t \in \langle 0, T\rangle$ fixé $A(t)$ est l'opérateur générateur d'un semi-groupe d'opérateurs dans l'espace X,

2° certaines conditions concernant la régularité de la fonction à valeurs opérationnelles $t \to A(t)$ sont vérifiées.

Moyennant des hypothèses de ce type l'existence de l'opérateur de Green a été établie pour la première fois par Kato [4]; il l'a obtenu sous forme d'une intégrale multiplicative uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, c'est-à-dire sous la forme

$$G(t, s)x = \lim_{k \to \infty} G_k(t, s)x,$$

où pour tout $x \in X$ fixé la convergence au sens de la norme dans X est uniforme sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $G_k(t, s)$, $k = 1, 2, \ldots$, sont définis par les conditions

$$0 = t_{k,0} < t_{k,1} < \ldots < t_{k,i(k)} = T,$$

$$\lim_{k \to \infty} \max_{i=1,\ldots,i(k)} (t_{k,i} - t_{k,i-1}) = 0,$$

$$\tau_{k,i} \in \langle t_{k,i-1}, t_{k,i}\rangle$$

et

$$G_k(t, s) = \exp\big((t-s)A(\tau_{k,i})\big) \quad \text{pour} \quad t_{k,i-1} \leqslant s \leqslant t \leqslant t_{k,i},$$

$$G_k(t, s)G_k(s, r) = G_k(t, r) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Dans ce travail la méthode de l'intégrale multiplicative ne sera utilisée qu'à titre de méthode auxiliaire.

0. 5. La méthode approximative de Yosida. La méthode utilisée dans ce travail pour établir l'existence de l'opérateur de Green est essentiellement la suivante: on admet les hypothèses, du type 1°-2°, qui entraînent que les opérateurs

$$A_n(t) = A(t)\Big(1 - \frac{1}{n} A(t)\Big)^{-1}, \quad t \in \langle 0, T\rangle,\ n = 1, 2, \ldots,$$

sont bornés de X en lui-même et que pour tout $x \in X$ et $n = 1, 2, \ldots$ fixés la fonction $t \to A_n(t)x$ est continue au sens de la norme dans X, et alors les opérateurs de Green des problèmes

(n) $$\frac{dx(t)}{dt} = A_n(t)x(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle, \quad x(0) = x_0,$$

s'obtiennent par la méthode usuelle des itérations successives. L'opérateur de Green du problème (i) s'obtient comme la limite pour $n \to \infty$ des opérateurs de Green des problèmes (n).

K. Yosida a utilisé cette méthode dans sa démonstration [12] du théorème de Hille-Yosida et dans les travaux [13], [14] et [15] (cf. aussi [8]). La démonstration de Yosida du théorème de Hille-Yosida fournit en même temps celle du théorème suivant, qui joue dans nos considérations un rôle important:

THÉORÈME APPROXIMATIF DE YOSIDA. *Soit A l'opérateur générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs dans l'espace X, satisfaisant à la condition*

$$\|\exp(tA)x\| \leqslant \|x\| \quad \textit{pour} \quad x \in X \ \textit{et} \ t \in \langle 0, +\infty).$$

Alors

$$A_n = A\left(1-\frac{1}{n}A\right)^{-1} = n^2(n-A)^{-1}-n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

sont des opérateurs bornés de l'espace X en lui-même et on a

$$\|\exp(tA_n)x\| \leqslant \|x\| \quad \textit{pour} \quad x \in X,\ t \in \langle 0, +\infty) \ \textit{et} \ n = 1, 2, \ldots,$$

ainsi que

$$\exp(tA)x = \lim_{n\to\infty} \exp(tA_n)x$$

pour tout $x \in X$, au sens de la norme dans X, presque uniformément par rapport à t sur l'intervalle $\langle 0, +\infty)$.

Sommaire

1. Certaines classes de fonctions à valeurs opérationnelles.
2. La croissance des solutions d'équations du type $\dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$.
3. Construction de l'opérateur de Green dans le cas $\mathcal{D}(A(t)) = \text{const}$.
4. Opérateur de Green dans le cas de $\mathcal{D}(A(t))$ variable.
5. Équations du type $\dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)+f(t)$.
6. Un théorème d'interpolation.
7. Famille $A_0(t)$, $t \in \langle 0, T\rangle$, d'opérateurs autoadjoints positifs avec $\mathcal{D}(A_0^{1/2}(t)) = \text{const}$.
8. Opérateur de Green du problème du type de Schrödinger.

1. Certaines classes de fonctions à valeurs opérationnelles

Dans ce chapitre nous nous occuperons des classes de fonctions à valeurs opérationnelles qui interviendront dans la suite. Nous nous permettrons d'omettre les démonstrations qui s'obtiennent, dans la plupart des cas, en s'appuyant sur le théorème de Banach-Steinhaus.

Désignons par X_i des espaces de Banach et par E_m l'espace euclidien à m dimensions dont les points seront notés $p = (p_1, \ldots, p_m)$.

1.1. Fonctions à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ fortement (resp. faiblement) continues. Nous dirons que la fonction $p \to A(p)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ est (*uniformément*) *fortement continue* sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$, si pour tout $x \in X_1$ la fonction $p \to A(p)x$ est (uniformément) continue sur Ω au sens de la norme dans X_2. La fonction $p \to A(p)$ est (*uniformément*) *faiblement continue* sur Ω, si pour tout $x \in X_1$ et tout $x^* \in X_2^*$ la fonction $p \to x^*A(p)x$ est (uniformément) continue sur Ω.

1.1.1. Une fonction fortement continue est faiblement continue. Une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ fortement (resp. faiblement) continue sur un ensemble compact $\Omega \subset E_m$ est uniformément fortement (resp. faiblement) continue sur Ω et elle est bornée sur Ω au sens de la norme dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$.

1.1.2. Pour $i = 1, 2$ soit $p \to A_i(p)$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_i, X_{i+1})$ fortement continue sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$. Alors $p \to A_2(p)A_1(p)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_3)$ fortement continue sur Ω.

1.1.3. Pour $i = 1, 2, 3$ soit $p \to A_i(p)$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_i, X_{i+1})$ définie sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$. Soient $p \to A_1(p)$ fortement continue, $p \to A_2(p)$ faiblement continue et $p \to A_3(p)$ continue au sens de la norme dans $\mathcal{L}(X_3, X_4)$. Alors $p \to A_3(p)A_2(p)A_1(p)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_4)$ faiblement continue sur Ω.

1.2. Intégration. Dans ce § il sera question de l'intégrale de Bochner et des fonctions à valeurs opérationnelles fortement mesurables par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour les définitions et les propriétés fondamentales de ces notions voir [2], chapitre III, §§ 3.5-3.8.

1.2.1. Pour $i = 1, 2$ soit $t \to A_i(t)$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_i, X_{i+1})$ fortement mesurable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Alors $t \to A_2(t)A_1(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_3)$ fortement mesurable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$.

1.2.2. Une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ faiblement continue sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ est sur cet intervalle fortement mesurable et bornée au sens de la norme dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$.

1.2.3. Soit $t \to A(t)$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ fortement mesurable et bornée au sens de la norme dans $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et soit $t \to x(t)$ une fonction à valeurs dans X_1 intégrable au sens de Bochner sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Alors $t \to A(t)x(t)$ est une fonction à valeurs dans X_2 intégrable au sens de Bochner sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$.

1.2.4. Si $t \to A(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ fortement mesurable et bornée au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, alors pour $0 \leqslant s,\ t \leqslant T$ nous entendrons par l'intégrale $\int_s^t A(\tau)d\tau$ l'opérateur appartenant à $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ défini par l'identité

$$\Big\{\int_s^t A(\tau)\,d\tau\Big\}x = \int_s^t \{A(\tau)x\}\,d\tau \quad \text{pour tout} \quad x \in X_1,$$

l'intégrale du second membre étant entendue au sens de Bochner.

1.3. Fonctions fortement (resp. faiblement) continûment différentiables. La fonction $p \to A(p)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ est dite *(n fois) fortement continûment différentiable* sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$, si pour tout $x \in X_1$ la fonction $p \to A(p)x$ est (n fois) continûment différentiable sur Ω au sens de la norme dans X_2. La fonction $p \to A(p)$ est dite *(n fois) faiblement continûment différentiable* sur Ω, si pour tout $x \in X_1$ et tout $x^* \in X_2^*$ la fonction $p \to x^*A(p)x$ est (n fois) continûment différentiable sur Ω.

Les dérivées $\partial A(p)/\partial p_i$, $i = 1, \ldots, m$, sont définies dans le cas fort par la formule

$$\Big\{\frac{\partial A(p)}{\partial p_i}\Big\}x = \frac{\partial}{\partial p_i}\{A(p)x\} \quad \text{pour tout} \quad x \in X_1$$

et dans le cas faible par la formule

$$x^*\Big\{\frac{\partial A(p)}{\partial p_i}\Big\}x = \frac{\partial}{\partial p_i}\{x^*A(p)x\} \quad \text{pour tout} \quad x \in X_1 \text{ et tout } x^* \in X_2^*.$$

1.3.1. Soit $\Omega \subset E_m$ la fermeture d'un ouvert borné et soit $p \to A(p)$ une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ une fois faiblement continûment différentiable sur Ω. Alors $p \to A(p)$ satisfait uniformément sur Ω à une condition de Lipschitz au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$.

1.3.2. Soit $\Omega \subset E_m$ un ouvert ou la fermeture d'un ouvert. Pour $i = 1, 2$ soit $p \to A_i(p)$ une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X_i, X_{i+1})$ une fois fortement (resp. faiblement) continûment différentiable sur Ω. Alors $p \to A_2(p)A_1(p)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_3)$ une fois fortement (resp. faiblement) continûment différentiable sur Ω et pour $i = 1, \ldots, m$ et $p \in \Omega$ on a

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\big(A_2(p)A_1(p)\big) = \frac{\partial A_2(p)}{\partial p_i}A_1(p) + A_2(p)\frac{\partial A_1(p)}{\partial p_i}.$$

1.4. Fonctions dont les valeurs sont des opérateurs inverses. Soit $p \to A(p)$ une fonction définie sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$, à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$, telle que $\big(A(p)\big)^{-1} \in \mathscr{L}(X_2, X_1)$ pour tout $p \in \Omega$. Dans ces conditions:

1.4.1. Si $p \to A(p)$ est continue sur Ω au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$, alors $p \to \big(A(p)\big)^{-1}$ est une fonction continue sur Ω au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X_2, X_1)$;

1.4.2. Si Ω est un ouvert ou la fermeture d'un ouvert et si $p \to A(p)$ est une fois fortement (resp. faiblement) continûment différentiable sur Ω, alors $p \to \big(A(p)\big)^{-1}$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X_2, X_1)$ une fois fortement (resp. faiblement) continûment différentiable sur Ω et pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $p \in \Omega$ on a

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\big(A(p)\big)^{-1} = -\big(A(p)\big)^{-1}\frac{\partial A(p)}{\partial p_i}\big(A(p)\big)^{-1}.$$

1.5. Convergence forte uniforme des suites de fonctions fortement continues. Soit $p \to A_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$, définies sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$. Si, pour tout $x \in X_1$, la suite $p \to A_n(p)x$, $n = 1, 2, \ldots$, est uniformément convergente sur Ω au sens de la norme dans X_2, on dit que la suite $p \to A_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, est *uniformément fortement convergente* sur Ω. La limite de la suite $p \to A_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, est alors la fonction $p \to A(p)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$, définie par l'identité $A(p)x = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(p)x$ au sens de la norme dans X_2 pour tout $x \in X_1$ et $p \in \Omega$.

1.5.1. La limite d'une suite de fonctions fortement continues à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$, uniformément fortement convergente sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ fortement continue sur Ω.

1.5.2. Soit $p \to A_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$, bornées dans leur ensemble au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ sur l'ensemble $\Omega \subset E_m$. Si l'espace X_1 contient un sous-ensemble dense Y tel que pour tout $x \in Y$ la suite $p \to A_n(p)x$, $n = 1, 2, \ldots$, soit uniformément convergente sur Ω au sens de la norme dans X_2, alors la suite $p \to A_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, est uniformément fortement convergente sur Ω.

1.5.3. Pour $i = 1, 2$ soit $p \to A_{in}(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions fortement continues à valeurs dans $\mathscr{L}(X_i, X_{i+1})$, uniformément fortement convergente vers la fonction $p \to A_i(p)$ sur l'ensemble compact $\Omega \subset E_m$. Alors $p \to A_{2n}(p)A_{1n}(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions fortement continues à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_3)$ uniformément fortement convergente sur Ω vers la fonction $p \to A_2(p)A_1(p)$.

1.5.4. Théorème sur la dérivation terme à terme. Soit $\Omega \subset E_m$ un ouvert ou la fermeture d'un ouvert. Soit encore $p \to A_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ fortement continûment différentiables sur Ω. Si la suite $p \to A_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, est uniformément fortement convergente sur Ω vers la fonction $p \to A(p)$ et si pour tout $i = 1, \ldots, m$ la suite $p \to \partial A_n(p)/\partial p_i$, $n = 1, 2, \ldots$, est uniformément fortement convergente sur Ω vers la fonction $p \to A_i'(p)$, alors $p \to A(p)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ fortement continûment différentiable sur Ω et pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $p \in \Omega$ on a $\partial A(p)/\partial p_i = A_i'(p)$.

1.6. Équations intégrales du type de Volterra.

Hypothèses 1.6.1. Soit $\mathscr{X}$ un espace de Banach, soit $t, s \to \mathscr{G}(t, s)$ une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et soit $t, s \to \mathscr{K}(t, s)$ une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ bornée au sens de la norme dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et telle que

(1.6.1.) pour tout $s \in \langle 0, T)$ fixé $t \to \mathscr{K}(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ fortement continue sur l'intervalle $\langle s, T\rangle$

et que

(1.6.2) pour tout $t \in (0, T\rangle$ fixé $s \to \mathscr{K}(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ fortement mesurable sur l'intervalle $\langle 0, t\rangle$.

THÉORÈME 1.6.2. *Sous les hypothèses* 1.6.1 *il existe exactement une fonction $t, s \to \mathscr{H}(t, s)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ satisfaisant sur ce triangle à l'équation*

$$\mathscr{H}(t, s) = \mathscr{G}(t, s) + \int_s^t \mathscr{K}(t, \tau)\mathscr{H}(\tau, s)\,d\tau, \tag{1.6.3}$$

l'intégrale étant entendue au sens de 1.2.4. *Si g et k sont des constantes telles que $\|\mathscr{G}(t, s)\| \leqslant g$ et $\|\mathscr{K}(t, s)\| \leqslant k$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, alors $\|\mathscr{H}(t, s)\| \leqslant g e^{k(t-s)}$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.*

En effet, il résulte du théorème de Lebesgue sur la convergence bornée, que si $t, s \to \mathscr{H}(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, alors il en est de même de la fonction

$$t, s \to \mathscr{G}(t, s) + \int_s^t \mathscr{K}(t, \tau)\mathscr{H}(\tau, s)\,d\tau.$$

On peut donc appliquer dans le démonstration du théorème 1.6.2 la méthode des approximations successives.

Hypothèses 1.6.3. Soit X un espace de Banach. Soit $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions fortement continues à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$, uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Soit $t, s \to K_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$, définies sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, satisfaisant à l'ensemble des conditions suivantes:

(1.6.4) les fonctions $t, s \to K_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, sont sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ bornées dans leur ensemble au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$;

(1.6.5) pour tout $s \in \langle 0, T)$ fixé $t \to K_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions fortement continues à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$, uniformément fortement convergente sur l'intervalle $\langle s, T\rangle$;

(1.6.6) pour $n = 1, 2, \ldots$ et $t \in (0, T\rangle$ quelconques fixés $s \to K_n(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ faiblement continue sur l'intervalle $\langle 0, t\rangle$.

