Il en résulte que P_0X est l'espace de toutes les fonctions $x \epsilon X$ impaires, $P_{-1}X$ est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I-T_C)x$, $x \epsilon X$ étant des fonctions paires, P_1X est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I+T_C)x$, $x \epsilon X$ étant des fonctions paires.

Nous pouvons constater par des méthodes analogues aux précédentes que l'opération

$$T_S = \frac{1}{2i}(T-\overline{T})$$

satisfait à la même identité (40). En remarquant que $T_S x^+ = 0$, nous voyons que dans ce cas P_0X est l'espace de toutes les fonctions $x \epsilon X$ paires, $P_{-1}X$ est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I-T_S)x$, $x \epsilon X$ étant des fonctions impaires, P_1x est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I+T_S)x$, $x \epsilon X$ étant des fonctions impaires.

Remarquons ensuite que, grâce à l'usage des opérations T_C et T_S au lieu des puissances de la transformation de Fourier il suffit de décomposer l'espace X, non pas en quatre, mais en trois composantes.

Travaux cités

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, *Algebras on certain singular operators*. Amer. Jour. of Math. 78, 2 (1956), p. 289-309.

[2] Ю. И. Черский, *Общее сингулярное уравнения и уравнения типа свёртки*, Мат. сборник 41,3 (1957), p. 277-296.

[3] З. Н. Халилов, *Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце*, ibid. 25,2 (1949), p. 169-188.

[4] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), p. 575-580.

[5] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, IV édition russe, Mockba 1960, p. 55-66.

[6] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur lés équations involutives et leurs applications*, Studia Math. 20 (1961), p. 95-117.

[7] — *Sur les involutions d'ordre n*, Bull. de l'Ac. Pol. d. Sci. VIII, 11-12 (1960), p. 735-739.

[8] — *Sur les équations involutives d'ordre n*, ibidem, p. 741-746.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1961

STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1962)

О неопределённом A-интеграле и рядах Фурье (A)

О. Д. ЦЕРЕТЕЛИ (Тбилиси)

Понятие A-интеграла оказалось весьма полезным в некоторых вопросах теории тригонометических рядов и теории интегралов Коши (Титчмарш [4], Ульянов [5, 6, 7], Хускивадзе [9]). Однако было замечено, что этот интеграл обладает целым рядом патологических свойств (см. Очан [3], Ульянов [7], Виноградова [1, 2]).

В настоящей статье мы также указываем на ряд таких свойств A-интеграла.

Работа состоит из трёх параграфов.

§ 1 посвящён доказательству основной леммы (1.3), более или менее очевидными следствиями которой являются все результаты последующих двух параграфов.

В §§ 2 и 3 рассматриваются некоторые свойства неопределённого A-интеграла и рядов Фурье (A). Основным результатом этих параграфов следует считать теорему 3.2.

§ 1

Прежде чем сформулировать основную лемму, введём следующие определения.

1.1. Определение. Пусть на некотором множестве E задана функция $f(x)$ и $n \geqslant 0$. Функция $[f(x)]_n$, $x \epsilon E$, определяется следующим образом:

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad |f(x)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad |f(x)| > n. \end{cases}$$

1.2. Определение. Будем говорить, что последовательность действительных чисел q_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию (A), если $0 < q_{k+1} < q_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} kq_k = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \infty.$$

Всюду в дальнейшем через μ будет обозначатся мера Лебега.

1.3. Лемма (основная). *Пусть* $S_k(x)$, $x\in[a,b]$ $(S_k(a)=0)$, $k=1,2,\ldots$ — *последовательность непрерывных функций и* q_k, $k=1,2,\ldots$, *последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию* (A). *Тогда существуют такая измеримая на* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *и такие последовательности натуральных чисел* p_k, $k=1,2,\ldots$, *и* p_k, $k=1,2,\ldots$, *что* $p_k<p_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$; $p_k\leqslant p_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$, *и* $\lim\limits_{k\to\infty}p_k=\infty$;

$$\mu\{x: x\in[a,b], f(x)\neq 0\}>0; \tag{1}$$

$$\mu\{x: x\in[a,b], |f(x)|>n\}<q_n, \quad n=1,2,\ldots; \tag{2}$$

последовательность функций

$$\chi_n(x)=S_n(x)-\int\limits_a^x [f(t)]_{p_n}dt, \quad x\in[a,b],\ n=1,2,\ldots, \tag{3}$$

равномерно сходится к нулю на $[a,b]$ *при* $n\to\infty$, *и последовательность функций*

$$\psi_n(x)=S_{r_n}(x)-\int\limits_a^x [f(t)]_n dt, \quad x\in[a,b],\ n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

сходится к нулю при $n\to\infty$ *в каждой точке* $x\in[a,b]$, *в которой последовательность*

$$\varphi_k(x)=S_k(x)-S_{k-1}(x), \quad k=2,3,\ldots, \tag{5}$$

сходится к нулю. При этом, если на некотором множестве $E\subset[a,b]$ *последовательность* (5) *равномерно сходится к нулю, то на этом множестве равномерно сходится к нулю и последовательность* (4).

Доказательство этой леммы будет дано в 1.7.

1.4. Определение. Взаимно-однозначное отображение $\omega(x)$ измеримого множества E на измеримое множество F называется *обратимым сохраняющим меру преобразованием множества E на F*, если для любых измеримых множеств $e_1\subset E$ и $e_2\subset F$ измеримы и множества $\omega(e_1)$ и $\omega^{-1}(e_2)$ и $\mu e_1=\mu\omega(e_1)$, $\mu e_2=\mu\omega^{-1}(e_2)$.

По поводу этого определения см., например, [8], стр. 5-6.

1.5. Лемма. *Пусть E и F — измеримые множества на интервале (a,b), имеющие одну и ту же положительную меру. Тогда существует обратимое сохраняющее меру преобразование множества E на F.*

Эта лемма хорошо известна. Обычно, пренебрегая множествами меры нуль, доказывают лишь существование обратимого сохраняющего меру преобразования $\omega_1(x)$ интервала (a,b) на себя, обладающего свойством: $\mu(\omega_1(E)\Delta F)=0$ (см., например ([1]), [8], стр. 74). Для того, чтобы отсюда получить нужный нам результат, можно поступить, например, так: Пусть $P\subset\omega_1(E)\cap F$ — нульмерное множество мощности континуума; $F_1=\omega_1(E)\cap F-P$ и $E_1=\omega_1^{-1}(F_1)$. Ясно, что $E-E_1$ и $F-F_1$ — нульмерные множества мощности континуума. Отображение $\omega(x)$, устанавливающее взаимно-однозначное соответствие между $E-E_1$ и $F-F_1$, а на E_1 совпадающее с $\omega(x)$, удовлетворяет требуемым условиям.

