STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1962)

Sur les opérations satisfaisant à une identité polynomiale

par

D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ (Warszawa)

I. Introduction. Soit X un espace linéaire (sur le corps des nombres complexes) et S une opération additive et homogène, définie sur l'espace X, qui satisfait à l'identité polynomiale:

$$P(S) \equiv p_0 I + p_1 S + \ldots + p_n S^n = 0, \tag{1}$$

les coefficients complexes $p_0, p_1, \ldots, p_n$ ne s'annulant pas en même temps. On appelle S *opération algébrique*. Si l'opération S satisfait à une identité polynomiale de degré n et ne satisfait pas à une identité de degré inférieur à n, nous l'appellerons *opération algébrique d'ordre* n.

Il existe un grand nombre d'opérations algébriques. Par exemple, on sait que toute transformation linéaire dans un espace vectoriel de dimension k satisfait à l'identité polynomiale $P(S) = 0$, où $P(t)$ désigne le polynôme caractéristique de la matrice de la transformation S (théorème de Cayley-Hamilton). En particulier, si la matrice de la transformation S est diagonale, son polynôme minimal n'admet pas de racine multiples. Si l'opération additive et homogène S transforme un espace de dimension infinie en un espace de dimension finie, elle satisfait aussi à une identité polynomiale. En effet, l'espace SX est de dimension finie, donc dans cet espace l'opération S satisfait à une identité $P(S) = 0$. Il en résulte que l'opération S satisfait dans l'espace X à l'identité: $SP(S) = 0$.

Si X est l'espace des fonctions hölderiennes (avec un exposant fixé $0 < \mu < 1$) définies sur un arc L de Jordan, régulier et fermé, la transformation intégrale singulière

$$Sx = \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{L-L_\varepsilon} \frac{x(s)}{s-t}\, ds \qquad (s, t \in L)$$

(L désigne la partie de l'arc L située à l'intérieur de cercle $|s-t| \leqslant \varepsilon$) satisfait à l'identité $I - S^2 = 0$ (voir [6]).

Si $X = L^2(E^k)$, la transformation de Fourier d'une fonction $x \in X$

$$Tx = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{E^k} x(s) e^{i(s,t)} ds \tag{2}$$

satisfait à l'identité $I - T^4 = 0$ (voir [7]).

Dans le même espace les deux transformations

$$T_C = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{E^k} x(s) \cos(s,t)\, ds; \quad T_S = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{E^k} x(s) \sin(s,t)\, ds \tag{3}$$

satisfont aux identités;

$$T_C^3 - T_C = 0; \quad T_S^3 - T_S = 0.$$

Les opérations T_C et T_S seront considérées plus en détail à la fin de ce travail.

Il est intéressant que l'on puisse déduire de nombreuses propriétés de ces opérations par les méthodes simples de l'algèbre linéaire, abstraction faite des propriétés métriques des transformations intégrales.

Quelques travaux sont un peu rapprochés à ces problèmes. Calderòn et Zygmund [1] ont étudié les propriétés des algèbres des transformations intégrales singulières (sans supposer que $I - S^2 = 0$). Kaplansky [4] a étudié les anneaux avec une identité polynomiale, au point de vue non pas des opérations mais des propriétés des anneaux. Halilov [3] et Tcherski [2] ont étudié les transformations singulières dans les anneaux unitaires. L'auteur de ce travail a donné les propriétés algébriques et métriques des involutions, c'est-à-dire des opérations pour lesquelles $P(S) = I - S^2 = 0$, dans le travail [6], et des involutions d'ordre n, c'est-à-dire des opérations pour lesquelles $P(S) = I - S^n = 0$, dans les travaux [7] et [8].

Les opérations auto-adjointes et satisfaisant à une identité polynomiale ont aussi été considérées par Dirac ([5], p. 55-66). Par exemple, les projections du spin d'un électron sur les axes des coordonnées sont des involutions.

Dans le présent travail nous exposons les propriétés des opérations algébriques, nous y étudions l'équation à coefficients constants et une méthode de régularisation de l'équation générale qui nous permettra de déduire des théorèmes sur l'existence et le nombre des solutions. La méthode de démonstration appliquée dans ce travail diffère un peu de celles appliquées dans le travaux [6], [7], [8], en outre on ne supposera pas que les opérations-coefficients d'équation générale sont commutatives.