THÉORÈME 1.6.4. *Sous les hypothèses* 1.6.3 *pour tout $n = 1, 2, \ldots$ soit $t, s \to H_n(t, s)$ une fonction fortement continue à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ satisfaisant sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ à l'équation*

$$H_n(t, s) = G_n(t, s) + \int_s^t K_n(t, \tau)H_n(\tau, s)\,d\tau. \tag{1.6.7}$$

Alors $t, s \to H_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Démonstration. Soit $\mathscr{X}$ l'espace de Banach des suites $x = \{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, d'éléments de l'espace X, telles que $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|_X = 0$, muni de la norme $\|\{x_n\}\|_{\mathscr{X}} = \sup\{\|x_n\|_X : n = 1, 2, \ldots\}$. Les conditions $\mathscr{G}(t, s)\{x_n\} = \{G_n(t, s)x_n\}$ et $\mathscr{K}(t, s)\{x_n\} = \{K_n(t, s)x_n\}$ définissent une fonction $t, s \to \mathscr{G}(t, s)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et une fonction $t, s \to \mathscr{K}(t, s)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ bornée sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ au sens de la norme dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$, telle que la condition (1.6.1) est vérifiée. Pour prouver que la condition (1.6.2) est vérifiée il suffit de remarquer que pour $t \in (0, T\rangle$ et $x = \{x_n\} \in \mathscr{X}$ quelconques fixés la fonction $s \to \mathscr{K}(t, s)x$ prend ses valeurs dans un sous-espace linéaire séparable $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ (¹) et que pour tout $u = \{u_n\} \in \mathscr{U}$ et tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{s : s \in \langle 0, t\rangle, \|\mathscr{K}(t, s)x - u\|_{\mathscr{X}} \leqslant \varepsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{s : s \in \langle 0, t\rangle, \|K_n(t, s)x_n - u_n\|_X \leqslant \varepsilon\}$ est mesurable au sens de Lebesgue.

(¹) $\mathscr{U} = \{u : u = \{u_n\} \in \mathscr{X}, u_n \in U$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, où U est sous-espace linéaire fermé minimal de l'espace X, contenant l'ensemble $\{K_n(t, s)x_n : n = 1, 2, \ldots, s \in \langle 0, t\rangle\}$. Les fonctions $s \to K_n(t, s)x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, étant faiblement continues, U est séparable. Si Z est un ensemble dénombrable dense dans U, alors $\mathscr{Z} = \{u : u = \{u_n\} \in \mathscr{U}, u_n \in Z$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, il existe un $n(u)$ tel que $u_n = u_{n(u)}$ pour $n \geqslant n(u)\}$ est un ensemble dénombrable dense dans $\mathscr{U}$.

La condition 1.6.1 est donc vérifiée et le théorème 1.6.2 assure l'existence d'une fonction $t, s \to \mathscr{H}(t, s)$ fortement continue à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ satisfaisant sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ à l'équation (1.6.3). La condition

$$\{H_n^*(t, s)x_n\} = \mathscr{H}(t, s)\{x_n\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \text{ et } x = \{x_n\} \in \mathscr{X}$$

définit une suite de fonctions $t, s \to H_n^*(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, fortement continues à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$, uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et telle que

$$H_n^*(t, s) = G_n(t, s) + \int_s^t K_n(t, \tau) H_n^*(\tau, s)\, d\tau$$

pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n = 1, 2, \ldots$

L'unicité des solutions de l'équation (1.6.7) étant, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, établie par le théorème 1.6.2, on a $H_n^*(t, s) = H_n(t, s)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n = 1, 2, \ldots$ Par conséquent $t, s \to H_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

2. La croissance des solutions d'équations du type $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\| \ \|$. Pour chaque $t \in \langle 0, T\rangle$ nous supposons donné un opérateur linéaire $A(t)$, non nécessairement borné, avec $\mathscr{D}(A(t)) \subset X$ et $\mathscr{R}(A(t)) \subset X$.

Hypothèses 2.1. Nous supposons que

(2.1) il existe une famille $\| \ \|_t$, $t \in \langle 0, T\rangle$, de normes dans l'espace X telle que $a^{-1}\|x\| \leqslant \|x\|_t \leqslant \|x\|_s \leqslant a\|x\|$, $a = \text{const} \geqslant 1$, pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $x \in X$

et que

(2.2) il existe une constante réelle λ_0 telle que $\|\lambda x - A(t)x\|_t \geqslant (\lambda - \lambda_0)\|x\|_t$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$, $x \in \mathscr{D}(A(t))$ et $\lambda > \lambda_0$.

Hypothèses 2.2. Nous supposons que

(2.3) il existe une famille $\| \ \|_t$, $t \in \langle 0, T\rangle$, de normes dans l'espace X équivalentes à la norme $\| \ \|$, telle que $\big|\|x\|_t - \|x\|_s\big| \leqslant k\|x\|_t |t - s|$, $k = \text{const}$, pour $0 \leqslant s$, $t \leqslant T$ et $x \in X$

et que

(2.4) il existe une constante $\lambda_0 \geqslant 0$ telle que $\|\lambda x - \varepsilon A(t)x\|_t \geqslant (\lambda - \lambda_0)\|x\|_t$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$, $x \in \mathscr{D}(A(t))$, $\lambda > \lambda_0$ et $\varepsilon = \pm 1$.

LEMME 2.3. *Si la condition* (2.3) *est vérifiée, alors:*

(2.5) *pour tout $x \in X$ la fonction $t \to e^{-kt}\|x\|_t$ est continue et non croissante sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$,*

(2.6) *pour tout $x \in X$ la fonction $t \to e^{kt}\|x\|_t$ est continue et non décroissante sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$,*

(2.7) *il existe une constante $a \geqslant 1$ telle que $a^{-1}\|x\| \leqslant \|x\|_t \leqslant a\|x\|$ pour $x \in X$ et $t \in \langle 0, T\rangle$.*

Démonstration. La fonction $t \to e^{-kt}\|x\|_t$ est évidemment continue et pour $0 \leqslant t < t+h \leqslant T$ on a $e^{-k(t+h)}\|x\|_{t+h} - e^{-kt}\|x\|_t \leqslant (e^{-hk} - 1)e^{-kt}\|x\|_{t+h} + hke^{-kt}\|x\|_t$, d'où $\overline{D}_+(e^{-kt}\|x\|_t) \leqslant 0$ pour tout $t \in \langle 0, T)$. Par conséquent la fonction $t \to e^{-kt}\|x\|_t$ est non croissante et (2.5) est démontrée. La démonstration de (2.6) est analogue. D'après (2.5) et (2.6) on a $e^{-kT}\|x\|_0 \leqslant \|x\|_t \leqslant e^{kT}\|x\|_0$ pour $x \in X$ et $t \in \langle 0, T\rangle$. La norme $\| \ \|_0$ étant équivalente à $\| \ \|$, il existe un $b \geqslant 1$ tel que $b^{-1}\|x\| \leqslant \|x\|_0 \leqslant b\|x\|$ pour $x \in X$. Par conséquent (2.7) est vérifiée avec $a = be^{kT}$.

THÉORÈME 2.4. *Soit $t \to x(t)$ une fonction à valeurs dans X, définie sur l'intervalle $\langle t', t''\rangle$, $0 \leqslant t' < t'' \leqslant T$, telle que $x(t) \in \mathscr{D}(A(t))$ pour presque tout $t \in \langle t', t''\rangle$, que $t \to A(t)x(t)$ est une fonction à valeurs dans X intégrable au sens de Bochner sur l'intervalle $\langle t', t''\rangle$ et que*

$$x(t) - x(s) = \int_s^t A(\tau)x(\tau)\, d\tau \quad \textit{pour} \quad t' \leqslant s,\ t \leqslant t''. \tag{2.8}$$

Alors, sous les hypothèses 2.1, *on a*

$$\|x(t)\|_t \leqslant e^{\lambda_0(t-s)}\|x(s)\|_s \quad \textit{pour} \quad t' \leqslant s \leqslant t \leqslant t'' \tag{2.9}$$

tandis que sous les hypothèses 2.2 *on a*

$$\|x(t)\|_t \leqslant e^{(\lambda_0+k)|t-s|}\|x(s)\|_s \quad \textit{pour} \quad t' \leqslant s,\ t \leqslant t''. \tag{2.10}$$

Démonstration de (2.9). Posons $\varphi(t) = e^{-\lambda_0 t}\|x(t)\|_t$. Alors (2.9) équivaut au fait que la fonction $t \to \varphi(t)$ est non croissante. D'après (2.8) on a $dx(t)/dt = A(t)x(t)$ au sens de la norme dans X pour presque tout $t \in \langle t', t''\rangle$, d'où pour $y(t) = e^{-\lambda_0 t}x(t)$ on a $dy(t)/dt = (A(t) - \lambda_0)y(t)$ au sens de la norme $\| \ \|_t$ pour presque tout $t \in \langle t', t''\rangle$; pour presque tout $t \in (t', t''\rangle$ on a donc $\|y(t-\varepsilon)\|_t = \|y(t) - \varepsilon(A(t) - \lambda_0)y(t)\|_t - o(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in (0, t - t'\rangle$. Pour tout $t \in (t', t''\rangle$ tel que cette dernière inégalité a lieu, on a, d'après (2.1) et (2.2),

$$\varphi(t-\varepsilon) = \|y(t-\varepsilon)\|_{t-\varepsilon} \geqslant \|y(t-\varepsilon)\|_t =$$
$$= \varepsilon\left\|\left(\lambda_0 + \frac{1}{\varepsilon}\right)y(t) - A(t)y(t)\right\|_t - o(\varepsilon) \geqslant$$
$$\geqslant \|y(t)\|_t - o(\varepsilon) = \varphi(t) - o(\varepsilon) \quad \text{pour} \quad \varepsilon \in (0, t - t'\rangle.$$

Par conséquent

$$\overline{D}_-\varphi(t) \leqslant 0 \quad \text{pour presque tout} \quad t \in (t', t''\rangle. \tag{2.11}$$

D'après (2.1) pour $t' \leqslant t < t+\varepsilon \leqslant t''$ on a

$$\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t) \leqslant (e^{-\lambda_0(t+\varepsilon)}-e^{-\lambda_0 t})\|x(t+\varepsilon)\|_{t+\varepsilon}+e^{-\lambda_0 t}(\|x(t+\varepsilon)\|_t-\|x(t)\|_t),$$

d'où, d'après (2.1) et (2.8), en posant $\Phi(t) = ae^{|\lambda_0|T}(|\lambda_0|M+\|A(t)x(t)\|)$, où $M = \sup\{\|x(t)\|: t' \leqslant t \leqslant t''\}$, on obtient que

(2.12) il existe une fonction $t \to \Phi(t)$ intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $\langle t', t''\rangle$, telle que $\varphi(t+\varepsilon) \leqslant \varphi(t)+\int_t^{t+\varepsilon} \Phi(\tau)d\tau$ pour $t' \leqslant t < t+\varepsilon \leqslant t''$.

Soient alors s et t fixés avec $t' \leqslant s < t \leqslant t''$. D'après (2.11), en vertu du théorème de recouvrement de Vitali, il existe pour tout $\delta > 0$ un système fini d'intervalles $\langle t_i-\varepsilon_i, t_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, tel que $s \leqslant t_1-\varepsilon_1 < t_1 \leqslant t_2-\varepsilon_2 < \ldots < t_n-\varepsilon_n \leqslant t_n \leqslant t$, $\varphi(t_i-\varepsilon_i) \geqslant \varphi(t_i)-\delta\varepsilon_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\operatorname{mes} e_\delta \leqslant \delta$, où

$$e_\delta = \langle s, t\rangle - \bigcup_{i=1}^{n} \langle t_i-\varepsilon_i, t_i\rangle.$$

D'après (2.12) on a alors

$$\varphi(t)-\varphi(s) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\big(\varphi(t_i)-\varphi(t_i-\varepsilon_i)\big)+\int_{e_\delta}\Phi(\tau)d\tau \leqslant (t-s)\delta+\int_{e_\delta}\Phi(\tau)d\tau,$$

d'où, l'intégrale $\int\Phi(\tau)d\tau$ étant absolument continue, il résulte que $\varphi(t)-\varphi(s) \leqslant 0$. La fonction $t \to \varphi(t)$ est donc non croissante et l'inégalité (2.9) est ainsi démontrée.

Démonstration de (2.10). En posant $\|x\|_t^* = e^{-kt}\|x\|_t$ en vertu du lemme 2.3 et de (2.9) on obtient $\|x(t)\|_t^* \leqslant e^{\lambda_0(t-s)}\|x(s)\|_s^*$ pour $t' \leqslant s \leqslant t \leqslant t''$, c'est-à-dire

$$\|x(t)\|_t \leqslant e^{(\lambda_0+k)(t-s)}\|x(s)\|_s \quad \text{pour} \quad t' \leqslant s \leqslant t \leqslant t''.$$

En posant $A^0(t) = -A(T-t)$, $x^0(t) = x(T-t)$ et $\|x\|_t^0 = e^{-kt}\|x\|_{T-t}$, en vertu du lemme 2.3 et de (2.9) on obtient $\|x^0(t)\|_t^0 \leqslant e^{\lambda_0(t-s)}\|x^0(s)\|_s^0$ pour $T-t'' \leqslant s \leqslant t \leqslant T-t'$, d'où

$$\|x(t)\|_t \leqslant e^{(\lambda_0+k)(s-t)}\|x(s)\|_s \quad \text{pour} \quad t' \leqslant t \leqslant s \leqslant t''.$$

3. Construction de l'opérateur de Green dans le cas $\mathscr{D}(A(t)) = \text{const}$

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\ \|$ et soit $A(t)$, $t \in \langle 0, T\rangle$, une famille d'opérateurs linéaires avec $\mathscr{D}(A(t)) \subset X$ et $\mathscr{R}(A(t)) \subset X$.

THÉORÈME 3.0. *Supposons que la condition* (2.1) *soit vérifiée ainsi que les trois conditions suivantes*:

(3.0.1) *Y est un sous-ensemble linéaire dense de l'espace X et $\mathscr{D}(A(t)) = Y$ pour tout $t \in \langle 0, T\rangle$*;

(3.0.2) *pour tout $\lambda > 0$, $t \in \langle 0, T\rangle$ et $x \in Y$ on a $\mathscr{R}(\lambda-A(t)) = X$ et $\|\lambda x-A(t)x\|_t \geqslant \lambda\|x\|_t$*;

(3.0.3) *pour tout $x \in Y$ et tout $x^* \in X^*$ la fonction $t \to x^*A(t)x$ est continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$.*

Sous ces hypothèses il existe un seul opérateur de Green (ayant les propriétés (ii)-(v), p. 285) *du problème* (i).

L'hypothèse (3.0.3) n'est pas nécessaire pour l'unicité qui résulte aisément du théorème 2.4, de l'opérateur de Green. Pour l'existence de l'opérateur de Green (ayant la propriété (v)) l'hypothèse (3.0.3) est pourtant essentielle; alors, comme le montre l'exemple donné par Phillips [10], p. 220, elle ne peut être remplacée par l'hypothèse que pour tout $x \in Y$ la fonction $t \to A(t)x$ soit continue au sens de la norme dans X.

La démonstration de l'existence de l'opérateur de Green sera faite successivement §§ 3.1-3.10 dans lesquels nous admettons toujours que les hypothèses du théorème 3.0 sont vérifiées.