1.6. Лемма. *Пусть* $\Phi(x)$, $a\leqslant x<b$ — *положительная, возрастающая и непрерывная функция, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\eta\to 0+}\int\limits_a^{b-\eta}\Phi(x)dx=\infty;$$

G — *всюду плотное на* $[a,b]$ *открытое множество и* $\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, — *непрерывная функция такая, что* $\varphi(a)=0$. *Тогда для любых* $\varepsilon>0$ *и* δ, $a\leqslant\delta<b$, *существуют интервал* (α,β), *совершённое нигде не плотное на* $[a,b]$ *множество* P *и измеримая на* $[a,b]$ *функция* $f(x)$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

1) $\Phi(\alpha)$ — *натуральное число и* $\delta<\alpha<\beta<b$;

2) $P\subset G$ *и* $\mu P=\beta-\alpha$;

3) *существует такое обратимое сохраняющее меру преобразование* $\omega(x)$ *множества* P *на* (α,β), *что* $f(x)=0$ *при* $x\bar{\in}P$ *и* $|f(x)|=\Phi(\omega(x))$ *при* $x\in P$;

4) *справедливы следующие неравенства*

$$\left|\varphi(x)-\int\limits_a^x f(t)dt\right|<\varepsilon, \quad x\in[a,b],$$

$$\left|\int\limits_a^x [f(t)]_n dt\right|<\varepsilon+|\varphi(x)|, \quad x\in[a,b], \quad n=1,2,\ldots$$

Доказательство. Предположим сперва, что $\varphi(x)$ не равно нулю тождественно на $[a,b]$. Тогда для заданного $\varepsilon>0$ можно указать такое подразделение отрезка $[a,b]$,

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_r=b,$$

$$\Delta_i=(x_{i-1},x_i), \quad i=1,2,\ldots,r,$$

([1]) В [8] измеримость понимается в смысле Бореля, но это не существенно, так как для любого измеримого по Лебегу множества e существуют такие борелевские множества $\tilde{e}$ и N, $\mu N=0$, что $e=\tilde{e}\cup e_0$, $e_0\subset N$.

что

(1) $$\max_{x',x''\in\Delta_i} |\varphi(x')-\varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad i=1,2,\ldots,\tau,$$

и

(2) $$V = \sum_{i=1}^{\tau} |v_i| > 0,$$

где

$$v_i = \varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1}), \qquad i=1,2,\ldots,\tau.$$

Так как открытое множество G всюду плотно на $[a, b]$, то

(3) $$\mu(\Delta_i \cap G) > 0 \qquad i=1,2,\ldots,\tau.$$

Пусть $a_n, n \geqslant \Phi(a)$, корень уравнения $\Phi(x) = n$. Ясно, что $a_n \to b$ при $n \to \infty$ и, следовательно, в силу (3) существует такое p, что

(4) $$b-a_p < \min\{b-\delta, \mu(\Delta_i \cap G), \; i=1,2,\ldots,\tau\}.$$

Так как

$$\int_{a_p}^{x} \Phi(t)\,dt \to \infty$$

при $x \to b$, то можно указать такое β, $a_p < \beta < b$, что

(5) $$\int_{a_p}^{\beta} \Phi(t)\,dt = V.$$

В силу (4) для интервала (a, β), $a = a_p$, справедливо утверждение 1) леммы.

Пусть q — натуральное число, удовлетворяющее условию: $a_q \leqslant \beta < a_{q+1}$. Очевидно,

(6) $$a = a_p < a_{p+1} < \ldots < a_q \leqslant \beta.$$

Введём обозначения:

$$\delta_i = \begin{cases} (a_{i-1}, a_i] & \text{при} \quad i=p+1,\ldots,q, \\ (a_q, \beta) & \text{при} \quad i=q+1. \end{cases}$$

Из (5) следует, что

(7) $$V = \sum_{i=p+1}^{q+1} \int_{\delta_i} \Phi(x)\,dx.$$

Так как в силу (2)

$$\sum_{j=1}^{\tau} \frac{|v_j|}{V} = 1,$$

то каждый из интервалов δ_i, $i=p+1,\ldots,q+1$, можно разбить на измеримые множества δ_{ij}, $j=1,2,\ldots,\tau$, таким образом, чтобы

$$\delta_{ij} \cap \delta_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k,$$

$$\bigcup_{j=1}^{\tau} \delta_{ij} = \delta_i, \qquad i=p+1,\ldots,q+1,$$

и

(8) $$\int_{\delta_{ij}} \Phi(x)\,dx = \frac{|v_j|}{V} \int_{\delta_i} \Phi(x)\,dx, \qquad j=1,2,\ldots,\tau,\; i=p+1,\ldots,q+1.$$

Кроме того, если $v_j = 0$, для некоторого j, то мы будем предполагать также, что все множества δ_{ij}, $i=p+1,\ldots,q+1$, пустые множества.

Положим

$$E_j = \bigcup_{i=p+1}^{q+1} \delta_{ij}, \qquad j=1,2,\ldots,\tau.$$

Ясно, что при каждом j, $j=1,2,\ldots,\tau$, множество E_j или пусто или же $\mu E_j > 0$;

(9) $$E_j \cap E_k = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k,$$

и

(10) $$\bigcup_{j=1}^{\tau} E_j = (a, \beta).$$

Так как $E_j \subset (a, \beta)$, $j=1,2,\ldots,\tau$, и, в силу (4), $\beta - a < \mu(\Delta_j \cap G)$, $j=1,2,\ldots\tau$, то для каждого j можно построить множество P_j, удовлетворяющее условиям: если E_j пусто, то пусто и множество P_j, а если $\mu E_j > 0$, то P_j — совершенное нигде не плотное множество,

(11) $$P_j \subset \Delta_j \cap G$$

и

(12) $$\mu P_j = \mu E_j.$$

Пусть

$$P = \bigcup_{j=1}^{\tau} P_j.$$

В силу (11), (12), (9) и (10) $P \subseteq G$ и $\mu P = \beta - a$. Таким образом, множество P удовлетворяет условию 2).

Из (12) и из леммы 1.5 следует, что для каждого j, $j = 1,2,\ldots,\tau$, можно построить такую функцию $\omega_j(x)$, что

$$\omega_j(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \,\bar{\in}\, P_j$$

и если $\mu P_j > 0$, то при $x \in P_j$ функция $\omega_j(x)$ — обратимое сохраняющее меру преобразование множества P_j на E_j. Положим

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{\tau} \omega_j(x), \quad x \in [a, b].$$

Ясно, что функция $\omega(x)$, рассмотренная на множестве P, является обратимым сохраняющим меру преобразованием этого множества на (α, β).

В силу (7) и (8)

$$(13) \qquad \int_{E_j} \Phi(x)\,dx = |v_j|, \quad j = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Определим теперь функцию $f(x), x \in [a, b]$, следующим образом:

$$(14) \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \bar{\in} P, \\ \Phi[\omega(x)] \operatorname{sgn} v_j & \text{при} \quad x \in P_j, j = 1, 2, \ldots, \tau. \end{cases}$$

Так как множество $\omega^{-1}(e)$ измеримо, если измеримо множество $e \subset (\alpha, \beta)$, то легко видеть, что $f(x)$ — измеримая функция. В силу своего определения она удовлетворяет условию 3).

Из (11), (14) и (13) легко следует, что

$$(15) \qquad \int_{\Delta_j} f(t)\,dt = v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Так как на каждом $\Delta_j, j = 1, 2, \ldots, \tau$, $f(x)$ сохраняет постоянный знак, то в силу (15) и (1)

$$(16) \qquad \left| \int_{x_{j-1}}^{x} f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$, $j = 1, 2, \ldots, \tau$, и

$$(17) \qquad \left| \int_{x_{j-1}}^{x} [f(t)]_n\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$, $j = 1, 2, \ldots, \tau$, и $n = 1, 2, \ldots$

В силу (6) имеем $p < \Phi(x) < q+1$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Отсюда, учитывая определение функции $f(x)$ (см. (14)), легко следует, что

$$(18) \qquad \int_{a}^{x} [f(t)]_n\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \leqslant p, \\ \int_a^x f(t)\,dt & \text{при} \quad n \geqslant q+1, \end{cases} \qquad x \in [a,b]$$

Если же $p+1 \leqslant n \leqslant q$, то так как

$$[\Phi(x)]_n = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha_n < x < \beta, \\ \Phi(x) & \text{при} \quad \alpha < x \leqslant \alpha_n, \end{cases}$$

учитывая (14) и (8), получаем, что

$$(19) \qquad \int_{\Delta_j} [f(t)]_n\,dt = \frac{v_j}{V} \int_{\alpha}^{\alpha_n} \Phi(x)\,dx, \quad p+1 \leqslant n \leqslant q, j = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Пусть теперь x — произвольная точка, $a < x \leqslant b$, и j_0 определено из условия $x_{j_0-1} < x \leqslant x_{j_0}$. Так как $\varphi(a) = 0$, то

$$\left| \varphi(x) - \int_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{j_0-1} \left[v_j - \int_{\Delta_j} f(t)\,dt \right] \right| + |\varphi(x) - \varphi(x_{j_0-1})| + \left| \int_{x_{j_0-1}}^{x} f(t)\,dt \right|.$$

Отсюда, из (15), (1) и (16) следует, что

$$(20) \qquad \left| \varphi(x) - \int_a^x f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, справедливо первое неравенство утверждения 4).