II. Propriétés des opérations algébriques. Soit S une opération algébrique d'ordre n qui satisfait à l'identité (1). Désignons par $P(t)$ le polynôme de la variable complexe t avec les mêmes coefficients p_i que le polynôme (1):

$$P(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_n t^n.$$

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $p_n = 1$. Nous appellerons $P(t)$ *polynôme caractéristique* et l'équation

$$P(t) = 0 \tag{4}$$

équation caractéristique de l'opération algébrique d'ordre n. Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les racines du polynôme $P(t)$ et par $p_m(t)$ les fonctions

$$p_m(t) = \prod_{k=1, k\neq m}^{n} (t - t_k) \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Nous considérons seulement les opérations algébriques telles que leur polynôme caractéristique n'admet pas de racines multiples. Cette hypothèse sera justifiée plus loin. Dans ce cas

$$p_m(t_m) = \prod_{k=1, k\neq m}^{n} (t_m - t_k) \neq 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons maintenant les fonctions $p_m(t)/p_m(t_m)$ et remarquons que la construction de ces fonctions et des opérations

$$P_m = \frac{p_m S}{p_m(t_m)},$$

coïncidant avec elles, est la même que celle des polynômes d'interpolation de Lagrange.

PROPRIÉTÉ 1. *Nous avons*

$$P_m S = S P_m = t_m P_m. \tag{6}$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous avons évidemment $(t - t_m) p_m(t) = P(t)$ d'où

$$(S - t_m I) P_m = (S - t_m I) \frac{p_m(S)}{p_m(t_m)} = \frac{1}{p_m(t_m)} P(S) = 0.$$

Il en résulte la propriété proposée.

PROPRIÉTÉ 2. *Nous avons*

$$P_m P_k = \delta_m^k P_k \quad (m, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

où $\delta_m^k = 0$ *pour* $k \neq m$ *et* $\delta_k^k = 1$.

Démonstration. Nous avons, d'après la propriété 1,

$$P_k^2 = \frac{p_k(S)}{p_k(t_k)} P_k = \frac{1}{p_k(t_k)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (S-t_iI)P_k = \frac{1}{p_k(t_k)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t_k-t_i)P_k$$

$$= \frac{p_k(t_k)}{p_k(t_k)} P_k = P_k$$

et

$$P_mP_k = \frac{1}{p_m(t_m)p_k(t_k)}\Big[\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m, i\neq k}}^{n} (S-t_iI)\Big](S-t_kI)P_k$$

$$= \frac{1}{p_m(t_m)p_k(t_k)}\Big[\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m, i\neq k}}^{n} (S-t_iI)\Big]P(S) = 0.$$

Propriété 3. *Nous avons*

(8) $$\sum_{m=1}^{n} P_m = I.$$

Démonstration. Remarquons que nous avons, par hypothèse, $p_m(t_m) \neq 0$ et $p_m(t_i) = 0$ pour $i \neq m$ $(m, i = 1, 2, \ldots, n)$. Ecrivons

$$f(t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{p_m(t)}{p_m(t_m)}.$$

Tous les polynômes $p_m t$ sont de degré $n-1$, donc la fonction $f(t)$ est aussi un polynôme de degré au plus $n-1$ et nous avons évidemment

$$f(t_k) = \sum_{m=1}^{n} \frac{p_m(t_k)}{p_m(t_m)} = \frac{p_k(t_k)}{p_k(t_k)} = 1 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Par suite $f(t) \equiv 1$, d'où il résulte que $f(S) = I$.

Propriété 4. *Nous avons*

(9) $$S = \sum_{m=1}^{n} t_m P_m.$$

Démonstration résulte des propriétés 1 et 3 de la manière suivante:

$$S = S\sum_{m=1}^{n} P_m = \sum_{m=1}^{n} SP_m = \sum_{m=1}^{n} t_m P_m.$$

Écrivons encore

(10) $$x^{(k)} = P_k x \text{ pour } x \in X; \qquad X^{(k)} = P_k X = \{P_k x \colon x \in X\}.$$

Théorème 1. *Soit S une opération additive et homogène, définie sur l'espace X, donc les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *S est une opération algébrique d'ordre n sans racines caractéristiques multiples.*

(b) *Il existe n opérations P_i additives et homogènes, telles que $P_iP_k = \delta_k^i$,*

$$\sum_{m=1}^{n} P_k = I \text{ et } S = \sum_{k=1}^{n} t_k P_k.$$

(c) *L'espace X est la somme simple de n sous-espace X_i, tels que $Sx = t_ix$ pour $x \in X_i$ (t_i sont des nombres complexes différents).*

Démonstration. La condition (a) étant admise, nous avons démontré par la construction précédente que (a) $\to$ (b). Supposons maintenant que la condition (b) soit satisfaite. On peut présenter tout élément de l'espace X sous la forme suivante (voir les formules (10)):

$$x = \sum_{m=1}^{n} x^{(m)}, \quad \text{où} \quad x^{(m)} = P_m x \in X^{(m)},$$

et $P_k x^{(m)} = P_k P_m x = 0$ pour $k \neq m$, d'où résulte que l'espace X est la somme simple des espaces $X^{(m)}$:

$$X = X^{(1)} \oplus \ldots \oplus X^{(n)}.$$

En outre

$$Sx^{(m)} = SP_m x = \sum_{k=1}^{n} t_k P_k P_m x = t_m P_m^2 x = t_m P_m x = t_m x^{(m)}.$$

Donc la condition (b) implique la condition (c).