3.1. La fonction $t, s \to (1-A(t))(1-A(s))^{-1}$. D'après (3.0.1) et (3.0.2) pour tout $t \in \langle 0, T\rangle$ fixé $(1-A(t))(1-A(0))^{-1}$ est un opérateur fermé de l'espace X tout entier en lui-même, donc, en vertu du théorème du graphe fermé, $(1-A(t))(1-A(0))^{-1} \in \mathscr{L}(X, X)$. D'après (3.0.3), $t, s \to (1-A(t))(1-A(0))^{-1}$ est donc une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$, faiblement continûment différentiable sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$. En vertu de 1.4.2 il en est de même de la fonction $t, s \to (1-A(0))(1-A(s))^{-1}$, donc, d'après 1.3.2, $t, s \to (1-A(t))(1-A(s))^{-1}$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ faiblement continûment différentiable sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$. D'où, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus

(3.1.1) $$\|(1-A(t))(1-A(s))^{-1}x\| \leqslant m\|x\|,$$

$m = \text{const}$, pour $x \in X$ et $0 \leqslant s, t \leqslant T$.

3.2. L'ensemble Y comme espace de Banach. En vertu de (3.0.1) et (3.0.2) pour tout $t \in \langle 0, T\rangle$ l'ensemble Y avec la norme $|||x|||_t = \|x-A(t)x\|_t$ est un espace de Banach contenu dans X algébriquement et topologiquement. D'après (3.1.1) et (2.1) on a

(3.2.1) $$|||x|||_t \leqslant b|||x|||_s \quad \text{pour} \quad x \in Y \text{ et } 0 \leqslant s, t \leqslant T,$$

où $b = ma^2 = \text{const}$. Les normes $|||\ |||_t$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$ sont donc équivalentes. Dans la suite nous allons considérer l'ensemble Y comme un espace de Banach avec l'une quelconque des normes $|||\ |||_t$, $t \in \langle 0, T\rangle$. Vu (3.0.3)

(3.2.2) $t \to A(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$.

3.3. Les fonctions $t \to \left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}$. D'après (3.0.2), (3.0.3), (3.2.2) et 1.4.2, pour tout $n = 1, 2, \ldots$ fixé $t \to \left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, Y)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Comme $Y \subset X$ algébriquement et topologiquement, donc pour tout $n = 1, 2, \ldots$ fixé $t \to \left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}$ est aussi une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, et de plus une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. En outre:

(3.3.1) $$\left\|\left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}x\right\|_t \leqslant \|x\|_t \quad \textit{pour} \quad x \in X \ \textit{et} \ t \in \langle 0, T\rangle,$$

(3.3.2) $$\left|\left|\left|\left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}x\right|\right|\right|_t \leqslant |||x|||_t \quad \textit{pour} \quad x \in Y \ \textit{et} \ t \in \langle 0, T\rangle,$$

(3.3.3) *la suite* $t \to \left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, *comme suite de fonctions à valeurs dans* $\mathscr{L}(X, X)$ *est, sur l'intervalle* $\langle 0, T\rangle$, *uniformément fortement convergente vers la fonction* $t \to 1$.

Les propriétés (3.3.1) et (3.3.2) résultent directement de (3.0.1), (3.0.2) et de la définition des normes $|||\ |||_t$.

Démonstration de (3.3.3). D'après (2.1) et (3.3.1) on a

(3.3.4) $$\left\|\left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}x\right\| \leqslant a^2\|x\|$$

pour $x \in X$, $t \in \langle 0, T\rangle$ et $n = 1, 2, \ldots$ En vertu de (3.2.2) et du théorème de Banach-Steinhaus on a $\|A(t)x\| \leqslant l|||x|||_0$, $l = \text{const}$, pour $x \in Y$ et $t \in \langle 0, T\rangle$, d'où, d'après (3.3.1),

(3.3.5) $$\left\|x-\left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}x\right\| = \left\|\left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}\left(-\frac{1}{n}A(t)x\right)\right\| \leqslant \frac{t}{n}|||x|||_0$$

pour $x \in Y$, $t \in \langle 0, T\rangle$ et $n = 1, 2, \ldots$ De (3.3.4), (3.0.1) et (3.3.5) résulte, en vertu de 1.5.2, la conclusion (3.3.3).

3.4. L'opérateur de Green du problème (n). Soit $n = 1, 2, \ldots$ fixé. Puisque, comme il a été prouvé dans 3.3, $t \to \left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$, faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, il en est de même de la fonction $t \to A_n(t)$, où

$$A_n(t) = A(t)\left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1} = n\left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1} - n.$$

Donc, d'après 1.3.1, $t \to A_n(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ continue au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$, par conséquent en appliquant la méthode des approximations successives on démontre aisément que l'opérateur de Green $G_n(t, s)$ du problème (n), p. 289, existe, est univoquement défini et qu'il a les propriétés suivantes:

(3.4.1) $t, s \to G_n(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ continûment différentiable au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$ sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$;

(3.4.2) $G_n(s, s) = 1$ pour $s \in \langle 0, T\rangle$;

(3.4.3) $G_n(t, s)G_n(s, r) = G_n(t, r)$ pour $0 \leqslant r, s, t \leqslant T$;

(3.4.4) $$\frac{\partial}{\partial t}G_n(t, s) = A_n(t)G_n(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s}G_n(t, s) = -G_n(t, s)A_n(s)$$

pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$.

Nous allons démontrer que, en outre,

(3.4.5) $G_n(t, s)Y \subset Y$ pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$,

(3.4.6) $t, s \to G_n(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ continûment différentiable au sens de la norme dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$.

Démonstration de (3.4.5) et (3.4.6). Puisque, comme il a été prouvé dans 3.3, $t \to \left(1-\frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, il en est de même de la fonction $t \to A_n(t)$. Donc, d'après 1.3.1, $t \to A_n(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ continue au sens de la norme dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. En considérant (n) comme un problème dans l'espace Y, on démontre aisément par la méthode des approximations successives l'existence de l'opérateur de Green $G_n'(t, s)$ avec les propriétés suivantes:

(3.4.7) $t, s \to G_n'(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ continûment différentiable au sens de la norme dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$;

(3.4.8) $G_n'(s, s) = 1$ pour $s \in \langle 0, T\rangle$;

(3.4.9) $G_n'(t, s)G_n'(s, r) = G_n'(t, r)$ pour $0 \leqslant r, s, t \leqslant T$;

(3.4.10) $$\frac{\partial}{\partial t}G_n'(t, s) = A_n(t)G_n'(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s}G_n'(t, s) = -G_n'(t, s)A_n(s)$$

pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$.

Prenons maintenant l'équation

(3.4.11) $$\frac{dx(t)}{dt} = A_n(t)x(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle,$$

dans laquelle $t \to A_n(t)$ est considérée comme fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ et $t \to x(t)$ comme fonction à valeurs dans X, la différentiation étant entendue au sens de la norme dans X. Pour tout $x_0 \in X$ et tout $s \in \langle 0, T\rangle$ l'équation (3.4.11) admet exactement une solution satisfaisant à la condition $x(s) = x_0$. D'après l'inégalité $\|x\|_t \leqslant |||x|||_t$, pour $x_0 \in Y$ et $s \in \langle 0, T\rangle$ quelconques fixés $t \to x(t) = G_n(t, s)x_0$ et $t \to x'(t) = G_n'(t, s)x_0$ sont des solutions de l'équation (3.4.11) satisfaisant à la condition $x(s) = x'(s) = x_0$, donc $x(t) = x'(t)$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$. Par conséquent

$$G_n'(t, s)x = G_n(t, s)x \quad \text{pour} \quad x \in Y \text{ et } 0 \leqslant s, t \leqslant T,$$

d'où résultent immédiatement (3.4.5) et (3.4.6).

3.5. Les opérateurs $H_n(t, s)$. Comme $t \to (1 - A(t))$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et $s \to (1 - A(s))^{-1}$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, Y)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, donc, d'après (3.4.6) et 1.3.2, pour tout $n = 1, 2, \ldots$ fixé, $t, s \to H_n(t, s)$, où

$$H_n(t, s) = (1 - A(t))G_n(t, s)(1 - A(s))^{-1}, \tag{3.5.1}$$

est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ faiblement continûment différentiable sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$. D'après 1.3.1 et 1.1.3, $t \to B(t)$, où

$$B(t) = -\frac{dA(t)}{dt}(1 - A(t))^{-1},$$

est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ faiblement continue sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Nous allons démontrer que

$$H_n(t, s) = G_n(t, s) + \int_s^t G_n(t, \tau)B(\tau)H_n(\tau, s)\,d\tau \tag{3.5.2}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ et $0 \leqslant s, t \leqslant T$, où l'intégrale est entendue au sens de 1.2.

Démonstration de (3.5.2). On a

$$(1 - A(t))A_n(t)x = A_n(t)(1 - A(t))x \quad \text{pour} \quad x \in Y. \tag{3.5.3}$$

En vertu de 1.3.2, (3.4.1), (3.4.4) et (3.5.1), pour $t \in \langle 0, T\rangle$ et $s \in \langle 0, T\rangle$ quelconques fixés $\tau \to G_n(t, \tau)H_n(\tau, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$, faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et, d'après (3.5.3), on a

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\big(G_n(t, \tau)H_n(\tau, s)\big) = -G_n(t, \tau)A_n(\tau)H_n(\tau, s) + G_n(t, \tau)\left(-\frac{dA(\tau)}{d\tau} + (1 - A(\tau))A_n(\tau)\right)G_n(\tau, s)(1 - A(s))^{-1} = G_n(t, \tau)B(\tau)H_n(\tau, s).$$

Par conséquent, d'après (3.4.2),

$$H_n(t, s) - G_n(t, s) = G_n(t, \tau)H_n(\tau, s)\Big|_{\tau=s}^{\tau=t} = \int_s^t \frac{\partial}{\partial \tau}\big(G_n(t, \tau)H_n(\tau, s)\big)d\tau = \int_s^t G_n(t, \tau)B(\tau)H_n(\tau, s)\,d\tau.$$

3.6. Deux implications. Les deux implications suivantes, conséquences de l'égalité (3.5.2), joueront un rôle important dans la suite:

(3.6.1) si les opérateurs $G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, sont bornés dans leur ensemble au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$, alors il en est de même des opérateurs $H_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$;

(3.6.2) si la suite $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, comme suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$, est uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, alors il en est de même de la suite $t, s \to H_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$

Démonstration des implications (3.6.1) et (3.6.2). Posons

$$K_n(t, s) = G_n(t, s)B(s) = -G_n(t, s)\frac{dA(s)}{ds}(1 - A(s))^{-1}.$$

En vertu de (3.4.1) et 1.1.3 pour tout $n = 1, 2, \ldots$ fixé, $t, s \to K_n(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ faiblement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. De plus pour $n = 1, 2, \ldots$ et $s \in \langle 0, T)$ quelconques fixés $t \to K_n(t, s)$ est une fonction continue sur l'intervalle $\langle s, T\rangle$ au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$. En vertu du théorème de Banach-Steinhaus la fonction $s \to B(s)$, comme faiblement continue à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$, est bornée sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$. Par conséquent (3.6.1) et (3.6.2) résultent de (3.5.2) et des théorèmes 1.6.2 et 1.6.4.

3.7. Les opérateurs $G_n(t, s)$ et $H_n(t, s)$ sont bornés dans leur ensemble. Il existe une constante C telle que

$$\|G_n(t, s)x\| \leqslant C\|x\| \quad \text{pour} \quad x \in X,\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \text{ et } n = 1, 2, \ldots \tag{3.7.1}$$

En vertu de (3.6.1), (3.7.1) entraîne l'existence d'une constante D telle que

$$\|H_n(t, s)x\| \leqslant D\|x\| \quad \text{pour} \quad x \in X,\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \text{ et } n = 1, 2, \ldots \tag{3.7.2}$$

Démonstration de (3.7.1). D'après (3.3.1) pour $\lambda > 0$, $t \in \langle 0, T\rangle$ $x \in X$ et $n = 1, 2, \ldots$ quelconques fixés on a

$$\|\lambda x - A_n(t)x\|_t = \left\|(\lambda + n)x - n\left(1 - \frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}x\right\|_t \geqslant (\lambda + n)\|x\|_t - n\left\|\left(1 - \frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}x\right\|_t \geqslant \lambda\|x\|_t. \tag{3.7.3}$$

Donc, en vertu de (3.4.4) et du théorème 2.4, pour $x \in X$ et $s \in \langle 0, T\rangle$ quelconques fixés la fonction $t \to \|G_n(t,s)x\|_t$ est non croissante sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. D'où $\|G_n(t,s)x\|_t \leqslant \|G_n(s,s)x\|_s = \|x\|_s$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et, d'après (2.1), $\|G_n(t,s)x\| \leqslant a^2\|x\|$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, ce qui établit (3.7.1).

3.8. Représentation de l'opérateur $G_n(t,s)$ sous forme d'une intégrale multiplicative. Pour $n, k = 1, 2, \ldots$ quelconques fixés les conditions

(3.8.1) $$G_{nk}(t,s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(t-s)^p}{p!}\left(A_n\left(\frac{i-1}{k}T\right)\right)^p$$

$$\text{pour} \quad \frac{i-1}{k}T \leqslant s, t \leqslant \frac{i}{k}T, \ i = 1, \ldots, k,$$

et

(3.8.2) $$G_{nk}(t,s)G_{nk}(s,r) = G_{nk}(t,r) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant r, s, t \leqslant T$$

définissent univoquement une fonction $t, s \to G_{nk}(t,s)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ continue au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$ sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$. Nous allons démontrer qu'il existe une constante L telle que

(3.8.3) $$\|G_n(t,s)x - G_{nk}(t,s)x\| \leqslant \frac{L}{k}|||x|||_0$$

pour $x \in Y$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n, k = 1, 2, \ldots$

Démonstration de (3.8.3). De (3.8.1) et (3.8.2) résulte que

$$G_{nk}(s,s) = 1 \quad \text{pour} \quad s \in \langle 0, T\rangle$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s}G_{nk}(t,s) = -G_{nk}(t,s)A_n\left(\frac{T}{k}\left[\frac{ks}{T}\right]\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s, t \leqslant T, s \neq \frac{i}{k}T,$$

la différentiation étant entendue au sens de la norme dans $\mathscr{L}(X, X)$. D'où, en tenant compte de (3.4.1), (3.4.2) et (3.4.4), on tire

(3.8.4) $$G_n(t,s) - G_{nk}(t,s) = G_{nk}(t,\tau)G_n(\tau,s)\Big|_{\tau=s}^{\tau=t}$$
$$= \int_s^t G_{nk}(t,\tau)\left(A_n(\tau) - A_n\left(\frac{T}{k}\left[\frac{k\tau}{T}\right]\right)\right)G_n(\tau,s)\,d\tau$$

pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$ et $n, k = 1, 2, \ldots$

D'après (3.8.1), (3.0.1) et (3.0.2), en vertu du théorème 2.4, on a

$$\|G_{nk}(t,s)x\|_{\frac{i-1}{k}T} \leqslant \|x\|_{\frac{i-1}{k}T}$$

$$\text{pour} \quad x \in X \quad \text{et} \quad \frac{i-1}{k}T \leqslant s \leqslant t \leqslant \frac{i}{k}T, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Comme, d'après (2.1), pour tout $x \in X$ fixé, $t \to \|x\|_t$ est une fonction non croissante, on a, d'après (3.8.2),

$$\|G_{nk}(t,s)x\|_{\frac{T}{k}\left[\frac{kt}{T}\right]} \leqslant \|x\|_{\frac{T}{K}\left[\frac{ks}{T}\right]}$$

pour $x \in X$ et $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, d'où, avec (2.1), résulte que