Далее, неравенство

$$(21) \qquad \left| \int_a^x [f(t)]_n\,dt \right| < \varepsilon + |\varphi(x)|$$

при $n \leqslant p$ и $n \geqslant q+1$ непосредственно следует из (18) и (20). Пусть $p+1 \leqslant n \leqslant q$. Тогда в силу (19)

$$(22) \qquad \int_a^x [f(t)]_n\,dt = \sum_{j=1}^{j_0-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(t)]_n\,dt + \int_{x_{j_0-1}}^{x} [f(t)]_n\,dt =$$

$$= \varphi(x_{j_0-1}) \frac{1}{V} \int_{\alpha}^{\alpha_n} \Phi(t)\,dt + \int_{x_{j_0-1}}^{x} [f(t)]_n\,dt.$$

Так как в силу (5)

$$\frac{1}{V} \int_{\alpha}^{\alpha_n} \Phi(x)\,dx \leqslant 1,$$

то из (22), (17) и (1) следует (21). Таким образом неравенство (21) справедливо при всех n, $n = 1, 2, \ldots$

Этим завершается доказательство леммы в предположении, что $\varphi(x)$ не равно нулю тождественно на $[a, b]$. Если же $\varphi(x) \equiv 0$ при

$x \in [a, b]$, то для доказательства леммы достаточно применить уже полученный результат к функциям $\Phi(x)$ и $\varphi_0(x) = \dfrac{\varepsilon}{2}\,\dfrac{x-a}{b-a}$ и к числам $\varepsilon/2$ и δ, $a \leqslant \delta < b$.

1.7. Доказательство основной леммы. Пусть γ удовлетворяет условиям

$$0 < \gamma < 1, \quad \gamma q_1 < b-a.$$

Положим $\bar{q}_0 = a$, $\bar{q}_k = b - \gamma q_k$, $k \geqslant 1$, и определим функцию $\Phi(x)$ следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{x-\bar{q}_k}{\bar{q}_{k+1}-\bar{q}_k} + k \quad \text{при} \quad \bar{q}_k \leqslant x < \bar{q}_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Легко видеть, что $\Phi(x)$, $a \leqslant x < b$, возрастающая, непрерывная и положительная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\mu\{x : x \in [a, b],\ \Phi(x) > n\} = \gamma q_n < q_n, \tag{1}$$

$$\lim_{\eta \to 0+} \int_{\gamma}^{b-\eta} \Phi(x)\,dx = \infty. \tag{2}$$

Рассмотрим множество U всех пар (m, n) натуральных чисел, упорядоченное следующим образом. Назовём *рангом* пары (m, n) число $r(m, n) = m+n-1$. Будем говорить, что пара (m', n') *предшествует* паре (m, n) и писать $(m', n') \prec (m, n)$, если $r(m', n') < r(m, n)$, а при $r(m', n') = r(m, n)$, $m' < m$.

Множество U, упорядоченное указанным способом, подобно множеству натуральных чисел.

Пусть

$$\varphi_1(x) = S_1(x) \quad \text{и} \quad \varphi_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Для каждого элемента $(m, n) \in U$ мы построим интервал $(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \subset (a, b)$, совершённое нигде не плотное множество P_{mn} и функции $\omega_{mn}(x)$ и $f_{mn}(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) имеем

$$P_{mn} \cap P_{m'n'} = 0 \quad \text{при} \quad (m, n) \neq (m', n'); \tag{4}$$

2) $\Phi(\alpha_{mn})$ — натуральное число,

$$\beta_{m'n'} < \alpha_{mn} < \beta_{mn} < b \tag{5}$$

при $(m', n') \prec (m, n)$ и

$$\mu P_{mn} = \beta_{mn} - \alpha_{mn}; \tag{6}$$

3) $\omega_{mn}(x)$ — обратимое сохраняющее меру преобразование множества P_{mn} на $(\alpha_{mn}, \beta_{mn})$ и

$$|f_{mn}(x)| = \Phi[\omega_{mn}(x)] \quad \text{при} \quad x \in P_{mn} \tag{7}$$

и

$$f_{mn}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin P_{mn}; \tag{8}$$

4) имеем

$$\left| \varphi_m(x) - \int_a^x \left(\sum_{i=1}^{n} f_{m_i}(t) \right) dt \right| < \frac{1}{2^{r(m,n)}}, \quad x \in [a, b], \tag{9}$$

и

$$\left| \int_a^x [f_{mn}(t)]_l\,dt \right| < \begin{cases} \dfrac{1}{2^{r(m,n)}} + \dfrac{1}{2^{r(m,n)-1}} & \text{при} \quad n > 1, \\[2mm] \dfrac{1}{2^{r(m,n)}} + |\varphi_{r(m,n)}(x)| & \text{при} \quad n = 1, \end{cases} \tag{10}$$

$$x \in [a, b], \quad l = 1, 2, \ldots$$

Эти множества и функции строятся по индукции следующим образом. Сперва применяем лемму 1.6 к множеству $G_{11} = (a, b)$, к функциям $\Phi(x)$ (см. (2)) и $\varphi_1(x)$ и к числам $\delta = a$ и $\varepsilon = 1/2^{r(1,1)}$. Находим множества P_{11} и $(\alpha_{11}, \beta_{11})$ и функции $\omega_{11}(x)$ и $f_{11}(x)$, удовлетворяющие всем вышеперечисленным условиям. Если для всех пар $(m', n') \prec (m, n)$ уже построены все множества и функции, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) и 4), то для построения множеств и функций, соответствующих паре (m, n), применяем лемму 1.6 к множеству $G_{11} - \bigcup_{(m',n') \prec (m,n)} P_{m'n'}$, к числам $\delta = \beta_{m_1 n_1}$, где (m_1, n_1) — пара, предшествующая (m, n), и $\varepsilon = 1/2^{r(m,n)}$ и к функциям $\Phi(x)$ и $\tilde{\varphi}_m(x)$,

$$\tilde{\varphi}_m(x) = \begin{cases} \varphi_m(x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \int_a^x f_{mi}(t)\,dt & \text{при} \quad n > 1, \\[2mm] \varphi_m(x) & \text{при} \quad n = 1. \end{cases}$$

Пусть

$$P = \bigcup_{(m,n) \in U} P_{mn} \quad \text{и} \quad D = \bigcup_{(m,n) \in U} (\alpha_{mn}, \beta_{mn}).$$

Определим функции $f(x)$ и $\omega(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \sum_{(m,n) \in U} f_{mn}(x), \quad x \in [a, b],$$

$$\omega(x) = \omega_{mn}(x) \quad \text{при} \quad x \in P_{mn}, \quad (m, n) \in U.$$

Функция $\omega(x)$ определена на множестве P и в силу (4), (5), (6) и 3) является обратимым сохраняющим меру преобразованием P на D. Из (4) и (8) следует, что $f(x) = f_{mn}(x)$ при $x \epsilon P_{mn}$. Следовательно, в силу (8) и (7), $f(x) = 0$ при $x \notin P$ и

(11) $$|f(x)| = \Phi[\omega(x)] \quad \text{при} \quad x \epsilon P.$$

Легко видеть, что при любом l, $l = 1, 2, \ldots$,

(12) $$[f(x)]_l = \sum_{(m,n)} [f_{mn}(x)]_l, \quad x \epsilon [a, b]$$

(см. (8) и (4)). Из (7), (8) и (5) следует, что

(13) $$|f_{mn}(x)| < \Phi(a_{1N}), \quad x \epsilon [a, b],$$

если $r(m, n) < N$ и $|f_{mn}(x)| > \Phi(a_{1N})$, $x \epsilon P$, если $r(m, n) \geqslant N$.