Nous démontrerons maintenant que la condition (a) résulte de la condition (c). Supposons que l'espace X soit la somme simple des n espaces X_i et soient n nombres complexes différents $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tels que $Sx = t_ix$ pour $x \in X_i$. Admettons

$$P(S) = \prod_{m=1}^{n} (S-t_mI).$$

L'opération S est additive et homogène, nous avons, en remarquant que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in X_i$,

$$P(S)x = \sum_{i=1}^{n} P(S)x_i = \sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} (S-t_mI)\Big](S-t_iI)x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} (S-t_mI)\Big](t_i-t_i)x_i = 0$$

pour tout $x \in X$. Donc S est une opération algébrique d'ordre n sans racines multiples. Remarquons que la décomposition de l'espace X ne détermine pas l'opération algébrique univoquement. L'opération algébrique est unique pour une décomposition de l'espace X donnée et des nombres t_i fixés. Donc toutes les conditions (a), (b), (c) sont équivalentes.

III. Équation à coefficients constants. Opération inverse. Soit donnée une opération algébrique S d'ordre n, telle que son polynôme caractéristique

(11) $$P(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_n t^n \quad (p_n = 1)$$

admette les racines simples $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Soit l'opération

(12) $$a(S) = a_0 I + a_1 S + \ldots + a_m S^m,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_m$ sont des nombres complexes qui ne sont pas tous nuls.

PROPRIÉTÉ 5. *Nous avons*

(13) $$a(S) = \sum_{k=1}^{n} a(t_k) P_k.$$

Démonstration. Nous avons, d'après les propriété 1 et 3,

$$a(S) = a(S)\sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} a(S) P_k = \sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{m} a_i S^i\Big] P_k = \sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{i=0}^{m} a_i S^i P_k\Big]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_i t^i P_k = \sum_{k=1}^{n} a(t_k) P_k.$$

THÉORÈME 2. *Si* $a(t_k) = 0$ *pour* $k = k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, i \leqslant n)$, *alors l'équation*

(14) $$a(S) y = 0$$

admet la solution

(15) $$y = \sum_{j=1}^{n} y^{(k_j)} \quad (\textit{où } y^{(k_j)} \in X^{(k_j)} \textit{ est arbitraire}),$$

l'équation

(16) $$a(S)\, x = x_0$$

($x_0 \in X$ *est donné*) *admet la solution générale*

(17) $$x = \Big[\sum_{\substack{k=1\\ k\neq k_j, j=1,\ldots,i}}^{n} \frac{1}{a(t_k)} P_k\Big] x_0 + y$$

sous la condition nécessaire et suffisante

(18) $$P_{k_j} x_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, i).$$

Démonstration. D'après la propriété 5 et le théorème 1, l'équation (14) est équivalente au système suivant de n équations

(19) $$a(t_k) y^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si $a(t_k) = 0$, $y^{(k)}$ peut être arbitrairement choisi dans l'espace $X^{(k)}$. Si $a(t_k) \neq 0$, il faut admettre $y^{(k)} = 0$. Il en résulte la première partie du théorème 2.

L'équation (16) est équivalente au système

$$a(t_k) x^{(k)} = x_0^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si $a(t_k) = 0$ et $x_0 \neq 0$, il faut admettre $x_0^{(k)} = P_k x_0 = 0$, donc la condition (18) est suffisante. Si $a(t_k) \neq 0$, alors

$$x^{(k)} = \frac{1}{a(t_k)} x_0^{(k)} = \frac{1}{a(t_k)} P_k x_0.$$

Au contraire, si l'équation (16) admet une solution x, nous avons

$$P_{k_j} x_0 = x_0^{(k_j)} = a(t_{k_j}) x^{(k_j)} = 0,$$

donc la condition (18) est aussi nécessaire.

Remarquons qu'il suffit de considérer les opération $a(S)$ de degré $n-1$. En effet, si nous avons une opération de degré $n+\nu$ $(\nu \geqslant 0)$, on peut la réduire à une opération de degré inférieur en substituant (d'après l'identité (1)):

$$S^n = -\frac{1}{p_n}[p_0 I + p_1 S + \ldots + p_{n-1} S^{n-1}].$$

En répétant cette substitution nous obtenons enfin une opération de degré $n-1$.