(3.7.5) $$\|G_{nk}(t,s)x\| \leqslant a^2\|x\|$$

pour $x \in X$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n, k = 1, 2, \ldots$

Comme $t \to dA(t)/dt$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ faiblement continue sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, il existe, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, une constante c_1 telle que

$$\left\|\frac{dA(t)}{dt}x\right\| \leqslant c_1|||x|||_0$$

pour $x \in Y$ et $t \in \langle 0, T\rangle$. Comme, d'après 1.4.2,

$$\frac{dA_n(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(n\left(1 - \frac{1}{n}A(t)\right)^{-1} - n\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n}A(t)\right)^{-1}\frac{dA(t)}{dt}\left(1 - \frac{1}{n}A(t)\right)^{-1},$$

on a, d'après (2.1), (3.2.1), (3.3.1) et (3.3.2),

$$\left\|\frac{dA_n(t)}{dt}x\right\| \leqslant c_1a^2b^2|||x|||_0$$

pour $x \in Y$, $t \in \langle 0, T\rangle$ et $n = 1, 2, \ldots$, d'où

$$\|A_n(t)x - A_n(s)x\| = \left\|\int_s^t \frac{dA_n(\tau)}{d\tau}x\,d\tau\right\|$$
$$\leqslant |t-s|c_1a^2b^2|||x|||_0$$

pour $x \in Y$, $0 \leqslant s, t \leqslant T$ et $n = 1, 2, \ldots$ Par conséquent

(3.8.6) $$\left\|A_n(\tau)x - A_n\left(\frac{T}{k}\left[\frac{k\tau}{T}\right]\right)x\right\| \leqslant \frac{Tc_1a^2b^2}{k}|||x|||_0$$

pour $x \in Y$, $\tau \in \langle 0, T\rangle$ et $b = 1, 2, \ldots$

$s \to (1 - A(s))$ étant une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et $t \to (1 - A(t))^{-1}$ étant une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, Y)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, il existe des constantes c_2 et c_3 telles que

$$\|(1-A(s))x\| \leqslant c_2|||x|||_0 \quad \text{pour} \quad x \in Y \text{ et } s \in \langle 0, T\rangle,$$

$$|||(1-A(t))^{-1}x|||_0 \leqslant c_3\|x\| \quad \text{pour} \quad x \in X \text{ et } t \in \langle 0, T\rangle.$$

D'après (3.5.1) et (3.7.2), on déduit de là

$$\text{(3.8.7)} \qquad |||G_n(t, s)x|||_0 \leqslant c_3Dc_2|||x|||_0$$

pour $x \in Y$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n = 1, 2, \ldots$

De (3.8.4)-(3.8.7) résulte (3.8.3) avec la constante $L = a^4b^2c_1c_2c_3DT^2$.

3.9. Convergence de la suite $G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$ Nous allons montrer que

(3.9.1) $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, *est une suite de fonctions à valeurs dans* $\mathcal{L}(X, X)$ *uniformément fortement convergente sur le triangle* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

et en même temps

(3.9.2) $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, *est une suite de fonctions à valeurs dans* $\mathcal{L}(Y, Y)$ *uniformément fortement convergente sur le triangle* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Démonstration de (3.9.1). De (3.8.1) il s'ensuit, en vertu du théorème approximatif de Yosida

(3.9.3) pour $k = 1, 2, \ldots$ et $i = 1, \ldots, k$ quelconques fixés $t, s \to G_{nk}(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathcal{L}(X, X)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $\frac{i-1}{k}T \leqslant s \leqslant t \leqslant \frac{i}{k}T$.

De (3.9.3) et (3.8.2) on déduit, en vertu de 1.5.3, que

(3.9.4) pour tout $k = 1, 2, \ldots$ fixé $t, s \to G_{nk}(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathcal{L}(X, X)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

En vertu de (3.8.3) on a

$$\|G_n(t, s)x - G_m(t, s)x\| \leqslant 2\frac{L}{k}|||x|||_0 + \|G_{nk}(t, s)x - G_{mk}(t, s)x\|$$

pour $x \in Y$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n, m, k = 1, 2, \ldots$, d'où, d'après (3.9.4),

(3.9.5) pour tout $x \in Y$ fixé la suite $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est convergente au sens de la norme dans X, uniformément sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Comme Y est un sous-ensemble dense d'espace X, donc (3.7.1) et (3.9.5) entraînent, en vertu de 1.5.2, la conclusion (3.9.1).

Démonstration de (3.9.2). De (3.9.1) et (3.6.2) résulte que

(3.9.6) $t, s \to H_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathcal{L}(X, X)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

D'après (3.5.1) on a

(3.9.7) $G_n(t, s) = (1-A(t))^{-1}H_n(t, s)(1-A(s))$ pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$ et $n = 1, 2, \ldots$, si l'on considère $G_n(t, s)$ comme un opérateur appartenant à $\mathcal{L}(Y, Y)$.

La fonction $t, s \to (1-A(t))^{-1}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(X, Y)$ est faiblement continûment différentiable, donc fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. La fonction $t, s \to (1-A(s))$, à valeurs dans $\mathcal{L}(Y, X)$, étant faiblement continûment différentiable, est fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Donc (3.9.6) et (3.9.7) entraînent, en vertu de 1.5.3, la conclusion (3.9.2).

L'idée d'appliquer l'implication (3.6.2) dans la démonstration ci-dessus et celle (développée au 1.6 et 3.6) de considérer les implications (3.6.1) et (3.6.2) comme des conséquences de l'égalité (3.5.2) ont été suggérées par le travail de Kato [4] et par les §§ 3 et 6 du travail de Phillips [10]. Dans [4], § 3, Nos 12-15, p. 223-228, les équations du type de Volterra, qui jouent un rôle analogue à (3.5.2), figurent sous la forme sommatoire. L'analogie avec [10] consiste en ce que $H_n(t, s)$ est l'opérateur de Green du problème

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A_n(t)+B(t))x(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle, \qquad x(0) = x_0,$$

que l'on peut considérer comme problème (n) perturbé par

$$B(t) = -\frac{dA(t)}{dt}(1-A(t))^{-1}.$$

3.10. Achèvement de la démonstration du théorème 3.0. D'après (3.4.1) et (3.9.1) $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite, uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, de fonctions à valeurs dans $\mathcal{L}(X, X)$, fortement continues. En vertu de 1.5.1 elle converge donc vers une fonction $t, s \to G(t, s)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X, X)$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Nous allons démontrer que $G(t, s)$ ainsi définie est l'opérateur de Green du problème (i), c'est-à-dire que $G(t, s)$ a les propriétés (ii)-(v).

Les propriétés (ii) et (iii) résultent immédiatement de (3.4.2) et (3.4.3); la propriété (iv) n'est autre que la continuité forte, déjà établie, de la fonction $t, s \to G(t, s)$.

Démonstration de (v). D'après (3.4.5), (3.4.6) et (3.9.2) $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ fortement continues. En vertu de 1.5.1 elle converge donc vers une fonction $t, s \to G'(t, s)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Pour $x \in Y$ et $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ quelconques fixés on a $\lim G_n(t, s)x = G(t, s)x$ au sens de la norme dans X et $\lim G_n(t, s)x = G'(t, s)x$ au sens de la norme dans Y, donc aussi au sens de la norme dans X. Donc $G(t, s)x = G'(t, s)x$ pour $x \in Y$ et $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Par conséquent

(3.10.1) $t, s \to G(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

et

(3.10.2) $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, Y)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ vers la fonction $t, s \to G(t, s)$.

La propriété (v) résulte immédiatement de la suivante:

(3.10.3) $t, s \to G(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ fortement continûment différentiable sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et, dans ce sens, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, s) = A(t) G(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s} G(t, s) = -G(t, s) A(s)$$

pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Dans la démonstration de (3.10.3) nous nous appuierons sur 1.5.4. D'après (3.4.1) et (3.4.4) $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ fortement continûment différentiables sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et, dans ce sens, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} G_n(t, s) = A_n(t) G_n(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s} G_n(t, s) = -G_n(t, s) A_n(s)$$

pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n = 1, 2, \ldots$ En vertu de (3.9.1) et de la définition de $G(t, s)$, la suite $t, s \to G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, considérée comme suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$, converge fortement uniformément sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ vers la fonction $t, s \to G(t, s)$. Il reste donc à démontrer que

(3.10.4) $t, s \to A_n(t) G_n(t, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ vers la fonction $t, s \to A(t) G(t, s)$

et

(3.10.5) $t, s \to G_n(t, s) A_n(s)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ uniformément fortement convergente sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ vers la fonction $t, s \to G(t, s) A(s)$.

Ad (3.10.4). On a

$$A_n(t)x = \left(1 - \frac{1}{n} A(t)\right)^{-1} A(t)x$$

pour $x \in \mathscr{L}$ et $t \in \langle 0, T \rangle$, donc

$$A_n(t) G_n(t, s) = \left(1 - \frac{1}{n} A(t)\right)^{-1} A(t) G_n(t, s)$$

pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et $n = 1, 2, \ldots$ comme éléments de $\mathscr{L}(Y, X)$. Comme $t, s \to A(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(Y, X)$ fortement continue sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, donc (3.10.2) et (3.3.3) entraînent, en vertu de 1.5.3, la conclusion (3.10.4).

Ad (3.10.5). On a

$$G_n(t, s) A_n(s) = G_n(t, s) \left(1 - \frac{1}{n} A(s)\right)^{-1} A(s)$$

comme éléments de $\mathscr{L}(Y, X)$, donc (3.10.5) résulte de (3.3.3) et (3.9.1) et de la définition de $G(t, s)$.

4. Opérateur de Green dans le cas de $\mathscr{D}(A(t))$ variable

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\| \|$ et soit $A(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$, une famille d'opérateurs linéaires avec $\mathscr{D}(A(t)) \subset X$ et $\mathscr{R}(A(t)) \subset X$.

Hypothèses 4.1. Nous supposons que la condition (2.1) est vérifiée ainsi que l'ensemble des conditions suivantes:

(4.1) pour tout $t \in \langle 0, T \rangle$ l'ensemble $\mathscr{D}(A(t))$ est dense dans X;

(4.2) il existe une constante réelle λ_0, telle que $\mathscr{R}(\lambda - A(t)) = X$ et $\|\lambda x - A(t)x\|_t \geqslant (\lambda - \lambda_0)\|x\|_t$ pour $\lambda > \lambda_0$, $t \in \langle 0, T \rangle$ et $x \in \mathscr{D}(A(t))$;

(4.3) il existe une famille $R(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$, d'opérateurs linéaires bornés inversibles de l'espace X sur X, telle que pour tout $x \in X$ et tout $x^* \in X^*$ la fonction $t \to x^* R(t) x$ est deux fois continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T \rangle$ et que $(R(t))^{-1} \mathscr{D}(A(t)) = Y = \text{const}$ pour $t \in \langle 0, T \rangle$;

(4.4) pour tout $x \in Y$ et tout $x^* \in X$ la fonction $t \to x^* (R(t))^{-1} A(t) R(t) x$ est continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T \rangle$.

Théorème 4.2. *Sous les hypothèses* 4.1 *le problème* (i) *admet un seul opérateur de Green* (*ayant les propriétés* (ii)-(v), p. 385).

Ce théorème généralise les résultats de Kato [4], th. 4, et [5].

La démonstration de l'unicité de l'opérateur de Green, basée sur le théorème 2.4, n'utilise pas les hypothèses (4.3) et (4.4).

Démonstration de l'existence de l'opérateur de Green. Nous appliquerons la méthode exposée dans [11], § 6, p. 162-165. D'après (4.3), 1.3.2 et 1.4.2, $t \to R(t)$ et $t \to (R(t))^{-1}$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ deux fois faiblement continûment différentiables sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, il existe donc une constante $b \geqslant 1$ telle que

$$(4.5)\qquad \left\|\frac{dR(t)}{dt}x\right\| \leqslant b\|x\| \quad \text{et} \quad b^{-1}\|x\| \leqslant \|R(t)x\| \leqslant b\|x\| \text{ pour } t \in \langle 0, T\rangle \text{ et } x \in X.$$

Posons

$$(4.6)\qquad \|x\|_t^* = e^{-a^2b^2t}\|R(t)x\|_t \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle \quad \text{et} \quad x \in X,$$

$$(4.7)\qquad A^*(t) =$$

$$= (R(t))^{-1}A(t)R(t) - (R(t))^{-1}\frac{dR(t)}{dt} - a^2b^2 - \lambda_0 \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle,$$

où a et λ_0 sont les constantes qui figurent dans (2.1) et (4.2). Convenons de désigner par (k)* une condition qui s'obtient de (k) en y mettant $\|\ \|_t^*$ au lieu de $\|\ \|_t$ et $A^*(t)$ au lieu de $A(t)$. Supposons pour l'instant que les conditions (2.1)* et (3.0.1)*-(3.0.3)* soient vérifiées et soit $G^*(t,s)$ l'opérateur de Green du problème (i)*, dont l'existence et l'unicité sont assurées dans ce cas par le théorème 3.0. Alors on vérifie aisément que

$$G(t,s) = e^{(\lambda_0+a^2b^2)(t-s)}R(t)G^*(t,s)(R(s))^{-1}$$

est l'opérateur de Green du problème (i). Pour achever la démonstration il ne reste donc qu'à prouver que les conditions (2.1)* et (3.0.1)*-(3.0.3)* sont vérifiées.

Ad (2.1)*. En admettant $c = abe^{a^2b^2T}$, d'après (2.1) et (4.5), on a $c^{-1}\|x\| \leqslant a^{-1}e^{-a^2b^2T}\|R(t)x\| \leqslant e^{-a^2b^2T}\|R(t)x\|_t \leqslant \|x\|_t^* \leqslant \|R(t)x\|_t \leqslant a\|R(t)x\| \leqslant$ $\leqslant ab\|x\| \leqslant c\|x\|$, donc

$$(4.8)\qquad c^{-1}\|x\| \leqslant \|x\|_t^* \leqslant c\|x\|, \qquad c = \text{const} \geqslant 1, \qquad \text{pour} \qquad t \in \langle 0, T\rangle \text{ et } x \in X.$$

Pour $x \in X$ et $0 \leqslant t < t+h \leqslant T$, d'après (2.1) et (4.5), on a

$$\begin{aligned}\|x\|_{t+h}^* &\leqslant e^{-a^2b^2(t+h)}\|R(t+h)x\|_t\\ &\leqslant e^{-a^2b^2(t+h)}(\|R(t)x\|_t + a\|R(t+h)x - R(t)x\|)\\ &\leqslant e^{-a^2b^2(t+h)}(\|R(t)x\|_t + hab\|x\|)\\ &\leqslant e^{-a^2b^2(t+h)}(1+ha^2b^2)\|R(t)x\|_t \leqslant \|x\|_t^*,\end{aligned}$$

donc

(4.9) pour tout $x \in X$ la fonction $t \to \|x\|_t^*$ est non croissante sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$.

D'après (4.8) et (4.9) la condition (2.1)* est vérifiée.

Ad (3.0.1)*. D'après (4.7) et (4.3) on a $\mathscr{D}(A^*(t)) = Y$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$. D'après (4.1) et (4.3) l'ensemble $\mathscr{D}(A(0))$ est dense dans X, l'opérateur $R(0)$ est un homéomorphisme de l'espace X sur X et on a $Y = (R(0))^{-1}\mathscr{D}(A(0))$. Par conséquent Y est un ensemble dense dans X.