Обозначим через D_N множество всех пар (i, j) ранга N, а через U_N — множество всех пар (i, j), удовлетворяющих условию $r(i, j) \leqslant N$.

Из неравенств (10) легко следует, что

(14) $$\sum_{(i,j)\epsilon D_N} \left| \int_a^x [f_{ij}(t)]_l \, dt \right| < \frac{3N}{2^N} + |\varphi_N(x)|, \quad x \epsilon [a, b], \, l = 1, 2, \ldots$$

Определим теперь последовательности натуральных чисел p_n, $n = 1, 2, \ldots$, и r_n, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $p_n = \Phi(a_{1,n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$ В силу 2) $p_n = 1, 2, \ldots$, натуральное число и, так как $\Phi(x)$ возрастающая функция, то из (5) следует, что $p_n < p_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Пусть a_n — корень уравнения $\Phi(x) = n$. Определим r_n, $n = 1, 2, \ldots$, так: r_n при $n > \Phi(a_{12})$ равняется наибольшему натуральному числу m, удовлетворяющему условию $a_{1,m+1} < a_n$, а при $n \leqslant \Phi(a_{12})$ — пусть $r_n = 1$. Так как $a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $r_n \leqslant r_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Кроме того, из самого определения r_n следует, что $a_{1,p_n+2} \geqslant a_n$ при $n > \Phi(a_{12})$. Но $a_n \to b$ при $n \to \infty$. Значит и $a_{1,p_n+2} \to b$ при $n \to \infty$ и, таким образом, $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Докажем теперь, что функция $f(x)$ и последовательности p_k, $k = 1, 2, \ldots$, и r_k, $k = 1, 2, \ldots$, являются искомыми.

Действительно, из (11) следует, что $f(x)$ удовлетворяет условию 1.3 (1). Из того же соотношения (11) следует, что

$$\mu\{x : x \epsilon [a, b], |f(x)| > n\} = \mu\{x : x \epsilon P, \Phi[\omega(x)] > n\} < \\ < \mu\{x : x \epsilon [a, b), \Phi(x) > n\}$$

и значит в силу (1) для $f(x)$ верно и 1.3 (2).

В силу (12) и (13)

$$[f(t)]_{p_n} = \sum_{(i,j)\epsilon U_n} f_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1-i} f_{ij}(t), \quad t \epsilon [a, b], \, n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда и из (9) получаем

$$|\chi_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) - \int_a^x [f(t)]_{p_n} dt \right| < \frac{n}{2^n}, \quad x \epsilon [a, b].$$

Следовательно, в силу (3) последовательность 1.3 (3) равномерно сходится к нулю на $[a, b]$ при $n \to \infty$.

Пусть $n > \Phi(a_{12})$. Обозначим через O_n множество тех пар (i, j), для которых $[f_{ij}(t)]_n \neq 0$ хотя бы для одного $t \epsilon [a, b]$. Так как $U_{r_n} \subset O_n$, то

(15) $$[f(t)]_n = \sum_{(i,j)\epsilon U_{r_n}} f_{ij}(t) + \sum_{(i,j)\epsilon Q_n} [f_{ij}(t)]_n = \\ = \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n+1-i} f_{ij}(t) + \sum_{(i,j)\epsilon Q_n} [f_{ij}(t)]_n,$$

где $Q_n = O_n - U_{r_n}$. Из определения r_n следует, что если $(i, j) \epsilon O_n$, то $r(i, j) \leqslant r_n + 1$. Следовательно $Q_n \subset D_{r_n+1}$ и в силу (15), (9) и (14)

$$|\varphi_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^{r_n} \varphi_i(x) - \int_a^x [f(t)]_n dt \right| \leqslant \frac{r_n}{2^{r_n}} + \frac{3(r_n+1)}{2^{r_n+1}} + |\varphi_{r_n+1}(x)| \quad x \epsilon [a, b],$$

при $n > \Phi(a_{12})$. Так как $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то отсюда и из (3) следует последнее утверждение леммы.

§ 2

2.1. Определение. Измеримая функция $f(x)$, $x \epsilon [a, b]$, называется *A-интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, если

$$\mu\{x : x \epsilon [a, b], |f(x)| > n\} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$ и существует конечный предел последовательности (см. 1.1)

(1) $$\int_a^b [f(x)]_n dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Величина этого предела называется *определённым A-интегралом от $f(x)$ на $[a, b]$* и обозначается так:

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx$$

(см. например, [7]). Это обозначение для предела последовательности (1) мы сохраним и в том случае, когда этот предел равняется бесконечности определённого знака.

2.2. Известно, что функция $f(x)$, $x\in[a, b]$, может быть A-интегрируемой на $[a, b]$ и, однако, не быть A-интегрируемой на некотором сегменте $[c, d]\subset[a, b]$. Более того, в работе [7] Ульянова приводится пример функции A-интегрируемой на отрезке $[a, b]$ и не A-интегрируемой на отрезке $[c, d]\subset[a, b]$, где c — любая точка некоторого множества $E_1\subset[a, b]$, $\mu E_1>0$ и d — любая точка некоторого множества $E_2\subset[a, b]$, $\mu E_2>0$.

Этот результат можно усилить: из основной леммы легко следует, что существует A-интегрируемая на $[a, b]$ функция $f(x)$, не являющаяся A-интегрируемой ни на одном отрезке $[c, d]\subset[a, b]$, отличном от $[a, b]$. Мы докажем более сильное предложение.

2.3. *Пусть q_k, $k=1, 2, \ldots$ — последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию (A). На любом отрезке $[a, b]$ существует A-интегрируемая на этом отрезке функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\mu\{x: x\in[a, b], |f(x)|>n\}<q_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

и какова бы ни была измеримая на $[a, b]$ функция $F(x)$ существует такая неубывающая последовательность натуральных чисел n_k, $k=1, 2, \ldots$, что последовательность функций

$$F_k(x)=\int_a^x [f(t)]_{n_k}dt, \quad x\in[a, b], \quad k=1, 2, \ldots, \tag{2}$$

сходится почти всюду на $[a, b]$ к функции $F(x)$. При этом, если функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то последовательность (2) сходится равномерно на любом $[c, d]$, $a<c<d<b$.

Действительно, пусть $P_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$ — последовательность всех полиномов с рациональными коэффициентами. Определим последовательность функций $S_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, следующим образом. Пусть $0<\varepsilon_k<\min(1/k, (b-a)/2)$. Положим $S_k(x)=P_k(x)$ при $x\in[a+\varepsilon_k, b-\varepsilon_k]$, а при $x\in[a, a+\varepsilon_k)$ ($x\in(b-\varepsilon_k, b]$) пусть графиком $S_k(x)$ служит отрезок, соединяющий точки $(a, 0)$ и $\big(a+\varepsilon_k, P_k(a+\varepsilon_k)\big)$ $\Big((b, 0)$ и $\big(b-\varepsilon_k, P_k(b-\varepsilon_k)\big)\Big)$. Применив теперь основную лемму к последовательности q_k, $k=1, 2, \ldots$, и к последовательности функций $S_k(x)$,

$k=1, 2, \ldots$, найдём такую возрастающую последовательность натуральных чисел p_k, $k=1, 2, \ldots$, и такую измеримую функцию $f(x)$, что для функции $f(x)$ будет выполнено (1) и

$$S_l(x)-\int_a^x [f(t)]_{p_l}dt\to 0, \quad x\in[a, b], \tag{3}$$

равномерно на $[a, b]$ при $l\to\infty$.