THÉORÈME 3. *Si* $P(0) = 0$, *il n'existe pas d'opération inverse à l'opération* S. *Si* $P(0) \neq 0$, *alors l'opération inverse* S^{-1} *existe et*

(20) $$S^{-1} = \sum_{m=1}^{n} t_m^{-1} P_m;$$

en outre cette opération satisfait à l'équation

(21) $$p_0 S^{-n} + p_1 S^{-(n-1)} + \ldots + p_n I = 0.$$

Démonstration. Considérons l'équation

(22) $$Sx = x_0.$$

Dans ce cas nous avons $a(S) = S$. Si $P(0) = 0$, alors $a(0) = 0$ et l'équation (22) n'admet pas de solutions pour tout x_0. Donc l'opération

S^{-1} n'existe pas. Si $P(0) \neq 0$, alors $a(t_m) = t_m \neq 0$ pour $m = 1, 2, \ldots, n$ et l'équation (22) admet une solution unique

$$x = \Big[\sum_{m=1}^{n} t_m^{-1} P_m\Big] x_0$$

pour tout x_0, donc l'opération S^{-1} existe et elle est déterminée par la formule (20).

Il résulte de la formule (20) que les racines caractéristiques de l'opération S^{-1} sont $t_1^{-1}, t_2^{-2}, \ldots, t_n^{-1}$ et que les composantes de l'espace X déterminées par l'opération S^{-1} sont les mêmes que les composantes déterminées par l'opération S. Enfin nous avons

$$\sum_{m=0}^{n} p_m (S^{-1})^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} p_m S^{m-n} = S^{-n} \sum_{m=0}^{n} p_m S^m = S^{-n} P(S) = 0$$

d'où résulte la formule (21).

Nous obtenons immédiatement:

Corollaire 1. *Pour k entier arbitraire l'opération S^k satisfait à l'égalité*

$$S^k = \sum_{m=1}^{n} t_m^k P_m \tag{23}$$

et elle admet les racines caractéristiques t_i^k ($t_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

IV. Régularisation. Existence des solutions des équations avec opérations algébriques. Soient X un espace de Banach et S une opération algébrique d'ordre n avec le polynôme caractéristique $P(t)$ et les racines caractéristiques simples $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Considérons les opérations suivantes:

$$\cdot A(S) = \sum_{k=0}^{n-1} S^k A_k, \qquad A^{\cdot}(S) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k S^k; \tag{24}$$

$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des opérations additives homogènes qui transforment l'espace X en lui-même. Remarquons, par analogie avec les considérations du § III, qu'il suffit de considérer les opérations $\cdot A(S)$ et $A^{\cdot}(S)$ de degré $n-1$.

Propriété 6. *Nous avons*

$$P_m \cdot A(S) = P_m A(t_m), \qquad A^{\cdot}(S) P_m = A(t_m) P_m, \tag{25}$$

où

$$A(t_m) = \sum_{k=0}^{n-1} t_m^k A_k \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Démonstration. En effet nous avons

$$P_m \cdot A(S) = P_m \sum_{k=0}^{n-1} S^k A_k = P_m \sum_{k=0}^{n-1} t_m^k A_k = P_m A(t_m)$$

et une formule analogue pour l'opération $A^{\cdot}(S)$.

Propriété 7. *Nous avons*

$$\cdot A(S) = \sum_{m=1}^{n} P_m A(t_m), \qquad A^{\cdot}(S) = \sum_{m=1}^{n} A(t_m) P_m. \tag{26}$$

Démonstration. D'après la propriété 6 nous avons

$$\cdot A(S) = \sum_{m=1}^{n} P_m \cdot A(S) = \sum_{m=1}^{n} P_m A(t_m)$$

et une formule analogue pour l'opération $A^{\cdot}(S)$.

T_1, T_2, T_3 étant des opérations additives, homogènes et transformant l'espace X en lui-même, posons

$$[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1. \tag{27}$$

On appelle l'opération $[T_1, T_2]$ *commutateur* des opérations T_1 et T_2. Il est bien connu que le commutateur admet les propriétés suivantes:

$$[T_2, T_1] = -[T_1, T_2], \tag{28}$$

$$[T_1 + T_2, T_3] = [T_1, T_3] + [T_2, T_3], \tag{29}$$

$$[T_1 T_2, T_3] = T_1 [T_2, T_3] + [T_1, T_3] T_2, \tag{30}$$

$$[T_1, [T_2, T_3]] + [T_2, [T_3, T_1]] + [T_3, [T_1, T_2]] = 0. \tag{31}$$

Soit $\mathscr{R}$ un anneau des opérations additives, homogènes et définies sur l'espace X. Soit une opération $T \in \mathscr{R}$. S'il existe un *idéal* $\mathscr{J} \subset \mathscr{R}$ des opérations tel que $T \in \mathscr{J}$, on appelle T *opération régulière* (par rapport à l'idéal $\mathscr{J}$). Par exemple chaque opération complète-continue est régulière (en désignant par $\mathscr{R}$ l'anneau des opérations linéaires, c'est-à-dire additives et continues):

$$\begin{aligned} A &= A^{\cdot}(S) + T_1 \quad \text{où} \quad A^{\cdot}(S) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k S^k, \\ B &= B^{\cdot}(S) + T_2, \quad \text{où} \quad B^{\cdot}(S) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k S^k, \end{aligned} \tag{32}$$

$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ et $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ sont des opérations additives, homogènes et transformat l'espace X en lui-même, T_1 et T_2 sont des opérations régulières (par rapport à l'idéal $\mathscr{J}$).