Ad (3.0.2)*. Pour $t \in \langle 0, T\rangle$ et $\lambda > 0$ fixés posons

$$A = \lambda + a^2b^2 + \lambda_0 - (R(t))^{-1}A(t)R(t), \qquad B = (R(t))^{-1}\frac{dR(t)}{dt}.$$

Alors, d'après (4.2), on a

$$A^{-1} = (R(t))^{-1}(\lambda + a^2b^2 + \lambda_0 - A(t))^{-1}R(t) \in \mathscr{L}(X, X)$$

et

$$\|R(t)A^{-1}x\|_t = \|(\lambda + a^2b^2 + \lambda_0 - A(t))^{-1}R(t)x\|_t \leqslant (\lambda + a^2b^2)^{-1}\|R(t)x\|_t,$$

d'où

$$(4.10)\qquad \|A^{-1}x\|_t^* \leqslant (\lambda + a^2b^2)^{-1}\|x\|_t^* \quad \text{pour} \quad x \in X.$$

En outre $B \in \mathscr{L}(X, X)$ et, à cause de (2.1) et (4.5),

$$\|R(t)Bx\|_t = \left\|\frac{dR(t)}{dt}x\right\|_t \leqslant ab\|x\| \leqslant a^2b^2\|R(t)x\|_t,$$

d'où

$$(4.11)\qquad \|Bx\|_t^* \leqslant a^2b^2\|x\|_t^* \quad \text{pour} \quad x \in X.$$

D'après (4.10) et (4.11) on a

$$(\lambda - A(t))^{-1} = (A+B)^{-1} = A^{-1}(1+BA^{-1})^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-BA^{-1})^n \in \mathscr{L}(X, X)$$

et

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}x\|_t^* \leqslant \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(a^2b^2)^n(\lambda + a^2b^2)^{-n-1}\Big)\|x\|_t^* = \lambda^{-1}\|x\|_t^* \quad \text{pour} \quad x \in X,$$

ce qui signifie que la condition (3.0.2)* est vérifiée.

Ad (3.0.3)*. D'après (4.3), 1.4.2 et 1.3.2,

$$t \to (R(t))^{-1}\frac{dR(t)}{dt}$$

est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, X)$ faiblement continûment différentiable, d'où (3.0.3)* est une conséquence immédiate de (4.4) et (4.7).

Les théorèmes 2.4 et 4.2 montrent que sous les hypothèses 4.1 pour tout $s \in \langle 0, T)$ le problème

$$(\text{i.s})\qquad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle s, T\rangle, \qquad x(s) = x_0$$

est bien posé, dans ce sens que

1° si $x_0 \in \mathcal{D}(A(s))$, le problème (i.s) admet une solution unique $t \to x(t; s, x_0)$ continûment différentiable au sens de la norme dans X et que

2° il existe une constante C telle que $\|x(t; s, x_0)\| \leqslant C\|x_0\|$ pour $s \in \langle 0, T)$, $x_0 \in \mathcal{D}(A(s))$ et $t \in \langle s, T\rangle$.

D'autre part, les conditions 1° et 2° entraînent l'existence d'un opérateur de Green du problème (i).

Nous établirons maintenant un analogue du théorème 4.2 pour le cas où non seulement, pour tout $s \in \langle 0, T)$, le problème (i.s) est bien posé, mais aussi pour tout $s \in (0, T\rangle$ le problème

$$(\mathrm{i.s})_0 \qquad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, s\rangle, \qquad x(s) = x_0$$

est bien posé.

Hypothèses 4.3. Nous supposons vérifiées les conditions (2.3), (4.1), (4.3) et (4.4) ainsi que la suivante:

$(4.2)_0$ il existe une constante $\lambda_0 \geqslant 0$, telle que $\mathcal{R}(\lambda - \varepsilon A(t)) = X$ et $\|\lambda x - \varepsilon A(t)x\|_t \geqslant (\lambda - \lambda_0)\|x\|_t$ pour $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda > \lambda_0$, $t \in \langle 0, T\rangle$ et $x \in \mathcal{D}(A(t))$.

THÉORÈME 4.4. *Sous les hypothèses 4.3 il existe un seul opérateur de Green $G(t, s)$ du problème* (i) *ayant les propriétés suivantes:*

$(\mathrm{ii})_0$ *$t, s \to G(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X, X)$ fortement continue sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$;*

$(\mathrm{iii})_0$ *$G(s, s) = 1$ pour tout $s \in \langle 0, T\rangle$;*

$(\mathrm{iv})_0$ *$G(t, s)G(s, r) = G(t, r)$ pour $0 \leqslant r, s, t \leqslant T$;*

$(\mathrm{v})_0$ *$G(t, s)\mathcal{D}(A(s)) = \mathcal{D}(A(t))$ pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$ et pour tout $s \in \langle 0, T\rangle$ et tout $x \in \mathcal{D}(A(s))$ la fonction $t \to G(t, s)x$ est continûment différentiable au sens de la norme dans X sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et satisfait dans cet intervalle à l'équation*

$$\frac{d}{dt}G(t, s)x = A(t)G(t, s)x.$$

Démonstration. Si l'on remplace $\|x\|_t$ par $e^{-kt}\|x\|_t$, alors, d'après le lemme 2.3, les hypothèses 4.1 sont vérifiées, donc le théorème 4.2 assure l'existence d'un opérateur de Green unique du problème (i), défini sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et ayant les propriétés (ii)-(v), p. 385. Pour déterminer les opérateurs $G(t, s)$ pour $0 \leqslant t < s \leqslant T$, posons $\|x\|_t^0 = e^{kt}\|x\|_{T-t}$, $A^0(t) = A(T-t)$ et convenons de désigner par $(\mathrm{k})^0$ la condition qui s'obtient de (k) en y mettant $\|\ \|_t^0$ au lieu de $\|\ \|_t$, $A^0(t)$ au lieu de $A(t)$ et $G^0(t, s)$ au lieu de $G(t, s)$. Alors, d'après le lemme 2.3, les hypothèses 4.1 sont vérifiées, donc le théorème 4.1 assure l'existence d'un opérateur de Green unique $G^0(t, s)$ du problème $(\mathrm{i})^0$, défini sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et ayant les propriétés $(\mathrm{ii})^0$-$(\mathrm{v})^0$. Nous posons $G(t, s) = G^0(T-t, T-s)$ pour $0 \leqslant t < s \leqslant T$. Ainsi la fonction $t, s \to G(t, s)$ est définie sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$ tout entier et, d'après (ii), (iii), $(\mathrm{ii})^0$ et $(\mathrm{iii})^0$, les conditions $(\mathrm{ii})_0$ et $(\mathrm{iii})_0$ sont vérifiées. Les propriétés $(\mathrm{iv})_0$ et $(\mathrm{v})_0$ sont des conséquences de l'unicité des solutions des problèmes (i. s) et $(\mathrm{i.\,s})_0$, qui résulte de l'inégalité (2.10).

Remarque 4.5. Dans le chapitre 8 nous profiterons de la remarque suivante.

Supposons vérifiées les conditions 4.3 avec $R(t) \equiv 1$. Alors les opérateurs de Green $G(t, s)$ et $G^0(t, s)$ des problèmes (i) et $(\mathrm{i})^0$, considérés sur le triangle $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, ont les propriétés (3.10.1), (3.10.3), $(3.10.1)^0$ et $(3.10.3)^0$. Toute norme $|||\ |||_1$ définie sur Y, qui en fait un espace de Banach contenu dans X algébriquement et topologiquement est équivalente à la norme $|||\ |||_0$ introduite dans 3.2. (En effet, si Y_i désigne Y considéré comme un espace de Banach muni de la norme $|||\ |||_i$, alors on démontre aisément que l'opérateur identité défini sur Y admet un graphe fermé dans $Y_0 \times Y_1$). Il résulte de là ce qui suit:

Si les hypothèses 4.3 sont vérifiées avec $R(t) \equiv 1$ et si l'on introduit dans Y la norme qui en fait un espace de Banach contenu dans X algébriquement et topologiquement, alors l'opérateur de Green du problème (i), dont il est question dans le théorème 4.4, a les propriétés suivantes:

$(\mathrm{vi})_0$ $t, s \to G(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(Y, Y)$ fortement continue sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$;

$(\mathrm{vii})_0$ $t, s \to G(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(Y, X)$ fortement continûment différentiable sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$ et, dans ce sens, on a

$$\frac{d}{dt}G(t, s) = A(t)G(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds}G(t, s) = -G(t, s)A(s)$$

pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$.

5. Équations du type $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t)$

Soit X un espace de Banach; soient encore $A(t)$, $t \in \langle 0, T\rangle$, une famille d'opérateurs linéaires avec $\mathcal{D}(A(t)) \subset X$ et $\mathcal{R}(A(t)) \subset X$, et $t \to f(t)$ une fonction à valeurs dans X, définie sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Nous considérons le problème de Cauchy abstrait

$$(5.1) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle, \qquad x(0) = 0.$$

Théorème 5.1. *Supposons que les hypothèses* 4.1 *soient vérifiées et que la fonction* $t \to f(t)$ *soit faiblement continûment différentiable sur l'intervalle* $\langle 0, T\rangle$. *Alors il existe une solution unique* $t \to x(t)$ *du problème* (5.1) *faiblement continûment différentiable sur l'intervalle* $\langle 0, T\rangle$. *Cette solution s'exprime par la formule*

$$(5.2)\qquad x(t) = \int_0^t G(t,s)f(s)\,ds \quad \textit{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle,$$

où $G(t, s)$ *est l'opérateur de Green du problème* (i).

Sans changer la méthode de la démonstration on peut remplacer l'hypothèse que $t \to f(t)$ soit faiblement continûment différentiable par l'hypothèse que $t \to f(t)$ soit absolument continue au sens fort avec une dérivée au sens fort, définie presque partout, de puissance p-ième, $p \geqslant 1$, intégrable au sens de Bochner sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Alors il faut effectuer le même changement dans la conclusion du théorème relative à la régularité de la solution $t \to x(t)$. Si les hypothèses 4.1 sont vérifiées et si pour tout $x \in X$ la fonction $t \to R(t)x$ est deux fois continûment différentiable et si la fonction $t \to (R(t))^{-1}A(t)R(t)x$ est continûment différentiable pour tout $x \in Y$ et la fonction $t \to f(t)$ est continûment différentiable, la différentiation et la continuité étant toujours comprises au sens de la norme dans X, alors la solution est aussi continûment différentiable au sens de la norme dans X; on obtient ainsi une généralisation du théorème de R. S. Phillips ([10], th. 6.3, p. 219).

L'hypothèse de la différentiabilité de la fonction $t \to f(t)$ est essentielle dans le théorème 5.1 et ne peut être remplacée par l'hypothèse que $t \to f(t)$ soit continue au sens de la norme dans X. En effet, soit $A(t) = \mathrm{const} = A$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$, où A est l'opérateur générateur d'un groupe fortement continu d'opérateurs linéaires dans l'espace X et soit $f(t) = \exp(tA)x_0$, où $x_0 \notin \mathscr{D}(A)$. Alors

$$x(t) = \int_0^t G(t,s)f(s)\,ds = t\exp(tA)x_0.$$

S'il existait pour un $t_0 \in (0, T\rangle$ une dérivée faible $\dfrac{dx}{dt}(t_0)$, alors

$$\operatorname*{lim\,faible}_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\exp(hA)-1\big)y_0$$

existerait pour $y_0 = \exp(t_0A)x_0$, d'où il résulterait que $y_0 \in \mathscr{D}(A)$ et, comme $\exp(tA)\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A)$ pour $t \in (-\infty, +\infty)$, on aurait $x_0 = \exp(-t_0A)y_0 \in \mathscr{D}(A)$, contrairement à l'hypothèse.

Démonstration du théorème 5.1. L'unicité de la solution résulte du théorème 2.4. L'existence et l'unicité de l'opérateur de Green résultent du théorème 4.2. Il reste donc à montrer que la fonction $t \to x(t)$ définie par (5.2) est une solution faiblement continûment différentiable du problème (5.1). Dans ce but nous appliquerons la méthode de la réduction au cas $\mathscr{D}(A(t)) = \mathrm{const}$, de même que dans la démonstration du théorème 4.2. Nous admettons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 4.2 et la même convention relative au signe*. Alors, comme il a été prouvé dans la démonstration du théorème 4.2, les conditions $(2.1)^*$ et $(3.0.1)^*$-$(3.0.3)^*$ sont vérifiées. Posons

$$f^*(t) = e^{-(\lambda_0+a^2b2)t}\big(R(t)\big)^{-1}f(t), \qquad x^*(t) = \int_0^t G^*(t,s)f^*(s)\,ds.$$

On vérifie aisément que $t \to f^*(t)$ est alors une fonction à valeurs dans X faiblement continûment différentiable, pour la fonction $t \to x(t)$ définie par (5.2) on a

$$x(t) = e^{(\lambda_0+a^2b^2)t}R(t)x^*(t)$$

et si $t \to x^*(t)$ est une solution faiblement continûment différentiable du problème $(5.1)^*$, alors $t \to x(t)$ est une solution faiblement continûment différentiable du problème (5.1). Pour achever la démonstration il suffit donc d'appliquer (en y ajoutant le signe*) le lemme suivant:

Lemme 5.2. *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 3.0. *Soit* $G(t, s)$ *l'opérateur de Green du problème* (i), *dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème* 3.0, *et soit* $t \to f(t)$ *une fonction à valeurs dans* X *faiblement continûment différentiable sur l'intervalle* $\langle 0, T\rangle$. *Alors la fonction* $t \to x(t)$ *définie par* (5.2) *est une solution faiblement continûment différentiable du problème* (5.1).

Démonstration. De même que dans § 3.2, nous considérons Y comme un espace de Banach. Alors $t \to (1-A(t))^{-1}$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(X, Y)$ faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Par conséquent $t \to g(t) = (1-A(t))^{-1}f(t)$ est une fonction à valeurs dans Y faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. D'après la propriété (3.10.3) de l'opérateur de Green, on a donc

$$x(t) = \int_0^t \frac{d}{ds}\big(e^sG(t,s)\big)e^{-s}g(s)\,ds,$$

d'où, en intégrant par parties, on obtient

$$(5.3)\qquad x(t) = g(t) - G(t,0)g(0) + y(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle,$$

où

$$(5.4)\qquad y(t) = \int_0^t G(t,s)h(s)\,ds, \qquad h(s) = g(s) - \frac{dg(t)}{dt}.$$

Comme $t \to h(t)$ est une fonction à valeurs dans Y faiblement continue, il s'ensuit, d'après la propriété (v) de l'opérateur de Green, que $t \to y(t)$ est une fonction à valeurs dans Y fortement continue et en même temps une fonction à valeurs dans X faiblement continûment différentiable avec

(5.5) $$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t)+h(t) \quad \text{pour} \quad t\in\langle 0, T\rangle.$$

La fonction $t \to g(t)$, étant faiblement continûment différentiable comme fonction à valeurs dans Y, est a fortiori faiblement continûment différentiable comme fonction à valeurs dans X. Enfin, comme $g(0)\in Y$, donc $t \to G(t, 0)g(0)$ est une fonction fortement continue à valeurs dans Y et en même temps une fonction à valeurs dans X fortement continûment différentiable avec

(5.6) $$\frac{d}{dt}G(t, 0)g(0) = A(t)G(t, 0)g(0).$$

Par conséquent, d'après (5.3)-(5.6), $t \to x(t)$ est une fonction à valeurs dans Y fortement continue et en même temps une fonction à valeurs dans X faiblement continûment différentiable avec

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{dg(t)}{dt} - A(t)G(t, 0)g(0)+A(t)y(t)+h(t) = \\ &= A(t)\big(y(t)-G(t, 0)g(0)\big)+g(t) = A(t)x(t)+\big(1-A(t)\big)g(t) = \\ &= A(t)x(t)+f(t).\end{aligned}$$

Le lemme 5.2 est donc démontré.