Так как $S_k(x)=0$ при $x=a$ и $x=b$, $k=1, 2, \ldots$, то последовательность $S_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, сходится к нулю при $x=a$ и $x=b$. В силу той же основной леммы отсюда следует, что $f(x)$ A-интегрируема на $[a, b]$ и её A-интеграл равен нулю.

Пусть $F(x)$, $x\in[a, b]$ — произвольная измеримая функция и $P_{l_k}(x)$, $k=1, 2, \ldots$ — подпоследовательность последовательности $P_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, сходящаяся почти всюду, а в случае непрерывности $F(x)$ — равномерно, на $[a, b]$ к функции $F(x)$. Так как $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$, то ясно, что и $S_{l_k}(x)\to F(x)$ почти всюду на $[a, b]$ и в случае непрерывности $F(x)$ — равномерно на любом $[c, d]$, $a<c<d<b$.

Положив $P_{l_k}=n_k$, $k=1, 2, \ldots$, отсюда и из (3) будет следовать, что последовательность функций (2) сходится почти всюду на $[a, b]$ к $F(x)$, причём равномерно на любом $[c, d]$, $a<c<d<b$, если $F(x)$ непрерывна.

Таким образом если известно только, что $f(x)$ A-интегрируема на некотором отрезке $[a, b]$, то говорить о неопределённом A-интеграле этой функции, вообще говоря, смысла не имеет. Предположим, однако, что интеграл

$$(A)\int_a^x f(t)\,dt=F(x) \tag{4}$$

имеет смысл для всех (или почти для всех) $x\in[a, b]$ и зададимся вопросом о структуре функции $F(x)$. Оказывается, что $F(x)$ может быть произвольной функцией не выше первого класса по классификации Бэра (а если интеграл (4) существует почти всюду, то $F(x)$ может совпадать почти всюду с произвольной измеримой функцией) и никакие ограничения, накладываемые на быстроту стремления к нулю последовательности

$$n\mu\{x: |f(x)|>n\}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

допускающие расходимость ряда (²)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{x: |f(x)|>n\}, \tag{5}$$

изменить положение не могут (см. 2.5 и 2.6).

(²) Если ряд (5) сходится, то тогда, как известно, $f(x)$ суммируема.

Введём следующее определение.

2.4. Определение. Будем говорить, что $f(x)\in UA(a,b)$ если $f(x)$ A-интегрируема на $[a,b]$ и последовательность функций

$$\int_a^x [f(t)]_n\,dt, \quad x\in[a,b],\ n=1,2,\ldots,$$

равномерно сходится на $[a,b]$ при $n\to\infty$.

Ясно, что если $f(x)\in UA(a,b)$, то неопределённый A-интеграл

$$(A)\int_a^x f(t)\,dt, \quad x\in[a,b],$$

существует и является непрерывной функцией.

2.5. Теорема. *Пусть $F(x)$, $x\in[a,b]$ — произвольная непрерывная функция такая, что $F(a)=0$ и q_k, $k=1,2,\ldots,$ — последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию (A). Тогда существует такая функция $f(x)\in UA(a,b)$, что*

$$\mu\{x: x\in[a,b], f(x)\neq 0\}>0, \tag{1}$$

$$\mu\{x: x\in[a,b], |f(x)|>n\}<q_n, \quad n=1,2,\ldots, \tag{2}$$

и

$$(A)\int_a^x f(t)\,dt=F(x)$$

при $x\in[a,b]$.

Эта теорема, без дополнительных ограничений (1) и (2), накладываемых нами на $f(x)$, была анонсирована Виноградовой [1].

Для доказательства теоремы достаточно применить основную лемму к последовательности q_k, $k=1,2,\ldots,$ и к последовательности функций

$$S_k(x)=F(x), \quad x\in[a,b],\ k=1,2,\ldots$$

С помощью основной леммы столь же просто доказывается и следующая теорема.

2.6. Теорема. *Пусть $F(x)$, $x\in[a,b]$ — произвольная измеримая функция, могущая принимать и бесконечные значения на множестве положительной меры и q_k, $k=1,2,\ldots$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию (A). Тогда существует такая A-интегрируемая на $[a,b]$ функция $f(x)$ что*

$$\mu\{x: x\in[a,b], |f(x)|>n\}<q_n, \quad n=1,2,\ldots, \tag{1}$$

и

$$F(x)=(A)\int_a^x f(t)\,dt \tag{2}$$

почти всюду на $[a,b]$, причём, если $F(x)$ функция не выше первого класса по классификации Бэра и $F(a)=0$, то равенство (2) имеет место для всех $x\in[a,b]$[3].

В следующем параграфе эта теорема будет значительно усилена (см. 3.2.).

§ 3

3.1. Определение. Говорят, что тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

является *рядом Фурье* (A) *функции $f(x)$, A-интегрируемой на* $[0,2\pi]$, если все функции $f(x)\cos kx, f(x)\sin kx$, $k=1,2,\ldots,$ A-интегрируемы на $[0,2\pi]$ и

$$(A)\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx=\pi a_k, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$(A)\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx=\pi b_k, \quad k=1,2,\ldots$$

Если на отрезке $[0,2\pi]$ задана произвольная A-интегрируемая функция $f(x)$, то составить для этой функции ряд Фурье (A), вообще говоря, не всегда возможно, так как может случится, что умножив $f(x)$, например, на $\sin x$, получим функцию, не являющуюся A-интегрируемой на $[0,2\pi]$ (см. [3]).

Предположим теперь, что для некоторой функции $f(x)$, A-интегрируемой на $[0,2\pi]$, можно составить ряд Фурье (A). Спрашивается тогда:

1) определяется ли функция $f(x)$ однозначно своим рядом Фурье (A), т. е. следует ли из совпадения коэффициентов ряда Фурье (A) для функции $f(x)$ с коэффициентами ряда Фурье (A) для $f_1(x)$, что $f(x)=f_1(x)$ почти всюду на $[0,2\pi]$;

2) каков порядок роста коэффициентов ряда Фурье (A) для этой функции?

На первый вопрос приходится отвечать отрицательно. Ниже будет доказано, что существует A-интегрируемая на $[0,2\pi]$ функция $f(x)$, все коэффициенты Фурье (A) которой равны нулю и, тем не менее, эта функция отлична от нуля на множестве положительной меры (см. 3.2. и 3.9).

---

[3] Этот результат, без дополнительного ограничения (1), накладываемого нами на $f(x)$, был сообщён И. А. Виноградовой на четвёртом Всесоюзном математическом съезде в г. Ленинграде в июле 1961 г.

Что же касается второго вопроса, то мы докажем (см. 3.8), что коэффициенты Фурье (A) функций, принадлежащих классу $UA(0, 2\pi)$ (функции из $UA(0, 2\pi)$ всегда имеют ряд Фурье (A) (см. 3.8)) имеют порядок $o(n)$ и этот порядок улучшить нельзя. Если же рассматривать произвольные A-интегрируемые на $[0, 2\pi]$ функции, то тогда её коэффициентами Фурье (A) могут быть совершенно произвольные числа [4] (см. 3.2).

3.2. Теорема. *Пусть*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— произвольный тригонометрический ряд (в частности, все коэффициенты этого ряда могут быть нулями) и $F(x)$, $x\in[0, 2\pi]$, — произвольная измеримая функция, могущая принимать и бесконечные значения на множестве положительной меры. Тогда какова бы ни была последовательность действительных чисел q_k, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условию (A), существует такая A-интегрируемая на $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$, что

$$\mu\{x: x\in[0, 2\pi], f(x)\neq 0\}>0, \tag{2}$$

$$\mu\{x: x\in[0, 2\pi], |f(x)|>n\}<q_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$(A)\int_a^x f(t)\,dt=F(x) \tag{4}$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$ и ряд (1) является рядом Фурье (A) для функции $f(x)$. При этом, если $F(x)$ функция не выше первого класса по классификации Бэра и $F(0)=0$ и $F(2\pi)=\pi a_0$, то $f(t)$ A-интегрируема на любом отрезке $[0, x]$, $0<x\leqslant 2\pi$, и равенство (4) справедливо для всех $x\in[0, 2\pi]$. В частности, если $F(x)$ непрерывна, то можно утверждать ещё, что $f(x)\in UA(0, a)$ при любом a, $0<a<2\pi$.

Доказательство этой теоремы основано на ряде лемм.

3.3. Лемма. *Пусть $f(x)$, $x\in[a, b]$, измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\mu\{x: x\in[a, b], |f(x)|>n\}=o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

при $n\to\infty$ и $\varphi(x)$ — ограниченная измеримая функция на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b |[f(x)\varphi(x)]_n-[f(x)]_n\varphi(x)|\,dx\to 0$$

при $n\to\infty$.

Доказательство. Пусть

$$A_n=\{x: x\in[a, b], |f(x)|>n\},$$

$$B_n=\{x: x\in[a, b], |f(x)\varphi(x)|>n\}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

и

$$|\varphi(x)|\leqslant M, \quad x\in[a, b].$$

Легко видеть, что для любого n, $n=1, 2, \ldots$,

$$\int_a^b |[f(x)\varphi(x)]_n-[f(x)]_n\varphi(x)|\,dx=\int_{A_n}|[f(x)\varphi(x)]_n|\,dx+\int_{A_n'\cap B_n}|f(x)\varphi(x)|\,dx,$$

где $A_n'=[a, b]-A_n$. Так как в силу (1)

$$\int_{A_n}|[f(x)\varphi(x)]_n|\,dx\leqslant n\mu A_n=o(1)$$

и

$$\int_{A_n'\cap B_n}|f(x)\varphi(x)|\,dx\leqslant Mn\mu B_n=Mno\left(\frac{M}{n}\right)=o(1),$$

то лемма доказана.

3.4. Лемма. *Пусть $S_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, — произвольная последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций, удовлетворяющих следующим условиям: $S_n(a)=0$, $n=1, 2, \ldots$, и*

$$S_n(x)-S_{n-1}(x)\to 0$$

равномерно на $[a, b]$ при $n\to\infty$. Тогда какова бы ни была последовательность q_n, $n=1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условию (A), существуют такая измеримая на $[a, b]$ функция $f(x)$ и такая неубывающая последовательность натуральных чисел n_k, $k=1, 2, \ldots$, $\lim_{k\to\infty}n_k=\infty$, что

$$\mu\{x: x\in[a, b], f(x)\neq 0\}>0, \tag{1}$$

$$\mu\{x: x\in[a, b], |f(x)|>n\}<q_n, \quad n=1, 2, \ldots. \tag{2}$$

$$S_{n_k}(x)-\int_a^x [f(t)]_k\,dt\to 0 \tag{3}$$

[4] То, что коэффициенты Фурье (A) A-интегрируемой функции могут неограниченно расти, отмечалось в сообщении И. Л. Бонди, сделанном ею на четвёртом Всесоюзном математическом съезде в г. Ленинграде в июле 1961 г. О существовании таких функций мне было сообщено также П. Л. Ульяновым в личной беседе.

равномерно на $[a, b]$ *при* $k\to\infty$ *и для любой непрерывной функции* $\varphi(x)$, *с конечным изменением на* $[a, b]$,

$$\int_a^b S_{n_k}(x)\,d\varphi(x)-\Big[F_k(b)\varphi(b)-\int_a^b [f(t)\varphi(t)]_k\,dt\Big]\to 0$$

при $k\to\infty$, *где*

$$F_k(x)=\int_a^x [f(t)]_k\,dt,\quad a\leqslant x\leqslant b,\ k=1,2,\ldots.$$

Доказательство. В силу основной леммы существуют такая функция $f(x)$ и такая последовательность натуральных чисел $n_1\leqslant\leqslant n_2\leqslant\ldots\leqslant n_k\leqslant\ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=\infty$, что для $f(x)$ выполнено (1), (2) и (3). Из (3) непосредственно следует, что

$$\int_a^b S_{n_k}(x)\,d\varphi(x)-\int_a^b F_k(x)\,d\varphi(x)\to 0$$

при $k\to\infty$. Так как в силу (2) (см. определение 1.2)

$$\mu\{x: |f(x)|>n\}=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n\to\infty$ и

$$\int_a^b F_k(x)\,d\varphi(x)=F_k(b)\varphi(b)-\int_a^b [f(x)]_k\varphi(x)\,dx,$$

то для завершения доказательства леммы достаточно применить лемму 3.3.

3.5. Лемма. *Пусть* $\psi(x)$ — *произвольная непрерывная функция на* $[0, 2\pi]$; $[a, b]\subset[0, 2\pi]$ *и* $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_N, b_N$ — *произвольные числа. Тогда существует такая непрерывная на* $[0, 2\pi]$ *функция* $\overline{\psi}(x)$, *что* $\overline{\psi}(x)=\psi(x)$ *при* $x\in[0, 2\pi]-[a, b]$; *на отрезке* $[a, b]$ $\overline{\psi}(x)$ *является непрерывной ломанной с конечным числом звеньев и*

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\psi}(x)\cos kx\,dx=a_k,\quad k=0,1,2,\ldots,N,\\ &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\psi}(x)\sin kx\,dx=b_k,\quad k=1,2,\ldots,N.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $a<c<d<b$ и $(d-c)/\pi$ — иррациональное число. Пусть

$$(2)\qquad \begin{aligned} &x_i=c+\frac{d-c}{2N+1}\,i,\quad i=0,1,\ldots,2N+1,\\ &\delta=\frac{x_i-x_{i-1}}{2}=\frac{d-c}{2(2N+1)}\end{aligned}$$

и

$$\xi_i=\frac{x_i+x_{i-1}}{2},\quad i=1,2,\ldots,2N+1.$$

Рассмотрим интервалы

$$(t_i, t_i+\delta),\quad x_{i-1}<t_i<\xi_i,\quad i=1,2,\ldots,2N+1.$$

В силу (2) имеем $(t_i, t_i+\delta)\subset(x_{i-1}, x_i)$ при любом $t_i\in(x_{i-1}, \xi_i)$ и, следовательно,

$$(3)\qquad (t_i, t_i+\delta)\cap(t_j, t_j+\delta)=0$$

при $i\neq j$ и при любых $t_j\in(x_{j-1}, \xi_j)$ и $t_i\in(x_{i+1}, \xi_i)$.

Определим теперь функцию $\overline{\psi}(x)$ следующим образом:

$$\overline{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(x) & \text{при}\quad x\in[0, 2\pi]-[a, b],\\ \dfrac{\psi(a)}{c-a}(c-x) & \text{при}\quad x\in[a, c],\\ \dfrac{\psi(b)}{b-d}(x-d) & \text{при}\quad x\in[d, b],\\ 0 & \text{при}\quad x\in(c, d)-\bigcup\limits_{i=1}^{2N+1}(t_i, t_i+\delta),\\ \dfrac{2\eta_i}{\delta}(x-t_i) & \text{при}\quad x\in(t_i, t_i+\delta/2),\ i=1,2,\ldots,2N+1,\\ \dfrac{2\eta_i}{\delta}(t_i+\delta-x) & \text{при}\quad x\in(t_i+\delta/2, t_i+\delta),\ i=1,2,\ldots,2N+1,\end{cases}$$

где η_i, $i=1,2,\ldots,2N+1$, — произвольные действительные числа. В силу (3) это определение корректно. Ясно, что при любом выборе параметров η_i и $t_i\in(x_{i-1}, \xi_i)$, $i=1,2,\ldots,2N+1$, функция $\overline{\psi}(x)$ — непрерывная функция, вне $[a, b]$ совпадающая с $\psi(x)$ и на $[a, b]$ являющаяся непрерывной ломанной с конечным числом звеньев. Покажем, что параметры η_i и $t_i\in(x_{i-1}, \xi_i)$, $i=1,2,\ldots,2N+1$, можно подобрать так, чтобы $\overline{\psi}(x)$ удовлетворяла и уравнениям (1).

Для этого нужно доказать, что система уравнений

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2N+1} \int_{t_i}^{t_i+\delta} \overline{\psi}(x)\cos kx\,dx = -\int_R \overline{\psi}(x)\cos kx\,dx + \pi a_k, \\ \qquad\qquad k = 0,1,2,\ldots,N \\ \sum_{i=1}^{2N+1} \int_{t_i}^{t_i+\delta} \overline{\psi}(x)\sin kx\,dx = -\int_R \overline{\psi}(x)\sin kx\,dx + \pi b_k, \\ \qquad\qquad k = 1,2,\ldots,N, \end{cases}$$

где $R = [0, 2\pi]-(c, d)$, имеет решение относительно $\eta_i, i = 1, 2, \ldots, 2N+1$, при некотором подборе $t_i \in (x_{i-1}, \xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 2N+1$.

Легко подсчитать, что

$$(5)\quad \int_{t_i}^{t_i+\delta} \overline{\psi}(x)\,dx = \eta_i \frac{\delta}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2N+1,$$

$$(6)\quad \int_{t_i}^{t_i+\delta} \overline{\psi}(x)\cos kx\,dx = 2\cos k\left(t_i+\frac{\delta}{2}\right)\left[1-\cos k\frac{\delta}{2}\right]\frac{2\eta_i}{k^2\delta},$$

$$(7)\quad \int_{t_i}^{t_i+\delta} \overline{\psi}(x)\sin kx\,dx = 2\sin k\left(t_i+\frac{\delta}{2}\right)\left[1-\cos k\frac{\delta}{2}\right]\frac{2\eta_i}{k^2\delta},$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, i = 1, 2, \ldots, 2N+1.$$

Пусть

$$A_0 = \frac{\delta}{2}, \quad A_k = \frac{4}{k^2\delta}\left[1-\cos k\frac{\delta}{2}\right], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Так как $(d-c)/\pi$ иррациональное число, то $1-\cos(k\cdot\frac{1}{2}\delta) \neq 0$ при любом $k \geqslant 1$ (см. (2)) и, значит, $A_k \neq 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, в силу (5), (6) и (7) систему (4) можно переписать так:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2N+1} \eta_i = \frac{1}{A_0}\left(-\int_R \overline{\psi}(x)\,dx + \pi a_0\right), \\ \sum_{i=1}^{2N+1} \eta_i \cos k(t_i+\delta/2) = \frac{1}{A_k}\left(-\int_R \overline{\psi}(x)\cos kx\,dx + \pi a_k\right), \\ \sum_{i=1}^{2N+1} \eta_i \sin k(t_i+\delta/2) = \frac{1}{A_k}\left(-\int_R \overline{\psi}(x)\sin kx\,dx + \pi b_k\right), \\ \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Эта система линейна относительно неизвестных $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2N+1}$. Легко видеть, что её определитель отличен от нуля при любых $t_i \in (x_{i-1}, \xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 2N+1$. Поэтому система (8), а следовательно

и (4), имеет решение относительно η_i при любых $t_i \in (x_{i-1}, \xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 2N+1$. Лемма доказана.

3.6. Доказательство теоремы 3.2. Предположим сперва, что $F(x)$ не выше первого класса по классификации Бэра и

$$F(0) = 0, \quad F(2\pi) = \pi a_0.$$

Пусть $\psi_k(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ $(\psi_k(0) = 0)$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся всюду на $[0, 2\pi]$ к $F(x)$. Кроме того, если $F(x)$ непрерывна, то мы будем предполагать ещё, что эта последовательность сходится к $F(x)$ равномерно на $[0, 2\pi]$.

Пусть

$$(1)\quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_k = -\frac{b_k}{k}, \quad \beta_k = \frac{a_k - a_0}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и δ_k, $k = 1, 2, \ldots$ — произвольная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(2)\quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_k < \ldots < 2\pi,$$

$$(3)\quad \lim_{k\to\infty} \delta_k = 2\pi.$$

В силу леммы 3.5 для каждой функции $\psi_k(x)$ и сегмента $[\delta_k, \delta_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots$, существует такая непрерывная функция $\overline{\psi}_k(x)$, что

$$(4)\quad \overline{\psi}_k(x) = \psi_k(x) \quad \text{при} \quad x \in [0, 2\pi]-[\delta_k, \delta_{k+1}], \; k = 1, 2, \ldots,$$

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\psi}_k(x)\cos px\,dx = \alpha_p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, k, \\ \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\psi}_k(x)\sin px\,dx = \beta_p, \quad p = 1, 2, \ldots, k, \end{cases}$$

Так как каждая из функций $\overline{\psi}_k(x)$ является ограниченной на $[0, 2\pi]$, то можно указать такую возрастающую последовательность натуральных чисел $1 = m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$, что

$$(6)\quad \frac{1}{m_{k+1}}\left[\overline{\psi}_{k+1}(x) - \overline{\psi}_k(x)\right] \to 0$$

равномерно на $[0, 2\pi]$ при $k \to \infty$. Пусть

$$p_k = \sum_{i=1}^{k} m_i, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для каждого n, $n=1,2,\ldots$, положим

$$(7)\qquad S_n(x)=\bar\psi_k(x)+\frac{\bar\psi_{k+1}(x)-\bar\psi_k(x)}{m_{k+1}}(n-p_k),\qquad x\in[0,2\pi],$$

где k определено из условия $p_k\leqslant n<p_{k+1}$. Из (6) легко следует, что

$$(8)\qquad S_{n+1}(x)-S_n(x)\to 0$$

равномерно на $[0,2\pi]$ при $n\to\infty$. Кроме того $S_n(0)=0, n=1,2,\ldots$

Последовательность функций $S_n(x), n=1,2,\ldots$, сходится на $[0,2\pi]$ к функции $F(x)$, причём, если последовательность $\psi_k(x), k=1,2,\ldots$, равномерно сходится к $F(x)$, то $S_n(x), n=1,2,\ldots$, равномерно сходится к $F(x)$ на любом $[0,a], 0<a<2\pi$.

Действительно, если $x=2\pi$, то в силу (2) и (4) $\bar\psi_k(2\pi)=\psi_k(2\pi), k=1,2,\ldots$ Так как последовательность $\psi_k(x), k=1,2,\ldots$ сходится при каждом $x\in[0,2\pi]$ к $F(x)$, то отсюда и из (7) следует, что $S_n(2\pi)\to F(2\pi)$ при $n\to\infty$.

Пусть теперь $0<a<2\pi$. В силу (3) можно указать такое M, что $\delta_r>a$ при $r>M$. Тогда в силу (4) будем иметь $\bar\psi_r(x)=\psi_r(x)$ при $x\in[0,a]$ и $r>M$. Отсюда и из (7) следует, что на отрезке $[0,a]$, последовательность $S_n(x), n=1,2,\ldots$, сходится к $F(x)$, причём равномерно, если $F(x)$ непрерывна.

В силу (8) и леммы 3.4 для последовательностей $q_k, k=1,2,\ldots$, и $S_k(x), k=1,2,\ldots$, существуют такая измеримая на $[0,2\pi]$ функция $f(x)$ и такая неубывающая последовательность натуральных чисел n_l, $l=1,2,\ldots$, $\lim\limits_{l\to\infty}n_l=\infty$, что $f(x)$ удовлетворяет условиям 3.2 (2) и 3.2 (3),

$$(9)\qquad \lim_{l\to\infty}\Big[S_{n_l}(x)-\int_0^x[f(t)]_l\,dt\Big]=0$$

равномерно на $[0,2\pi]$ и

$$(10)\qquad \int_0^{2\pi}S_{n_l}(x)\,d\varphi(x)-\Big[\varphi(2\pi)\int_0^{2\pi}[f(t)]_l\,dt-\int_0^{2\pi}[f(t)\varphi(t)]_l\,dt\Big]\to 0$$

при $l\to\infty$ для любой функции $\varphi(x)$, непрерывной и с конечным изменением на $[0,2\pi]$.

Функция $f(x)$ является искомой. Действительно, так как последовательность $S_n(x), n=1,2,\ldots$, сходится к $F(x)$ на $[0,2\pi]$ при $n\to\infty$, то в силу (9) функция $f(t)$ A-интегрируема на любом $[0,x]$, $0<x\leqslant 2\pi$ и справедливо равенство 3.2 (4); причём в силу того что $F(2\pi)=\pi a_0$,

$$(A)\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\pi a_0.$$

Кроме того, если $F(x)$ непрерывна, то $f(x)\in UA(0,a), 0<a<2\pi$.

В силу определения функций $S_n(x)$, $n=1,2,\ldots$ (см. (7)), и в силу (5)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}S_{n_l}(x)\,d\cos px=-p\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}S_{n_l}(x)\sin px\,dx=-p\beta_p$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}S_{n_l}(x)\,d\sin px=p\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}S_{n_l}(x)\cos px\,dx=p\alpha_p$$

при $p=1,2,\ldots,k_l$, где $k_l\leqslant k_{l+1}, l=1,2,\ldots$, и $\lim\limits_{l\to\infty}k_l=\infty$. Следовательно, в силу (1), полагая в (10) $\cos px$ и $\sin px$ вместо $\varphi(x)$, получаем, что

$$\frac{1}{\pi}(A)\int_0^{2\pi}f(t)\cos pt\,dt=a_p,\qquad p\geqslant 1,$$

и

$$\frac{1}{\pi}(A)\int_0^{2\pi}f(t)\sin pt\,dt=b_p,\qquad p\geqslant 1.$$

Таким образом теорема доказана в предположении, что $F(x)$ — функция не выше первого класса по классификации Бэра.

Случай, когда $F(x)$ произвольная измеримая функция, рассматривается совершенно так же. Нужно только последовательность непрерывных функций $\psi_n(x)$, $x\in[0,2\pi]$, $n=1,2,\ldots$, выбрать таким образом, чтобы $\psi_n(0)=0$, $n=1,2,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(2\pi)=a_0\pi$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=F(x)$ почти всюду на $[0,2\pi]$.

Как уже отмечалось в начале настоящего параграфа, из A-интегрируемости функции $f(x)$ на $[0,2\pi]$, вообще говоря, не следует, что для неё можно составить ряд Фурье (A). Однако оказывается, что если $f(x)\in UA(0,2\pi)$, то её ряд Фурье (A) всегда существует. Это легко следует из следующей простой теоремы:

3.7. Теорема. *Пусть $f(x)\in UA(a,b)$. Тогда какова бы ни была функция $\varphi(x)$, непрерывная и с конечным изменением на $[a,b]$, функция $f(x)\varphi(x)\in UA(a,b)$ и имеет место формула интегрирования по частям:*

$$(1)\qquad (A)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=F(b)\varphi(b)-\int_a^b F(x)\,d\varphi(x),$$

где

$$F(x) = (A)\int_a^x f(t)\,dt, \quad x\in[a, b].$$

Действительно, пусть

$$F_n(x) = \int_a^x [f(t)]_n\,dt, \quad x\in[a, b],\ n = 1, 2, \ldots$$

Интегрированием по частям получаем

$$\int_a^x [f(t)]_n\varphi(t)\,dt = F_n(x)\varphi(x) - \int_a^x F_n(t)\,d\varphi(t), \quad x\in[a, b],\ n = 1, 2, \ldots$$

Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно применить лемму 3.3.

3.8. Теорема. *Пусть $f(x)\in UA(0, 2\pi)$. Тогда ряд Фурье (A) для $f(x)$ существует и*

(1) $$|a_n| + |b_n| = o(n)$$

при $n\to\infty$, где a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ — коэффициенты Фурье (A) функции $f(x)$. Кроме того, оценку (1) улучшить нельзя.

Доказательство. Существование ряда Фурье (A) для $f(x)$ непосредственно следует из теоремы 3.7. Кроме того, применив формулу 3.7 (1) сперва к $\cos kx$, а затем к $\sin kx$, получаем

(2) $$a_k = a_0 + kB_k, \quad b_k = -kA_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos kx\,dx, \quad B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin kx\,dx.$$

Так как $|A_k| + |B_k|\to 0$ при $k\to\infty$, то из (2) следует (1).

Из теоремы 2.5 и из (2), учитывая существование непрерывных функций $F(x)$, с коэффициентами Фурье сколь угодно медленно стремящимися к нулю, следует, что оценку (1) улучшить уже нельзя.

Из теоремы 3.2 следует, что существует A-интегрируемая на $[0, 2\pi]$ функция, отличная от нуля на множестве положительной меры и такая, что все коэффициенты её ряда Фурье (A) равны нулю. Такие функции существуют и в классе $UA(0, 2\pi)$. Именно, из теорем 2.5 и 3.7 непосредственно следует следующая теорема:

3.9. Теорема. *Существует $f(x)\in UA(0, 2\pi)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\mu\{x : x\in[0, 2\pi], f(x)\neq 0\} > 0,$$

$$f(x)\varphi(x)\in UA(0, 2\pi),$$

$$(A)\int_0^x f(t)\varphi(t)\,dt \equiv 0 \quad \text{при} \quad x\in[0, 2\pi],$$

какова бы ни была непрерывная функция $\varphi(x)$, с конечным изменением на $[0, 2\pi]$. В частности, все коэффициенты Фурье (A) функции $f(x)$ равны нулю.

Цитированная литература

[1] И. А. Виноградова, *О неопределённом A-интеграле*, Доклады Академии наук СССР 135, № 1 (1960), стр. 9-11.

[2] — *О неопределённом A-интеграле*, Известия Академии наук СССР, сер. матем. 25, № 1 (1961), стр. 113-142.

[3] Ю. С. Очан, *Обобщённый интеграл*, Матем. сборник, 28 (70): 2 (1951), стр. 293-336.

[4] E. C. Titchmarsh, *On conjugate functions*, Proc. Lond. Math. Soc. 9 (1929), стр. 49-80.

[5] П. Л. Ульянов, *Применение A-интеграла к одному классу тригонометрических рядов*, Матем. сборник 35 (77): 3 (1954), стр. 469-490.

[6] — *Об A-интеграле Коши*, Успехи матем. наук, т. XI, вып. 5 (1956), стр. 223-229.

[7] — *A-интеграл и сопряжённые функции*, Учён. записки МГУ, вып. 181, Математика 8 (1956), стр. 139-157.

[8] P. R. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, The Math. Soc. of Japan (1956).

[9] Г. А. Хускивадзе, *Об A-интегралах типа Коши*, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 27, № 6 (1961), стр. 1-7.

Reçu par la Rédaction le 20. 11. 1961