THÉORÈME 4. *Si $[A_i, S]$, $[B_i, S]$, T_1, T_2 sont régulières par rapport à l'idéal $\mathcal{J}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, alors la superposition $C = BA$ admet la même forme*

$$C = C^{\cdot}(S) + T_3, \tag{33}$$

où

$$C^{\cdot}(S) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k S^k \quad \text{et} \quad C_k = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{n} (-1)^{k+m+1} d_{mk} B(t_m) A(t_m), \tag{34}$$

$$[C_k, S] \in \mathcal{J} \quad \textit{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$T_3 = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_m [B(t_m), P_k] A(t_k) + T_2 \cdot A + B^{\cdot}(S) T_1 \in \mathcal{J}.$$

V désigne le déterminant de Vandermonde des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_n$; $d_{m,k}$ désignent les sous-déterminants obtenus du déterminant V en omettant la m-ième ligne et $k+1$-ième colonne.

Démonstration. Nous avons

$$BA = [B^{\cdot}(S) + T_2][A^{\cdot}(S) + T_1]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} B(t_m) P_m \cdot \sum_{k=1}^{n} A t_k P_k + T_2 A + B^{\cdot}(S) T_1$$

$$= \sum_{m,k=1}^{n} B(t_m) P_m A(t_k) P_k + T_2 A + B^{\cdot}(S) T_1$$

$$= \sum_{m,k=1}^{n} B(t_m) A(t_k) P_m P_k + \sum_{m,k=1}^{n} B(t_m)[P_m, A(t_k)] P_k + T_2 A + B^{\cdot}(S) T_1$$

$$= \sum_{m=1}^{n} B(t_m) A(t_m) P_m + T_3.$$

Nous démontrerons maintenant que $T_3 \in \mathcal{J}$. Remarquons que nous avons pour $k = 1, 2, \ldots, n$

$$P_k = [p_k(t_k)]^{-1} p_k(S) = [p_k(t_k)]^{-1} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (S - t_i I) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n-1} (-1)^i [p_k(t_k)]^{-1} p_{k,i} S^i;$$

$p_{k,i}$ désignent des polynômes symétriques de degré i des variables $t_1, t_2, \ldots t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n$. Nous aurons pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$ et $i = 0, 1, \ldots$

$$[A_j, S^i] = [A_j, SS^{i-1}] = [A_j, S] S^{i-1} + S[A_j, S^{i-1}],$$

d'où $[A_j, S^i] \in \mathcal{J}$, si $[A_j, S^{i-1}] \in \mathcal{J}$. Alors

$$[A_j, P_k] = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n-1} (-1)^i [p_k(t_k)]^{-1} p_{k,i} [A_j, S^i] \in \mathcal{J},$$

$$[A(t_m), P_k] = \sum_{j=0}^{n-1} t_m^j [A_j, P_k] \in \mathcal{J}.$$

Si l'on suppose que $T_1, T_2 \in \mathcal{J}$ on obtient finalement $T_3 \in \mathcal{J}$. En admettant

$$B(t_m) A(t_m) = C(t_m) = \sum_{k=0}^{n-1} t_m^k C_k \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

nous avons

$$BA = \sum_{m=1}^{n} C(t_m) P_m + T_3.$$

Résolvons le système (35) d'équations linéaires par rapport aux coefficients C_k. Le déterminant V de ce système est le déterminant de Vandermonde des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et $V \neq 0$, si le polynôme caractéristique d'admet pas de racines multiples. Donc

$$C_k = \frac{1}{V} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{k-1} & B(t_1) A(t_1) & t_1^{k+1} & \ldots & t_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_m & \ldots & t_m^{k-1} & B(t_m) A(t_m) & t_m^{k+1} & \ldots & t_m^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_n & \ldots & t_n^{k-1} & B(t_n) A(t_n) & t_n^{k+1} & \ldots & t_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{k+m+1} B(t_m) A(t_m) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{k-1} & t_1^{k+1} & \ldots & t_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_{m-1} & \ldots & t_{m-1}^{k-1} & t_{m-1}^{k+1} & \ldots & t_{m-1}^{n-1} \\ 1 & t_{m+1} & \ldots & t_{m+1}^{k-1} & t_{m+1}^{k+1} & \ldots & t_{m+1}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_n & \ldots & t_n^{k-1} & t_n^{k+1} & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{k+m+1} d_{m,k} B(t_m) A(t_m).$$