6. Un théorème d'interpolation

Dans le chapitre 8 nous profiterons du théorème suivant:

THÉORÈME 6.1. *Pour $i = 0, 1$ soit $\mathscr{H}_i$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $((x, y))_i$ et la norme $\|x\|_i = ((x, x))_i^{1/2}$ et soit A_i un opérateur autoadjoint dans $\mathscr{H}_i$ avec $\inf A_i > 0$; pour p réel quelconque désignons par A_i^p leur puissance p-ième, étant un opérateur autoadjoint positif dans $\mathscr{H}_i$. Soit $B\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_0)$ un opérateur tel que pour un $p_0 > 0$ on a $B\mathscr{D}(A_1^{p_0}) \subset \subset \mathscr{D}(A_0^{p_0})$. Alors*

(6.1) $$B\mathscr{D}(A_1^p) \subset \mathscr{D}(A_0^p) \quad \textit{pour} \quad p\in(0, p_0)$$

et

(6.2) $$|B|_p \leqslant \max(|B|_0, |B|_{p_0}) < +\infty \quad \textit{pour} \quad p\in(0, p_0),$$

où

(6.3) $$|B|_p = \sup\{\|A_0^p Bx\|_0 : x\in\mathscr{D}(A_1^p),\ \|A_1^p x\|_1 \leqslant 1\}.$$

Abstraction faite de l'inégalité (6.2), le théorème 6.1 est équivalent au théorème d'interpolation établi par J. L. Lions ([6], th. 4.1, p. 431) comme une conséquence d'un théorème de trace. Nous donnerons plus loin une démonstration du théorème 6.1 qui s'appuiera sur les propriétés des semi-groupes dont les opérateurs générateurs sont $-A_i^p$.

Démonstration du théorème 6.1. Pour tout $p > 0$ l'opérateur A_i^p, étant autoadjoint, est fermé dans $\mathscr{H}_i$, d'où

(6.4) pour tout $p > 0$ l'opérateur $A_0^p B$, défini sur $B^{-1}\mathscr{D}(A_0^p)$, admet un graphe fermé dans $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_0$.

Puisque

(6.5) $$\|A_i^p x\|_i \geqslant c_i^p\|x\|_i, \quad c_i = \inf A_i > 0, \quad \text{pour} \quad p > 0 \text{ et } x\in\mathscr{D}(A_i^p),$$

donc pour tout $p > 0$ l'ensemble $\mathscr{D}(A_i^p)$ muni de la norme $\|x\|_{ip} = \|A_i^p x\|_i$ constitue un espace de Hilbert. Comme, pour $p\in(0, p_0)$, l'opérateur A_1^p est un homéomorphisme de l'espace $\mathscr{D}(A_1^p)$ sur $\mathscr{H}_1$ et $A_1^p\mathscr{D}(A_1^{p_0}) = \mathscr{D}(A_1^{p_0-p})$ est un ensemble dense dans $\mathscr{H}_1$, donc

(6.6) pour tout $p\in(0, p_0)$ l'ensemble $\mathscr{D}(A_1^{p_0})$ est dense dans $\mathscr{D}(A_1^p)$ au sens de la norme $\|\ \|_{1p}$.

Par hypothèse on a $B\mathscr{D}(A_1^{p_0}) \subset \mathscr{D}(A_0^{p_0})$, c'est-à-dire $\mathscr{D}(A_0^{p_0}B) \supset \supset \mathscr{D}(A_1^{p_0})$. D'après (6.4) et (6.5), $A_0^{p_0}B$ est donc un opérateur fermé de l'espace $\mathscr{D}(A_1^{p_0})$ tout entier en l'espace $\mathscr{H}_0$, d'où, en vertu du théorème du graphe fermé, résulte que

(6.7) $$|B|_{p_0} < +\infty.$$

D'après (6.4), (6.6) et (6.7) la démonstration du théorème 6.1 se ramène à démontrer que

(6.8) $$\|A_0^p Bx\|_0 \leqslant \max(|B|_0, |B|_{p_0})\|A_1^p x\|_1 \quad \text{pour} \quad p\in(0, p_0) \text{ et } x\in\mathscr{D}(A_1^{p_0})$$

ce que nous allons faire maintenant.

Pour $i = 0, 1$ soit $\{E_{\lambda,i}\}$ une décomposition de l'unité dans $\mathscr{H}_i$ telle que

$$A_i = \int_{c_i}^{+\infty} \lambda\, dE_{\lambda,i}, \quad c_i = \inf A_i > 0.$$

Si $x\in\mathscr{D}(A_i^{p_0})$, alors

$$\begin{aligned}\big|\|A_i^{p''}x\|_i - \|A_i^{p'}x\|_i\big| &\leqslant \|A_i^{p''}x - A_i^{p'}x\|_i = \\ &= \left(\int_{c_i}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^{p''}-\lambda^{p'}}{\lambda^{p_0}}\right)^2 d\|E_{\lambda,i}A_i^{p_0}x\|_i^2\right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant p', p'' \leqslant p_0,\end{aligned}$$

d'où, en vertu du théorème de Lebesgue sur la convergence bornée, résulte que la fonction $p \to \|A_i^p x\|_i$ est continue sur l'intervalle $\langle 0, p_0\rangle$. Par conséquent, puisque $B\mathscr{D}(A_1^{p_0}) \subset \mathscr{D}(A_0^{p_0})$, (6.9) pour tout $x \in \mathcal{D}(A_1^{p_0})$ les fonctions $p \to \|A_1^p x\|_1$ et $p \to \|A_0^p Bx\|_0$ sont continues sur l'intervalle $\langle 0, p_0 \rangle$.

Comme (6.8) a lieu évidemment pour $p = 0$ et $p = p_0$, donc, d'après (6.9), pour montrer que (6.8) a lieu pour tout $p \in \langle 0, p_0 \rangle$ il suffit d'en appeler au lemme suivant:

LEMME 6.2. *Sous les hypothèses du théorème* 6.1 *soient p' et p'' fixés avec $0 \leqslant p' < p'' \leqslant p_0$ et supposons que l'on a*

$$\|A_0^{p'} Bx\|_0 \leqslant k \|A_1^{p'} x\|_1 \quad \textit{et} \quad \|A_0^{p''} Bx\|_0 \leqslant k \|A_1^{p''} x\|_1, \tag{6.10}$$
$$k = \mathrm{const}, \quad \textit{pour} \quad x \in \mathcal{D}(A_1^{p_0}).$$

Alors

$$\|A_0^{(p'+p'')/2} Bx\|_0 \leqslant k \|A_1^{(p'+p'')/2} x\|_1 \quad \textit{pour} \quad x \in \mathcal{D}(A_1^{p_0}). \tag{6.11}$$

Démonstration. Pour $i = 0, 1$ et tout $p > 0$ fixé $-A_i^p$ est l'opérateur générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs hermitiens dans l'espace $\mathcal{H}_i$. On a

$$\exp(-tA_i^p) = \int_{c_i}^{+\infty} e^{-t\lambda^p} dE_{\lambda,i},$$

où $\{E_{\lambda,i}\}$ est une décomposition de l'unité dans $\mathcal{H}_i$ telle que

$$A_i = \int_{c_i}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda,i}, \qquad c_i = \inf A_i > 0.$$

En utilisant cette représentation on vérifie aisément que, pour $i = 0, 1$, $p > 0$ et $q \geqslant 0$ fixés, $t \to \exp(-tA_i^p)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}(A_i^q), \mathcal{D}(A_i^q))$ fortement continue sur l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$, avec $\exp(-\infty A_i^p) = 0$ et fortement continûment différentiable sur l'intervalle $(0, +\infty)$, avec

$$\frac{d}{dt} \exp(-tA_i^p) = -A_i^p \exp(-tA_i^p).$$

De plus, pour $i = 0, 1$, $p > 0$, $q \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$ fixés, l'opérateur borné $\exp(-tA_i^p)$ est commutable avec l'opérateur A_i^q. Par conséquent, si p' et p'' sont fixés avec $0 \leqslant p' < p'' \leqslant p_0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \|A_i^{(p''-p')/2} \exp(-tA_i^{p''-p'}) x\|_i^2 dt = \tag{6.12}$$
$$= \Big(\Big(\int_{+0}^{+\infty} A_i^{p''-p'} \exp(-2tA_i^{p''-p'}) x dt, x\Big)\Big)_i = \frac{1}{2} \|x\|_i^2 \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{H}_i,\ i = 0, 1,$$

et, d'après 1.1.2 et 1.3.2,

$$t \to F(t) = -A_0^{(p''+p')/2} \exp(-tA_0^{p''-p'}) B \exp(-tA_1^{p''-p'})$$

est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}(A_1^{p_0}), \mathcal{H}_0)$ fortement continue sur l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$, avec $F(0) = -A_0^{(p'+p'')/2} B$ et $F(+\infty) = 0$, et fortement continûment différentiable sur l'intervalle $(0, +\infty)$ avec $dF(t)/dt = -A_0^{(p''-p')/2} \exp(-tA_0^{p''-p'}) G(t)$, où

$$G(t) = (A_0^{p''} B + A_0^{p'} B A_1^{p''-p'}) \exp(-tA_1^{p''-p'}). \tag{6.13}$$

Par conséquent

$$A_0^{(p'+p'')/2} Bx = -\lim_{s \to +0,\, t \to +\infty} \int_s^t A_0^{(p''-p')/2} \exp(-\tau A_0^{p''-p'}) G(\tau) x d\tau \tag{6.14}$$
$$\text{pour} \quad x \in \mathcal{D}(A_1^{p_0})$$

au sens de la norme dans $\mathcal{H}_0$. D'après (6.10) et (6.13) on a

$$\|G(t)x\|_0 \leqslant 2k \|A_1^{(p''-p')/2} \exp(-tA_1^{p''-p'}) A_1^{(p'+p'')/2} x\|_1 \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{D}(A_1^{p_0}).$$

En vertu de (6.14) et (6.12), pour tout $x \in \mathcal{D}(A_1^{p_0})$ et $y \in \mathcal{H}_0$, on a

$$\Big|\big((A_0^{(p'+p'')/2} Bx, y)\big)_0\Big| = \Big| \int_0^{+\infty} \big((G(t)x, A_0^{(p''-p')/2} \exp(-tA_0^{p''-p'}) y)\big)_0 dt \Big|$$
$$\leqslant 2k \Big(\int_{+0}^{+\infty} \|A_1^{(p''-p')/2} \exp(-tA_1^{p''-p'}) A_1^{(p'+p'')/2} x\|_1^2 dt)^{1/2} \Big) \times$$
$$\times \Big(\int_0^{+\infty} \|A_0^{(p''-p')/2} \exp(-tA_0^{p''-p'}) y\|_0^2 dt \Big)^{1/2} = k \|A_1^{(p'+p'')/2} x\|_1 \|y\|_0,$$

d'où (6.11).

7. Famille $A_0(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$, d'opérateurs autoadjoints positifs avec $\mathcal{D}(A_0^{1/2}(t)) = \mathrm{const}$

Ce chapitre constitue une préparation au chapitre 8 dans lequel nous nous occuperons d'un problème traité dans le livre de Lions [7]. D'où l'idée de définir les opérateurs $A_0(t)$ au moyen des conditions (7.10)-(7.11). Dans tout ce chapitre nous supposerons vérifiées les hypothèses suivantes:

Hypothèses 7.1. H est un espace de Hilbert, H^+ est un sous-ensemble linéaire dense de l'espace H et, pour tout $t \in \langle 0, T \rangle$, $((\ ))_t^+$ est un produit scalaire défini sur H^+ qui en fait un espace de Hilbert H_t^+, contenu dans H algébriquement et topologiquement. Nous supposons que pour tout $x \in H^+$ et tout $y \in H^+$ la fonction $t \to ((x, y))_t^+$ est n fois, $n \geqslant 1$, continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T \rangle$.

Nous posons $\|x\|_t^+ = ((x, x))_t^{+1/2}$ pour $x \in H^+$. Si $x \in H$ et $y \in H$, $((x, y))$ désigne leur produit scalaire dans H et $\|x\| = ((x, x))^{1/2}$.

LEMME 7.2. *L'égalité*

$$(7.1)\qquad ((x,y))_t^+ = ((Q(t)x,y))_0^+ \quad \textit{pour} \quad x\in H^+,\ y\in H^+ \ \textit{et} \ t\in\langle 0,T\rangle$$

définit une fonction $t\to Q(t)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(H_0^+,H_0^+)$ n fois faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0,T\rangle$. Pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ fixé $Q(t)$ est un opérateur hermitien avec $\inf Q(t)>0$ dans H_0^+.

Démonstration. Comme $H_0^+\subset H$ et $H_t^+\subset H$ algébriquement et topologiquement, donc, pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$, les normes $\|\ \|_0^+$ et $\|\ \|_t^+$ sont équivalentes, c'est-à-dire, on a $a_t^{-1}\|x\|_0^+\leqslant\|x\|_t^+\leqslant a_t\|x\|_0^+$, $a_t=\mathrm{const}\geqslant 1$, pour $x\in H^+$. Par conséquent, pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ fixé, $x,y\to((x,y))_t^+$ est une forme hermitienne continue sur $H_0^+\times H_0^+$ et (7.1) définit un opérateur $Q(t)$ hermitien avec $\inf Q(t)\geqslant a_t^{-2}$ dans H_0^+. Les propriétés de la différentiabilité de la fonction $t\to Q(t)$ sont évidentes.

LEMME 7.3. *Il existe une constante $a\geqslant 1$ telle que*

$$a^{-1}\|x\|_0^+\leqslant\|x\|_t^+\leqslant a\|x\|_0^+ \quad \textit{et} \quad \left|\frac{d}{dt}\|x\|_t^+\right|\leqslant a\|x\|_t^+$$

pour $x\in H^+$ et $t\in\langle 0,T\rangle$.

Démonstration. Pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ l'opérateur $Q(t)$, étant hermitien avec $\inf Q(t)>0$ dans H_0^+, est un opérateur inversible de H^+ sur H^+. D'après 1.3.2, $t\to\big(Q(t)\big)^{-1}$ est donc une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(H_0^+,H_0^+)$ n fois faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0,T\rangle$. En vertu du théorème de Banach-Steinhaus il existe donc une constante $m\geqslant 1$, telle que

$$\|Q(t)x\|_0^+\leqslant m\|x\|_0^+,\qquad \left\|\big(Q(t)\big)^{-1}x\right\|_0^+\leqslant m\|x\|_0^+\qquad\text{et}\qquad \left\|\frac{dQ(t)}{dt}x\right\|_0^+\leqslant m\|x\|_0^+$$

pour $x\in H^+$ et $t\in\langle 0,T\rangle$. Dès lors, pour $x\in H^+$ et $t\in\langle 0,T\rangle$, on a

$$\|x\|_t^{+2}=\big((Q(t)x,x)\big)_0^+\leqslant m\|x\|_0^{+2}$$

et

$$\begin{aligned}\|x\|_0^{+2}&=\Big(\big(Q(t)x,\big(Q(t)\big)^{-1}x\big)\Big)_0^+=\Big(\big(x,\big(Q(t)\big)^{-1}x\big)\Big)_t^+\leqslant\\ &\leqslant\|x\|_t^+\left\|\big(Q(t)\big)^{-1}x\right\|_t^+=\|x\|_t^+\Big(\Big(\big(Q(t)\big)^{-1}x,\big(Q(t)\big)^{-1}x\Big)\Big)_t^{+1/2}=\\ &=\|x\|_t^+\Big(\big(x,\big(Q(t)\big)^{-1}x\big)\Big)_0^{+1/2}\leqslant\|x\|_t^+(m\|x\|_0^{+2})^{1/2}.\end{aligned}$$

Par conséquent pour $x\in H^+$ et $t\in\langle 0,T\rangle$, on a

$$m^{-1/2}\|x\|_0^+\leqslant\|x\|_t^+\leqslant m^{1/2}\|x\|_0^+$$

et

$$2\|x\|_t^+\left|\frac{d}{dt}\|x\|_t^+\right|=\left|\frac{d}{dt}((x,x))_t^+\right|=\left|\left(\left(\frac{dQ(t)}{dt}x,x\right)\right)_0^+\right|\leqslant m\|x\|_0^{+2}\leqslant m^2\|x\|_t^{+2},$$

d'où

$$\left|\frac{d}{dt}\|x\|_t^+\right|\leqslant\frac{1}{2}m^2\|x\|_t^+.$$

Il suffit donc d'admettre $a=\max(m^{1/2},\frac{1}{2}m^2)$.

LEMME 7.4. *Pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ l'égalité*

$$(7.2)\qquad ((x,y))=\big((J_0(t)x,y)\big)_t^+\quad\textit{pour}\quad x\in H\ \textit{et}\ y\in H^+$$

définit un opérateur $J_0(t)\in\mathscr{L}(H,H_t^+)$ inversible, hermitien positif comme opérateur appartenant à $\mathscr{L}(H,H)$ et tel que $J_0(t)H^+$ est un ensemble dense dans l'espace H_t^+. On a de plus

$$(7.3)\qquad \|J_0(t)x\|_t^+=\sup\{|((x,y))|: y\in H^+,\ \|y\|_t^+\leqslant 1\}$$

pour $x\in H$ et $t\in\langle 0,T\rangle$.

Nous nous permettrons d'omettre la démonstration.

LEMME 7.5. *Pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ posons*

$$(7.4)\qquad \|x\|_t^-=\|J_0(t)x\|_t^+\quad\textit{pour}\quad x\in H$$

et désignons par H_t^- la complétion de H au sens de la norme $\|\ \|_t^-$. Alors:

(7.5) *pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ on a $H\subset H_t^-=H_0^-$ algébriquement et topologiquement;*

(7.6) *pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ l'opérateur $J_0(t)$ peut être prolongé par continuité à un opérateur $J(t)$ isométrique de H_t^- sur H_t^+ et on a $J(t)=\big(Q(t)\big)^{-1}J(0)$ pour $t\in\langle 0,T\rangle$;*

(7.7) *pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$, H_t^- est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$((x,y))_t^-=\big((J(t)x,J(t)y)\big)_t^+=\Big(\Big(\big(Q(t)\big)^{-1}J(0)x,\ J(0)y\Big)\Big)_0^+$$

et on a $\|x\|_t^-=((x,x))_t^{-1/2}$ pour $t\in\langle 0,T\rangle$ et $x\in H_t^-$;

(7.8) *il existe une constante $\beta\geqslant 1$ telle que*

$$\beta^{-1}\|x\|_0^-\leqslant\|x\|_t^-\leqslant\beta\|x\|_0^-\quad\textit{et}\quad\left|\frac{d}{dt}\|x\|_t^-\right|\leqslant\beta\|x\|_t^-$$

pour $x\in H_0^-$ et $t\in\langle 0,T\rangle$.

Démonstration. (7.5) résulte de (7.3) et du lemme 7.3. (7.6) et (7.7) résultent de (7.1)-(7.5). Enfin (7.8) résulte de (7.7) et du lemme 7.3 par un raisonnement analogue à celui qui sert à démontrer le lemme 7.3.

D'accord avec (7.5), nous écrivons simplement H^- au lieu de H_t^-, si on fait abstraction des propriétés métriques de H_t^-.

LEMME 7.6. *On a $|((x,y))|\leqslant\|x\|_t^+\|y\|_t^-$ pour $x\in H^+$, $y\in H$ et $t\in\langle 0,T\rangle$, donc la forme $x,y\to((x,y))$ peut être prolongée par continuité à une forme sesquilinéaire définie sur $(H\times H)\cup(H^+\times H^-)\cup(H^-\times H^+)$ telle que $((x,y))=\overline{((y,x))}$ dans cet ensemble et que $|((x,y))|\leqslant\|x\|_t^+\|y\|_t^-$ pour $x\in H^+$, $y\in H^-$ et $t\in\langle 0,T\rangle$. On a alors*

$$(7.9)\qquad ((x,y))=((x,J(t)y))_t^+=\Big(\big((J(t)^-)^1x,y\big)\Big)_t^-$$

pour $x\in H^+$, $y\in H^-$ et $t\in\langle 0,T\rangle$.

La démonstration étant facile, nous l'omettons.

LEMME 7.7. *Pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ les conditions*

$$(7.10)\quad \mathscr{D}(A_0(t)) = \{x : x\in H^+, \sup\{|((x,y))_t^+| : y\in H^+, \|y\|\leqslant 1\} < +\infty\},$$

$$(7.11)\quad ((A_0(t)x, y)) = ((x,y))_t^+ \quad \text{pour} \quad x\in\mathscr{D}(A_0(t)) \text{ et } x\in H^+$$

définissent un opérateur $A_0(t)$ inversible, autoadjoint positif dans l'espace H. On a

$$(7.12)\quad \mathscr{D}(A_0(t)) = (Q(t))^{-1}\mathscr{D}(A_0(0)) \quad \text{et} \quad A_0(t) = (J_0(t))^{-1} = A_0(0)Q(t)$$

pour $t\in\langle 0,T\rangle$.

Exemple. Soit $H = L^2(0,1)$, $H^+ = \{\xi\to x(\xi) : x(\ )$ est absolument continue sur $\langle 0,1\rangle$, $x'(\ )\in L^2(0,1)$, $x(1) = 0\}$ et

$$((x,y))_t = \int_0^1 x'(\xi)\overline{y'(\xi)}\,d\xi + a(t)x(0)\overline{y(0)},$$

où $t\to a(t)$ est une fonction réelle non négative n fois continûment différentiable sur $\langle 0,T\rangle$. Alors les hypothèses 7.1 sont vérifiées, $\mathscr{D}(A_0(t)) = \{\xi\to x(\xi) : x(\ )\in C^1(0,1),\ x'(\ )$ est absolument continue sur $\langle 0,1\rangle$, $x''(\ )\in L^2(0,1)$, $x(1) = 0$, $x'(0) = a(t)x(0)\}$, $(A_0(t)x)(\xi) = -x''(\xi)$ pour $x(\ )\in\mathscr{D}(A_0(t))$ et

$$(Q(t)x)(\xi) = x(\xi) + x(0)\frac{a(t)-a(0)}{a(0)+1}(1-\xi).$$

Démonstration du lemme 7.7. Comme $H_t^+\subset H$ algébriquement et topologiquement et comme H^+ est dense dans H, l'opérateur $A_0(t)$ est univoquement défini. Si $A_0(t)x = 0$, on a $((x,x))_t^+ = ((A_0(t)x, x)) = 0$, d'où $x = 0$, donc l'opérateur $A_0(t)$ est inversible. En vertu du lemme 7.4 on a $(J_0(t))^{-1}\subset A_0(t)$, d'où, puisque $\mathscr{D}(J_0(t)) = H$, résulte que $A_0(t) = (J_0(t))^{-1}$. Par conséquent, en vertu du lemme 7.4, l'opérateur $A_0(t)$ est symétrique positif dans H, avec $\mathscr{R}(A_0(t)) = H$ et avec $\mathscr{D}(A_0(t))$ dense dans H_t^+, donc a fortiori dense dans H; il résulte de ces propriétés que $A_0(t)$ est un opérateur autoadjoint dans H. Les égalités (7.12) résultent de l'égalité $A_0(t) = (J_0(t))^{-1}$, ainsi démontrée, et de (7.6).

LEMME 7.8. *Pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ désignons par $A(t)$ la fermeture de l'opérateur $A_0(t)$ dans l'espace H_t^-. Alors $A(t)$ est un opérateur inversible, autoadjoint positif dans l'espace H_t^-, et on a*

$$(7.13)\quad \mathscr{D}(A(t)) = H^+ \quad \text{et} \quad A(t) = (J(t))^{-1} = A(0)Q(t)$$

pour $t\in\langle 0,T\rangle$.

Démonstration. En effet, $J(t)$ est la fermeture de $J_0(t)$ dans H_t^- et $A_0(t) = (J_0(t))^{-1}$, donc $A(t) = (J(t))^{-1}$ et par conséquent, d'après (7.6), on a $\mathscr{D}(A(t)) = H^+$ et $A(t) = A(0)Q(t)$. D'après (7.7) et (7.9) $((A(t)x, y))_t^- = ((J(t)A(t)x, J(t)y))_t^+ = ((x, J(t)y))_t^+ = ((x,y))$ et d'une façon analogue $((x, A(t)y))_t^- = ((x,y))$ pour $x\in H^+$ et $y\in H^+$, donc $A(t)$ est un opérateur symétrique positif dans H_t^-. D'où, comme $\mathscr{D}(A(t)) = \mathscr{R}(J(t)) = H^+$ est un ensemble dense dans H_t^- et $\mathscr{R}(A(t)) = \mathscr{D}(J(t)) = H^-$, $A(t)$ est un opérateur autoadjoint dans H_t^-.

LEMME 7.9. *Pour tout $t\in\langle 0,T\rangle$ posons*

$$(7.14)\quad \mathscr{D}(A_1(t)) = \{x : x\in\mathscr{D}(A_0(t)),\ A_0(t)x\in H^+\}, \qquad A_1(t)x = A_0(t)x$$

pour $x\in\mathscr{D}(A_1(t))$.

Alors $A_1(t)$ est un opérateur autoadjoint positif dans H_t^+ et on a

$$(7.15)\quad \mathscr{D}(A_1(t)) = (Q(t))^{-1}\mathscr{D}(A_1(0)) \quad \text{et} \quad A_1(t) = A_1(0)Q(t)$$

pour $t\in\langle 0,T\rangle$.

Démonstration. Pour $x\in\mathscr{D}(A_1(t))$ et $y\in\mathscr{D}(A_1(t))$, d'après (7.11), on a $((A_1(t)x, y))_t^+ = ((A_1(t)x, A_1(t)y)) = ((x, A_1(t)y))_t^+$, donc $A_1(t)$ est un opérateur symétrique positif dans H_t^+. Comme $A_0(t) = (J_0(t))^{-1}$, donc d'après le lemme 7.4, $\mathscr{D}(A_1(t)) = J_0(t)H^+$ est un ensemble dense dans H_t^+ et $\mathscr{R}(A_1(t)) = H^+$. Par conséquent $A_1(t)$ est un opérateur autoadjoint dans H_t^+. Les égalités (7.15) résultent de (7.12).

LEMME 7.10. *Pour $t\in\langle 0,T\rangle$ et p réel soient $A^p(t)$, $A_0^p(t)$ et $A_1^p(t)$ les puissances p-ièmes positives des opérateurs $A(t)$, $A_0(t)$ et $A_1(t)$ dans H_t^-, H et H_t^+ respectivement. Alors on a $\mathscr{D}(A^{1/2}(t)) = H$, $\mathscr{D}(A(t)) = \mathscr{D}(A_0^{1/2}(t)) = H^+$, $((x,y)) = ((A^{1/2}(t)x, A^{1/2}(t)y))_t^-$ pour $x\in H$ et $y\in H$, $((x,y))_t^+ = ((A_0^{1/2}(t)x, A_0^{1/2}(t)y))$ pour $x\in H^+$ et $y\in H^+$, $A_0^p(t)$ est la fermeture de $A_1^p(t)$ dans H et $A^p(t)$ est la fermeture de $A_0^p(t)$ dans H_t^-.*

Nous nous permettons d'omettre la démonstration, qui s'obtient facilement en s'appuyant sur les lemmes 7.6-7.9.

8. Opérateur de Green du problème du type de Schrödinger

Dans ce chapitre il s'agira du problème considéré dans [7], chapitre VIII, § 5, p. 167-172. Nous y supposons vérifiées les hypothèses 7.1 et conservons toutes les notations introduites au chapitre 7. Nous considérons le problème de Cauchy abstrait

$$(8.1)\quad \frac{dx(t)}{dt} = -iA(t)x(t) \quad \text{pour} \quad t\in\langle 0,T\rangle, \qquad x(0) = x_0.$$

THÉORÈME 8.1. *Sous les hypothèses 7.1, avec $n\geqslant 1$, il existe un opérateur de Green unique $G(t,s)$ du problème (8.1), ayant les propriétés suivantes:*

(8.2) $t, s \to G(t, s)$ *est une fonction à valeurs dans* $\mathscr{L}(H_0^-, H_0^-)$ *fortement continue sur le carré* $0 \leqslant s, t \leqslant T$;

(8.3) $G(s, s) = 1$ *pour tout* $s \in \langle 0, T\rangle$;

(8.4) $G(t, s)G(s, r) = G(t, r)$ *pour* $0 \leqslant r, s, t \leqslant T$;

(8.5) $G(t, s)H^+ = H^+$ *pour* $0 \leqslant s, t \leqslant T$ *et* $t, s \to G(t, s)$ *est une fonction à valeurs dans* $\mathscr{L}(H_0^+, H_0^+)$ *fortement continue sur le carré* $0 \leqslant s, t \leqslant T$;

(8.6) $t, s \to G(t, s)$ *est une fonction à valeurs dans* $\mathscr{L}(H_0^+, H_0^-)$ *fortement continûment différentiable sur le carré* $0 \leqslant s, t \leqslant T$ *et, dans ce sens, on a*

$$\frac{d}{dt}G(t, s) = -iA(t)G(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds}G(t, s) = iG(t, s)A(s)$$

pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$;

(8.7) *pour* $t \in \langle 0, T\rangle$ *et* $s \in \langle 0, T\rangle$ *quelconques fixés* $G(t, s)$ *constitue un opérateur unitaire dans l'espace* H *et* $t, s \to G(t, s)$ *est une fonction à valeurs dans* $\mathscr{L}(H, H)$ *fortement continue sur le carré* $0 \leqslant s, t \leqslant T$.

Si les hypothèses 7.1 *sont vérifiées avec* $n \geqslant 2$, *on a de plus*:

(8.8) $G(t, s)\mathscr{D}(A_1(s)) = \mathscr{D}(A_1(t))$ *pour* $0 \leqslant s, t \leqslant T$ *et pour tout* $s \in \langle 0, T\rangle$ *et tout* $x \in \mathscr{D}(A_1(s))$ *la fonction* $t \to G(t, s)x$ *est continûment différentiable au sens de la norme dans* H_0^+ *sur l'intervalle* $\langle 0, T\rangle$ *et satisfait dans cet intervalle à l'équation*

$$\frac{d}{dt}G(t, s)x = -iA_1(t)G(t, s)x;$$

(8.9) $G(t, s)\mathscr{D}(A_0(s)) = \mathscr{D}(A_0(t))$ *pour* $0 \leqslant s, t \leqslant T$ *et pour tout* $s \in \langle 0, T\rangle$ *et tout* $x \in \mathscr{D}(A_0(s))$ *la fonction* $t \to G(t, s)x$ *est continûment différentiable au sens de la norme dans* H *sur l'intervalle* $\langle 0, T\rangle$ *et satisfait dans cet intervalle à l'équation*

$$\frac{d}{dt}G(t, s)x = -iA_0(t)G(t, s)x.$$

Démonstration des propriétés (8.2)-(8.7). Posons $X = H_0^-$, $Y = H^+$, $\| \|_t = \| \|_t^-$, $A(t) = -iA(t)$ et $R(t) \equiv 1$. Alors, d'après (7.8), la condition (2.3) est vérifiée. La condition (4.1) résulte de (7.13). Pour tout $t \in \langle 0, T\rangle$ l'opérateur $A(t)$ étant autoadjoint dans H_t^-, la condition $(4.2)_0$ est vérifiée (l'argumentation est la même que dans la démonstration du théorème de Stone due à Yosida [12], p. 20). Enfin, en vertu de (7.13) et du lemme 7.2, $t \to A(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(H_0^+, H_0^-)$ n fois, $n \geqslant 1$, faiblement continûment différentiable, et les conditions (4.3) et (4.4), avec $R(t) \equiv 1$, sont vérifiées. Le théorème 4.4 et la remarque 4.5 assurent donc l'existence et l'unicité de l'opérateur de Green $G(t, s)$ du problème (8.1), ayant les propriétés (8.2)-(8.6).