Nous démontrerons encore que $[C_k, S] \in \mathcal{J}$. Notamment nous avons

$$[C_k, S] = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{k+m+1}d_{m,k}[B(t_m)A(t_m), S]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{k+m+1}d_{m,k}\{[B(t_m)[A(t_m), S]+[B(t_m), S[A(t_m)]\}.$$

En outre

$$[A(t_m), S] = \sum_{k=0}^{n-1} t_m^k [A_k, S] \in \mathcal{J}$$

et par analogie $[B(t_m), S] \in \mathcal{J}$. Il en résulte que $[C_k, S] \in \mathcal{J}$.

On appelle *régularisateur simple* (par rapport à l'idéal $\mathcal{J}$) de l'opération A une opération $R(A) = \tilde{A}^{\cdot}(S)+\tilde{T}$ telle que $R(A)A = I+T'$, $AR(A) = I+T''$ et $\tilde{T}, T', T'' \in \mathcal{J}$.

THÉORÈME 5. *Dans les conditions du théorème 4, si toutes les opérations $[A(t_m)]^{-1}$ existent, l'opération A admet le régularisateur simple $R(A)$ et*

$$R(A) = \sum_{k=0}^{n-1}\tilde{A}_k S^k = \sum_{m=1}^{n}[A(t_m)]^{-1}P_m \tag{36}$$

où

$$\tilde{A}_k = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{k+m+1}d_{m,k}[A(t_m)]^{-1} \tag{37}$$

(V, $d_{m,k}$ *sont déterminés dans le théorème* 4) *et*

$$R(A)A = I+T', \quad AR(A) = I+T'',$$

où

$$T' = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A(t_k)]^{-1}[P_k, A(t_m)]P_m+R(A)T_1 \in \mathcal{J}, \tag{38}$$

$$T'' = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A(t_k)[P_k, [A(t_m)]^{-1}]P_m+T_1R(A) \in \mathcal{J}.$$

Démonstration. En désignant $R(A)A = C = C^{\cdot}(S)+T_3$ nous avons, d'après le théorème précédent, l'égalité $C^{\cdot}(S) = I$, d'où

$$\tilde{A}(t_m)A(t_m) = C(t_m) = I \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

en posant $\tilde{A}(t_m) = \sum_{k=0}^{n-1} t_m^k \tilde{A}_k$. Il en résulte $\tilde{A}(t_m) = [A(t_m)]^{-1}$ ($m =$

$1, 2, \ldots, n$) et la formule suivante pour l'opération $\tilde{A}^{\cdot}(S)$:

$$\tilde{A}^{\cdot}(S) = \sum_{m=1}^{n}[A(t_m)]^{-1}P_m.$$

D'autre part nous obtenons le système d'équations suivant:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_m^k \tilde{A}_k = [A(t_m)]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant de ce système est égal au détermiant V de Vandermonde, différent de zéro par hypothèse, donc la solution est la suivante:

$$\tilde{A}_k = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{k+m+1}d_{m,k}[A(t_m)]^{-1}$$

($d_{m,k}$ ont été déterminés dans le théorème 4). Ensuite nous avons

$$T_3 = T' = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A(t_k)]^{-1}[P_k, A(t_m)]P_m+\tilde{A}^{\cdot}(S)T_1$$

si nous admettons, sans restreindre la généralité, que $R(A) = \tilde{A}^{\cdot}(S)$, $\tilde{T} = 0$.

En considérant la superposition $AR(A)$ nous obtiendrons les mêmes résultats pour les opérations-coefficients $\tilde{A}_k$ et la formule (38) pour l'opération T''.

Remarquons encore que d'après les hypothèses admises nous avons

$$A(S)+T_1 = \sum_{k=0}^{n-1}S^kA_k+T_1 = \sum_{k=0}^{n-1}A_kS^k+\sum_{k=0}^{n-1}[S^k, A_k]+T_1 = A^{\cdot}(S)+T_1'$$

où $T_1' \in \mathcal{J}$. Donc il suffit de considérer les opérations de la forme $A^{\cdot}(S)$.

Si l'opération S est commutitative avec toutes les opérations A_i:

$$[A_i, S] = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

alors les opérations $A^{\cdot}(S)$ et $A^{\cdot}(S)$ sont égales. Dans ce cas $T' = T'' = 0$, si nous admettons $T_1 = 0$, donc

$$A(S)R(A) = R(A)A(S) = I$$

et $R(A) = [A(S)]^{-1}$. Alors nous avons

COROLLAIRE 1. *Si $[A_i, S] = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ et si les opérations $[A(t_m)]^{-1}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ existent l'opération $A(S)$ admet une opération inverse et*

$$[A(S)]^{-1} = \sum_{m=1}^{n}P_m[A(t_m)]^{-1} = \sum_{m=1}^{n}[A(t_m)]^{-1}P_m. \tag{39}$$

Rappelons maintenant la définition et les propriétes des opérations de Fredholm (voir [6], p. 108).

Soit X un espace de Banach et X^* l'espace adjoint à X (c'est-à-dire l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans X). On appelle l'opération linéaire T (transformant l'espace X en lui-même) *opération de Fredholm*, si elle vérifie les trois théorèmes suivants:

(i) Le nombre de solutions linéaires indépendantes de l'équation $(I+T)x = 0$ est fini.

(ii) Les équations $(I+T)x = 0$ et $(I+T)^*y = 0$ (T^* désigne l'opération adjointe à l'opération T, $x \in X$, $y \in X^*$) ont le même nombre de solutions linéaires indépendantes.

(iii) La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(I+T)x = x_0 \quad (\text{resp. } (I+T)^*y = y_0,\, y_0 \in X^*)$$

ait une solution est la suivante:

$$y_i(x_0) = 0 \quad (\text{resp. } y_0(x_i) = 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où y_i désignent toutes les solutions linéaires indépendantes de l'équation $(I+T)^*y = 0$ (resp. x_i désignent les solutions lineaires indépendantes de l'équation $(I+T)x = 0$).

Si l'opération T est régulière, alors l'opération T^* l'est aussi. Les opérations algébriques ne sont pas régulières. En effet, la somme et la superposition des deux opérations algébriques ne sont pas, en général, des opérations algébriques. Remarquons encore que l'opération S^* adjointe à une opération algébrique S est aussi une opération algébrique d'après l'égalité:

$$0 = [P(S)]^* = \Big[\sum_{m=0}^{n} p_m S^m\Big]^* = \sum_{m=0}^{n} \overline{p}_m (S^*)^m.$$

Nous énoncerons maintenant trois théorèmes sur l'existence des solutions des équations avec opérations algébriques. Nous ne donnerons pas leurs démonstrations qui résultent du théorème 5 de la même manière que les théorèmes 12, 13, 14, dans le travail [6].

Admettons les hypothèses du théorème 5, en outre admettons que $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ soit un idéal des opérations de Fredholm. Sous ces conditions nous avons le

THÉORÈME 6. *L'équation $Ax = 0$ admet un nombre fini de solutions linéaires indépendantes.*

THÉORÈME 7. *L'équation $Ax = x_0$ admet une solution sous la condition nécessaire et suffisante $y_i(x_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ où y_i désignent toutes les solutions linéaires indépendantes de l'équation adjointe $A^*y = 0$.*

THÉORÈME 8. *La différence $\varkappa = k - k^*$ entre le nombre k de solutions linéaires indépendantes de l'équation $Ax = 0$ et le nombre k^* de solutions linéaires indépendantes de l'équation adjointe $A^*y = 0$ ne dépend que de l'opération $^{\cdot}A(S)$.*

On appelle le nombre $\varkappa$ *indice* de l'opération $A^{\cdot}(S)$. Il est évident que les opérations $^{\cdot}A(S)$ et $A^{\cdot}(S)$ ont le même indice et que toutes les opérations régulières ont un indice nul.

V. Exemples d'opérations algébriques. Soit l'opération T_C définie par la formule (3) de l'introduction. D'après les propriétés connues de la transformation de Fourier, en admettant

$$\overline{T}x = T^3x = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{E^k} x(s)\, e^{-i(t,s)} ds, \qquad T\overline{T} = \overline{T}T = I,$$

nous obtenons la formule suivante pour l'opération T_C:

$$T_C = \tfrac{1}{2}(T + \overline{T}).$$

Donc nous avons

$$T_C^3 = \tfrac{1}{8}(T+\overline{T})^3 = \tfrac{1}{8}(T^3 + \overline{T}^3 + 3T^2\overline{T} + 3\overline{T}T^2)$$
$$= \tfrac{1}{8}(T + \overline{T} + 3T + 3\overline{T}) = \tfrac{1}{2}(T+\overline{T}) = T_C,$$

d'où il résulte l'identité

$$T_C^3 - T_C = 0 \tag{40}$$

avec le polynôme caractéristique $P(t) = t^3 - t$ et les racines caractéristiques $0, -1, 1$. Donc nous avons

$$P_0 = I - T_C^2, \quad P_{-1} = \tfrac{1}{2}T_C^2 - \tfrac{1}{2}T_C, \quad P_1 = \tfrac{1}{2}T_C^2 + \tfrac{1}{2}T_C.$$

Remarquons que

$$T_C^2 = \tfrac{1}{4}(T+\overline{T})^2 = \tfrac{1}{4}(T^2 + T\overline{T} + \overline{T}T + \overline{T}^2) = \tfrac{1}{2}(T^2 + I)$$

et

$$T^2[x(t)] = x(-t).$$

Soit $x \in X$ arbitraire. Posons $x = x^+ + x^-$, où

$$x^+(t) = \tfrac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad \text{et} \quad x^+(-t) = x^+(t),$$
$$x^-(t) = \tfrac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad \text{et} \quad x^-(-t) = -x^-(t).$$

On sait que $T_C x_- = 0$. Alors

$$P_0 x^+ = (I - T_C^2)x^+ = \tfrac{1}{2}(I - T^2)x^+ = 0, \qquad P_0 x^- = x^-,$$
$$P_{-1}x^+ = \tfrac{1}{2}(T_C^2 - T_C)x^+ = \tfrac{1}{2}(I - T_C)x^+, \qquad P_{-1}x^- = 0,$$
$$P_1 x^+ = \tfrac{1}{2}(T_C^2 + T_C)x^+ = \tfrac{1}{2}(I + T_C)x^+, \qquad P_1 x^- = 0.$$

Il en résulte que P_0X est l'espace de toutes les fonctions $x \in X$ impaires, $P_{-1}X$ est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I-T_C)x$, $x \in X$ étant des fonctions paires, P_1X est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I+T_C)x$, $x \in X$ étant des fonctions paires.

Nous pouvons constater par des méthodes analogues aux précédentes que l'opération

$$T_S = \frac{1}{2i}(T-\overline{T})$$

satisfait à la même identité (40). En remarquant que $T_S x^+ = 0$, nous voyons que dans ce cas P_0X est l'espace de toutes les fonctions $x \in X$ paires, $P_{-1}X$ est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I-T_S)x$, $x \in X$ étant des fonctions impaires, P_1x est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I+T_S)x$, $x \in X$ étant des fonctions impaires.

Remarquons ensuite que, grâce à l'usage des opérations T_C et T_S au lieu des puissances de la transformation de Fourier il suffit de décomposer l'espace X, non pas en quatre, mais en trois composantes.

Travaux cités

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, *Algebras on certain singular operators*. Amer. Jour. of Math. 78, 2 (1956), p. 289-309.

[2] Ю. И. Черский, *Общее сингулярное уравнение и уравнения типа свёртки*, Мат. сборник 41,3 (1957), p. 277-296.

[3] З. Н. Халилов, *Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце*, ibid. 25,2 (1949), p. 169-188.

[4] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), p. 575-580.

[5] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, IV édition russe, Mockba 1960, p. 55-66.

[6] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur lés équations involutives et leurs applications*, Studia Math. 20 (1961), p. 95-117.

[7] — *Sur les involutions d'ordre n*, Bull. de l'Ac. Pol. d. Sci. VIII, 11-12 (1960), p. 735-739.

[8] — *Sur les équations involutives d'ordre n*, ibidem, p. 741-746.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1961

STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1962)

О неопределённом A-интеграле и рядах Фурье (A)

О. Д. ЦЕРЕТЕЛИ (Тбилиси)

Понятие A-интеграла оказалось весьма полезным в некоторых вопросах теории тригонометических рядов и теории интегралов Коши (Титчмарш [4], Ульянов [5, 6, 7], Хускивадзе [9]). Однако было замечено, что этот интеграл обладает целым рядом патологических свойств (см. Очан [3], Ульянов [7], Виноградова [1, 2]).

В настоящей статье мы также указываем на ряд таких свойств A-интеграла.

Работа состоит из трёх параграфов.

§ 1 посвящён доказательству основной леммы (1.3), более или менее очевидными следствиями которой являются все результаты последующих двух параграфов.

В §§ 2 и 3 рассматриваются некоторые свойства неопределённого A-интеграла и рядов Фурье (A). Основным результатом этих параграфов следует считать теорему 3.2.

§ 1

Прежде чем сформулировать основную лемму, введём следующие определения.

1.1. Определение. Пусть на некотором множестве E задана функция $f(x)$ и $n \geqslant 0$. Функция $[f(x)]_n$, $x \in E$, определяется следующим образом:

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad |f(x)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad |f(x)| > n. \end{cases}$$

1.2. Определение. Будем говорить, что последовательность действительных чисел q_k, $k=1,2,\ldots$, удовлетворяет условию (A), если $0 < q_{k+1} < q_k$, $k = 1,2,\ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} kq_k = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \infty.$$