D'après (8.6), (7.13) et le lemme 7.6, pour $x \in H^+$ et $0 \leqslant s, t \leqslant T$ quelconques fixés et pour $h \to 0$ avec $h \neq 0$ et $0 \leqslant t+h \leqslant T$, on a

$$\frac{1}{h}\big(G(t+h, s)-G(t, s)\big)x \to -iA(t)G(t, s)$$

au sens de la norme dans H_0^- et $G(t+h, s)x \to G(t, s)x$ au sens de la norme dans H_0^+, d'où, en posant $y = G(t, s)x$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(\|G(t+h, s)x\|^2 - \|G(t, s)x\|^2\big) &= \\ &= \Big(\Big(\frac{1}{h}\big(G(t+h, s)-G(t, s)\big)x, G(t+h, s)x\Big)\Big) + \\ &\quad + \Big(\Big(G(t, s)x, \frac{1}{h}\big(G(t+h, s)-G(t, s)\big)x\Big)\Big) \to \\ &\to -i((A(t)y, y)) + i((y, A(t)y)) = \\ &= -i((J(t)A(t)y, y))_t^+ + i((y, J(t)A(t)y))_t^+ = \\ &= -i((y, y))_t^+ + i((y, y))_t^+ = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent pour $s \in \langle 0, T\rangle$ et $x \in H^+$ quelconques fixés on a

$$\frac{d}{dt}\|G(t, s)x\|^2 = 0 \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle,$$

d'où $\|G(t, s)x\| = \|G(s, s)x\| = \|x\|$ pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$ et $x \in H^+$. D'après (8.4) et (8.5), comme H^+ est dense dans H et $H \subset H_0^-$ algébriquement et topologiquement, il en résulte que, pour tout $s \in \langle 0, T\rangle$ et tout $t \in \langle 0, T\rangle$, on a $G(t, s)H = H$ et $G(t, s)$ constitue un opérateur unitaire dans H. D'après (8.5) la fonction $t, s \to G(t, s)x$ est, pour tout $x \in H^+$, continue sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$ au sens de la norme dans H_0^+, donc a fortiori continue au sens de la norme dans H, d'où, H^+ étant dense dans H et les opérateurs $G(t, s)$, $0 \leqslant s, t \leqslant T$, étant unitaires dans H, résulte que $t, s \to G(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(H, H)$ fortement continue sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant T$. La propriété (8.7) est donc démontrée.

Démonstration de (8.8). Nous allons maintenant considérer (8.1) comme un problème dans l'espace H_0^+. Nous posons $X = H_0^+$, $\| \|_t = \| \|_t^+$, $A(t) = -iA_1(t)$ et $R(t) = (Q(t))^{-1}$. Alors, en vertu du lemme 7.3, la condition (2.3) est vérifiée. Comme, d'accord avec le lemme 7.9, pour tout $t \in \langle 0, T\rangle$ l'opérateur $A_1(t)$ est autoadjoint dans H_t^+, les conditions (4.1) et $(4.2)_0$ sont donc vérifiées (l'argumentation est encore la même que dans [12], p. 20). En vertu du lemme 7.2, de 1.4.2 et de 1.3.2, $t \to R(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(H_0^+, H_0^+)$ n fois, $n \geqslant 2$, faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. D'après (7.15) on a $(R(t))^{-1}\mathscr{D}(A(t)) = Q(t)\mathscr{D}(A_1(t)) = \mathscr{D}(A_1(0))$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$, la condition (4.3) est donc vérifiée. Enfin, d'après (7.15) et le lemme 7.2, pour tout $x \in \mathscr{D}(A_1(0))$ fixé, $t \to (R(t))^{-1}A(t)R(t)x = -iQ(t)A_1(0)x$ est une fonction à valeurs dans H_t^+ n fois, $n \geqslant 2$, faiblement continûment différentiable sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, donc la condition (4.4) est véirfiée. Les hypothèses 4.3 sont ainsi vérifiées et le théorème 4.4 assure l'existence et l'unicité de l'opérateur de Green $G_0(t, s)$ ayant les propriétés $(\text{ii})_0$-$(\text{v})_0$. D'après l'unicité, résultant de l'inégalité (2.10), des solutions du problème (8.1), on a $G_0(t, s) \subset G(t, s)$ pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$ (nous nous permettrons d'omettre les détails) et par suite (8.8) résulte immédiatement de la propriété $(\text{v})_0$ de l'opérateur de Green $G_0(t, s)$.

Pour établir la propriété (8.9) de l'opérateur de Green $G(t, s)$ nous nous appuierons sur le lemme suivant:

LEMME 8.2. *On a*

$$G(t, s)\mathscr{D}(A_0(s)) \subset \mathscr{D}(A_0(t)) \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant s,\ t \leqslant T \tag{8.10}$$

et, pour tout $s \in \langle 0, T\rangle$, il existe une constante $M_s \geqslant 1$ telle que

$$\|A_0(t)G(t, s)x\| \leqslant M_s\|A_0(s)x\| \quad \textit{pour} \quad x \in \mathscr{D}(A_0(s)) \ \textit{et}\ t \in \langle 0, T\rangle. \tag{8.11}$$

Démonstration de (8.9). D'après (8.3), (8.4) et (8.10) on a $\mathscr{D}(A_0(s)) = G(s, t)G(t, s)\mathscr{D}(A_0(s)) \subset G(s, t)\mathscr{D}(A_0(t))$ pour $0 \leqslant s,\ t \leqslant T$, d'où, avec (8.10), $G(t, s)\mathscr{D}(A_0(s)) = \mathscr{D}(A_0(t))$ pour $0 \leqslant s,\ t \leqslant T$. Fixons maintenant un $s \in \langle 0, T\rangle$ et un $x \in \mathscr{D}(A_0(s))$. Comme H^+ est dense dans H, il existe une suite y_n, $n = 1, 2, \ldots$, telle que $y_n \in H^+$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\|y_n - A_0(s)x\| \to 0$ avec $n \to \infty$. Alors $x_n = (A_0(s))^{-1}y_n \in \mathscr{D}(A_1(s))$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et puisque, en vertu de (7.12) et du lemme 7.4, $(A_0(s))^{-1} = J_0(s) \in \mathscr{L}(H, H_0^+) \subset \mathscr{L}(H, H)$, donc $\|x_n - x\| \to 0$ avec $n \to \infty$. Comme $H_0^+ \subset H$ algébriquement et topologiquement, donc, d'après (8.8), les fonctions $t \to x_n(t) = G(t, s)x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sont continûment différentiables sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ au sens de la norme dans H et on a $dx_n(t)/dt = -iA_0(t)G(t, s)x_n$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$ et $n = 1, 2, \ldots$ D'après (8.7), $\|G(t, s)x - x_n(t)\| = \|x_n - x\|$ et, d'après (8.11),

$$\left\| -iA_0(t)G(t, s)x - \frac{dx_n(t)}{dt} \right\| =$$

$$= \|A_0(t)G(t, s)(x_n - x)\| \leqslant M_s\|A_0(s)(x_n - x)\| = M_s\|y_n - A_0(s)x\|.$$

Par conséquent, en vertu du théorème sur la dérivation terme à terme, pour tout $s \in \langle 0, T\rangle$ et tout $x \in \mathscr{D}(A_0(s))$, la fonction $t \to G(t, s)x$ est continûment différentiable au sens de la norme dans H sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$

et on a

$$\frac{d}{dt}G(t, s)x = -iA_0(t)G(t, s)x$$

pour $t \in \langle 0, T\rangle$. La propriété (8.9) est donc démontrée.

Démonstration du lemme 8.2. Comme $\mathscr{D}(A_0^{1/2}(t)) = H^+$ d'après le lemme 7.10, on a, d'accord avec (7.14),

$$\mathscr{D}(A_1(t)) = \mathscr{D}(A_0^{3/2}(t)) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle \tag{8.12}$$

et, comme $\|x\|_t^+ = \|A_0^{1/2}(t)x\|$ d'après le lemme 7.10, donc

$$\|A_0^{3/2}(t)x\| = \|A_1(t)x\|_t^+ \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, T\rangle \quad \text{et} \quad x \in \mathscr{D}(A_1(t)). \tag{8.13}$$

D'après (8.8) et (8.12) on a

$$G(t, s)\mathscr{D}(A_0^{3/2}(s)) = \mathscr{D}(A_0^{3/2}(t)) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s,\ t \leqslant T. \tag{8.14}$$

En vertu de (7.12) et du lemme 7.9, pour tout $t \in \langle 0, T\rangle$, l'opérateur $A_1(t)$ est inversible et fermé dans H_t^+ avec $\mathscr{R}(A_1(t)) = H^+$, donc l'ensemble $\mathscr{D}(A_1(t))$ muni de la norme $|||x|||_t = \|A_1(t)x\|_t^+$ constitue un espace de Hilbert contenu dans H_0^+ algébriquement et topologiquement. Comme, d'après (8.8), pour $0 \leqslant s, t \leqslant T$ quelconques fixés, $G(t, s) \in \mathscr{L}(H_0^+, H_0^+)$ et $G(t, s)\mathscr{D}(A_1(s)) = \mathscr{D}(A_1(t))$, on a, en vertu du théorème du graphe fermé, $G(t, s) \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(A_1(s)), \mathscr{D}(A_1(t)))$ et par conséquent $A_1(t)G(t, s) \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(A_1(s)), H_0^+)$. Dans la suite nous supposerons $s \in \langle 0, T\rangle$ fixé. Il résulte de (8.8) que $t \to A_1(t)G(t, s)$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{D}(A_1(s)), H_0^+)$ fortement continue sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus il existe donc une constante $m_s \geqslant 1$, telle que $\|A_1(t)G(t, s)x\|_0^+ \leqslant m_s|||x|||_s = m_s\|A_1(s)x\|_s^+$ pour $x \in \mathscr{D}(A_1(s))$ et $t \in \langle 0, T\rangle$. D'où, d'après (8.12), (8.13) et le lemme 7.3, on obtient que

$$\|A_0^{3/2}(t)G(t, s)x\| \leqslant M_s\|A_0^{3/2}(s)x\| \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{D}(A_0^{3/2}(s)) \ \text{et}\ t \in \langle 0, T\rangle, \tag{8.15}$$

où $M_s = am_s$. D'après (8.7), (8.14) et (8.15), pour démontrer (8.10) et (8.11) il suffit d'appliquer le théorème 6.1 pour $p_0 = \frac{3}{2}$, $p = 1$, $\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_1 = H$, $A_0 = A_0(t)$, $A_1 = A_0(s)$ et $B = G(t, s)$.

Le lemme 8.2 est donc établi et la démonstration du théorème 8.1 est ainsi achevée.

Remarque. Sous les hypothèses 7.1 avec $n \geqslant 1$, supposons donnée une fonction $t \to u(t)$ à valeurs dans H_0^+, nulle pour $t < 0$ et intégrable au sens de Bochner sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, vérifiant

$$i((u(t), v))_t^+ + \frac{d}{dt}((u(t), v)) = ((u_0, v))\,\delta$$

pour tout $v \in H^+$, au sens des distributions sur $(-\infty, T)$, où $u_0 \in H^-$ est fixé. Comme $((x, y))_t^+ = ((A(t)x, y))$ pour $t \in \langle 0, T\rangle$, $x \in H^+$ et $y \in H^+$, d'après (7.9) et (7.13), on déduit alors que $t \to A(t)u(t)$ est une fonction à valeurs dans H_0^- intégrable au sens de Bochner sur l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et que

$$u(t) = u_0 - i\int_0^t \Lambda(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

dans H_0^- pour presque tout $t\in\langle 0, T\rangle$. L'hypothèse 2.2 étant vérifiée pour $X = H_0^-$, $\|\ \|_t = \|\ \|_t^-$, $k = \beta$ (figurant dans (7.8)), $A(t) = -i\Lambda(t)$ et $\lambda_0 = 0$, en vertu du théorème 2.4 on a donc $\|u(t)\|_t^- \leqslant e^{\beta t}\|u_0\|_0^-$ presque partout dans $\langle 0, T\rangle$. On obtient ainsi une variante (consistant à remplacer l'hypothèse „$u(\ )\in L^2(-\infty, T; H_0^+)$" par la suivante: „$u(\ )\in L^1(-\infty, T; H_0^+)$") du théorème d'unicité exposé dans [7], p. 169-170.

Travaux cités

[1] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, Baltimore 1948.

[2] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Providence 1957.

[3] W. Feller, *On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators*, Annals of Math. 58, 1 (1953), p. 166-174.

[4] T. Kato, *Integration of the equation of evolution in a Banach space*, J. Math. Soc. Japan. 5 (1953), p. 208-234.

[5] — *On linear differential equations in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math. 9,3 (1956), p. 479-486.

[6] J. L. Lions, *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bulletin Mathématique de la Société des Sci. Math. et Phys. de la République Populaire Roumaine 2 (50), n° 4 (1958), p. 419-432.

[7] — *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

[8] W. Mlak, *Integration of differential equations with unbounded operators in abstract L-spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys., 8, 3 (1960), p. 163-168.

[9] I. Miyadera, *Generation of strongly continuous semi-group operators*, Tohoku Math. J. 4 (1952), p. 109-114.

[10] R. S. Phillips, *Perturbation theory for semi-groups of linear operators*. Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), p. 199-221.

[11] H. Tanabe, *Remarks on the equations of evolution in a Banach space*, Osaka Math. J. 12 (1960), p. 145-165.

[12] K. Yosida, *On the differentiability and the representation of one parameter semi-groups of linear operators*, J. Math. Soc. Japan 1,1 (1948), p. 15-21.

[13] — *On the integration of temporally inhomogeneous diffusion equation in a Riemannian space*, Proc. Japan Acad. 30 (1954), p. 19-23 and 273-275.

[14] — *Semigroup theory and the integration problem of diffusion equations*, Proc. Intern. Congr. Math. 1954, Amsterdam 1957, vol. I, p. 405-420.

[15] — *An operator theoretical integration of the temporally inhomogeneous wave equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 7,4 (1957), p. 463-466.

Reçu par la Rédaction le 29. 3. 1963

STUDIA MATHEMATICA publient des travaux de recherches (en langues des congrès internationaux) concernant l'Analyse fonctionnelle, les méthodes abstraites d'Analyse et le Calcul de Probabilité. Chaque volume contient au moins 300 pages.

Les manuscrits dactylographiés sont à adresser à

M. Władysław Orlicz

Poznań (Pologne), ul. Libelta 22, m. 4,

ou à

M. Marceli Stark

Warszawa 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Les auteurs sont priés d'indiquer dans tout renvoi bibliographique le nom de l'auteur et le titre du travail cité, l'édition, le volume et l'année de sa publication ainsi que les pages initiale et finale.

Adresse de l'échange:

Warszawa 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

STUDIA MATHEMATICA sont à obtenir par l'intermédiaire de

ARS POLONA

Warszawa 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

Le prix de ce fascicule est 2,5 $.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA