where $s = \lg c_a / \lg a$. By [4], 3.4, (3.15)

$$(+++) \qquad \varphi(\bar{\delta} u)\psi\left(\frac{1}{u}\right) \leqslant \delta \quad \text{for} \quad u \geqslant \bar{u}.$$

The last inequality shows that the inequalities $\limsup_{u\to\infty} \varphi(u)/u^r < \infty$ and $\liminf_{v\to 0} \psi(v)/v^r > 0$ are equivalent; hence $\sigma_0 = s_0$. This equality holds also when one of the values σ_0, s_0 is equal to ∞.

By (++),

$$s_0 \leqslant \frac{\lg c_a}{\lg a} = \frac{\lg\varphi(u)}{\lg\delta + \lg u} \quad \text{for} \quad u \geqslant u_0,$$

whence $\liminf_{u\to\infty} \lg\varphi(u)/\lg u \geqslant s_0$, and since $\sigma_0 \geqslant \limsup_{u\to\infty} \lg\varphi(u)/\lg u$, (*) holds with $r = s_0 = \sigma_0$. From (+) and (++) it follows also that

$$\lim_{v\to 0} \frac{\lg\psi(v)}{\lg v} = r.$$

A function $\varphi(u)$ is called *regularly increasing with index* r_φ if $\varphi(u) = u^{r_\varphi}\varrho(u)$, where $\varrho(\lambda u)/\varrho(u) \to 1$ as $u \to \infty$, $\lambda > 0$ (cf. [1], [2]).

3.2. *If the relation* 3.1 (*) *holds and if* $\lg\varphi(e^u)$ *is a convex function for large* u, *then* $\varphi(u)$ *is a regularly increasing function* (*for large* u) *with index* $r_\varphi = r$.

The function $u\varphi'(u)/\varphi(u)$ is defined for $u \in B = (a, \infty) \setminus A$, where the set A is of measure 0, and $u\varphi'(u)/\varphi(u) \to g$ as $u \to \infty$, $u \in B$. Since

$$\frac{\lg\varphi(u) - \lg\varphi(a)}{\lg u - \lg a} = \frac{\int_a^u \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt}{\int_a^u \frac{dt}{t}}$$

and the ratio of integrals on the right-hand side of the above equality tends to g, the value g is finite and $g = r$. Now it is sufficient to apply a known criterion (cf. e. g. [2]).

References

[1] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière*, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), p. 55-62.

[2] W. Matuszewska, *Regularly increasing functions in connection with the theory of $L^{*\varphi}$-spaces*, Studia Math. 21 (1962), p. 317-344.

[3] J. Musielak and W. Orlicz, *On modular spaces*, ibidem 18 (1959), p. 49-65.

[4] — *On modular spaces of strongly summable sequences*, ibidem 22 (1962), p. 127-146.

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1962

STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1963)

Équations avec opérations algébriques

par

D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ (Warszawa)

Sommaire

I. Introduction

Soit une équation intégrale singulière:

$$A(t)x(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{x(s)}{s-t}\,ds = x_0(t) \qquad (s, t \in L),$$

où L désigne un arc de Jordan, régulier et fermé, l'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy, les fonctions complexes $A(t)$, $B(t)$, $x(t)$, $x_0(t)$ définies pour $t \in L$ satisfont à la condition de Hölder. Les méthodes classiques de Carleman, Vécoua et Muskhelichvili (voir la monographie [10]) utilisées dans l'étude de ces équations, ainsi que les considérations plus abstraites de Halilov [6], Tcherski [4] sont fondées en principe sur la propriété unique qu'une transformation intégrale singulière (pour les arcs fermés)

$$S(x) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{x(s)}{s-t}\,ds$$

satisfait à l'identité $S^2 = I$ dans la classe des fonctions hölderiennes. On a en effet obtenu les résultats classiques sur les équations singulières par les méthodes algébriques présentées dans le travail de l'auteur [14].

De même, si nous avons des équations contenant des puissances de la transformation de Fourier T, on peut les résoudre moyennant l'identité analogue: $T^4 = I$ (voir [15], [16] et p. 365 du travail actuel).

Nous étudierons ici les équations linéaires avec opérations qui contiennent les puissances d'une opération algébrique S. Une *opération algébrique* une opération additive et homogène, définie sur l'espace X linéaire sur le corps des nombres complexes, qui vérifie une identité polynomiale:

$$P(S) \equiv p_0 I + p_1 S + \ldots + p_N S^N = 0, \tag{1}$$

les coefficients constants complexes ne s'annulant pas en même temps. Si l'opération S satisfait à une identité polynomiale de degré N et ne satisfait pas à une identité de degré inférieur à N, nous l'appellerons *opération algébrique d'ordre* N. Dans le cas particulier $P(S) = I - S^2$ on appelle l'opération S *involution*, dans le cas $P(S) = I - S^N$ elle est dite *involution d'ordre* N.

Comme nous l'axons vu, une transformation intégrale singulière est une involution, une transformation de Fourier est une involution d'ordre 4.

Enfin nous discuterons plus en détail ces transformations et autres exemples d'opérations algébriques.

Ajoutons que les involutions d'ordre N et les équations correspondantes ont été étudiées par l'auteur [15] et [16], les équations avec opérations algébriques sans racines multiples — dans le travail de l'auteur [17].

Le présent travail contient des résultats nouveaux sur les opérations algébriques avec racines multiples; en outre, il est une extension et une généralisation des travaux [14], [15], [16] et [17] de l'auteur. Par exemple, les théorèmes du § X ont été démontrés à l'aide des notions d'espace de Banach, maintenant il suffira de considérer un espace linéaire.

Les résultats précédents deviennent de faciles conséquences des théorèmes du travail actuel.

La propriété (1) est *fondamentale* pour les opérations considérées: grâce à lui tous les résultats peuvent être obtenus par les méthodes simples de l'algèbre linéaire.

Nous ne nous occuperons pas ici des propriétés métriques des involutions et des involutions d'ordre N qui ont été présentées dans les travaux [14] et [15] car elles ne sont pas vérifiées par les opérations algébriques arbitraires et ne présentent pas d'intérêt du point de vue des équations considérées.

II. Formule d'Hermite

Nous rappelons d'abord (sans la démontrer) d'après Gontcharov [7] la formulé d'interpolation d'Hermite que voici:

FORMULE D'HERMITE. Il existe un polynôme unique $W(t)$ de degré $N-1$ qui admet en n points différents t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ avec ses dérivées de degré k $(k = 0, 1, \ldots, a_i - 1)$ des valeurs données y_{ki}:

$$W^{(k)}(t_i) = y_{ki} \quad (k = 0, 1, \ldots, a_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous supposons $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = N$, et

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{P(t)}{(t-t_i)^{a_i}} \sum_{k=0}^{a_i-1} y_{ki} \left\{ \frac{(t-t_i)^{a_i}}{P(t)} \right\}_{(a_i-1-k;t_i)} \frac{(t-t_i)^k}{k!} \right], \tag{2}$$

où l'on a posé

$$P(t) = \prod_{m=1}^{n} (t-t_m)^{a_m}, \tag{3}$$

$$\{f(t)\}_{(k;t_i)} = \sum_{m=0}^{k} \frac{(t-t_i)^m}{m!} \left. \frac{d^m f(t)}{dt^m} \right|_{t=t_i}. \tag{4}$$

THÉORÈME 1 (décomposition de l'unité). *Avec les hypothèses précédentes on a la représentation unique*

$$1 = \sum_{m=1}^{n} \mathfrak{p}_i(t)$$

(pour t_i et a_i fixés), où l'on a posé

$$\mathfrak{p}_i(t) = q_i(t) \prod_{m=1}^{n} (t-t_m)^{a_m}, \quad q_i(t) = \left\{ \frac{(t-t_i)^{a_i}}{P(t)} \right\}_{(a_i-1;t_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

les polynômes $\mathfrak{p}_i(t)$ étant linéairement indépendant.

Démonstration. Nous avons $W(t) = 1$, donc

$$W^{(0)}(t_i) = 1, \quad W^{(k)}(t_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, a_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

En remarquant que

$$\frac{P(t)}{(t-t_i)^{a_i}} = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n} (t-t_m)^{a_m},$$

nous obtenons moyennant la formule d'Hermite:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n} (t-t_m)^{a_m} \left\{ \frac{(t-t_i)^{a_i}}{P(t)} \right\}_{(a_i-1;t_i)} \right],$$

d'où résulte la formule proposée.

Remarquons ensuite que si les racines t_i sont simples, nous en obtenons la formule d'interpolation de Lagrange. En effet, nous avons dans ce cas $a_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et

$$\left\{\frac{(t-t_i)^1}{P(t)}\right\}_{(0;t_i)} = \frac{t-t_i}{P(t)}\bigg|_{t=t_i} = \left[\prod_{\substack{m=1\\m\neq i}}^{n}(t-t_m)\right]^{-1}\Bigg|_{t=t_i} = \left[\prod_{\substack{m=1\\m\neq i}}^{n}(t_i-t_m)\right]^{-1},$$

d'où résulte la formule suivante pour le polynôme $W(t)$:

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{0i} \prod_{\substack{m=1\\m\neq i}}^{n} \frac{t-t_m}{t_i-t_m}.$$

En outre on a, dans ce cas,

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{m=1\\m\neq i}}^{n}\frac{t-t_m}{t_i-t_m} \equiv 1.$$

III. Décomposition d'un espace par une opération algébrique

Étant donnés l'espace linéaire X et l'opération algébrique S d'ordre N, définie sur l'espace X, nous avons

$$P(S) \equiv p_0 I + p_1 S + \ldots + p_N S^N = 0.$$

On peut supposer, sans limiter la généralité, que $p_N = 1$.

Le polynôme de la variable complexe $P(t)$ est appelé *polynôme caractéristique* de l'opération algébrique S et les racines $t_1, \ldots, t_n$ du polynôme caractéristique sont dites *racines caractéristiques* de l'opération S. Alors nous avons

(6) $$P(t) = \prod_{m=1}^{n}(t-t_m)^{a_m},$$

les nombres $t_1, \ldots, t_n$ étant différents et $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = N$.

Écrivons

(7) $$P_i = \mathfrak{p}_i(S) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les polynômes $\mathfrak{p}_i(t)$ sont définis par les formules (5). Les opérations P_i ont des propriétés très importantes: on a d'abord

(8) $$\sum_{i=1}^{n} P_i = I.$$

Cela résulte immédiatement du théorème 1 sur la décomposition de l'unité. Les opérations P_i sont les opérations de projection:

(9) $$P_i P_j = \begin{cases} P_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, si $i \neq j$, nous avons

$$P_i P_j = q_i(S) q_j(S) \prod_{\substack{m=1\\m\neq i}}^{n}(S-t_m I)^{a_m} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(S-t_k I)^{a_k}$$

$$= q_i(S) q_j(S) \prod_{\substack{m=1\\m\neq i,\, m\neq j}}^{n} (S-t_m I)^{a_m} P(S) = 0$$

et, d'après la formule (8),

$$P_i = P_i \sum_{j=1}^{n} P_j = \sum_{j=1}^{n} P_i P_j = P_i^2.$$

Ensuite, nous avons

(10) $$(S-t_i I)^{a_i} P_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet,

$$(S-t_i I)^{a_i} P_i = q_i(S)(S-t_i I)^{a_i} \prod_{\substack{m=1\\m\neq i}}^{n}(S-t_m I)^{a_m} = q_i(S) P(S) = 0.$$

THÉORÈME 2. *L'espace X est la somme simple des espaces*

$$X_i = P_i X = \{P_i x;\ x \in X\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Démonstration. D'après la propriété (8) on peut représenter tout élément $x \in X$ sous la forme suivante:

(11) $$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \text{où} \quad x_i = P_i x \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après les propriétés (8) et (9), cette représentation est *unique*. Il en résulte l'identité

(12) $$(S-t_i I)^{a_i} x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $x_i \in X_i$ arbitraire.

Si l'opération S admet des racines simples, on a $a_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n = N)$ et d'après l'identité (10)

$$SP_i = t_i P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

d'où

$$Sx_i = t_i x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et nous obtenons le théorème suivant:

THÉORÈME 2'. *S étant une opération additive et homogène, définie sur l'espace X, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *S est une opération algébrique d'ordre N avec racines caractéristiques simples.*

(b) *Il existe N opérations P_i additives et homogènes telles que*

$$P_i P_k = \delta_{ik} P_i, \quad \sum_{i=1}^{N} P_i = I \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=1}^{N} t_k P_k$$

(*δ_{ik} désignant le symbole de Kronecker*).

(c) *L'espace X est la somme simple de N sous-espaces X_i tels que $Sx = t_i x$ pour $x \in X_i$ (t_i étant des nombres complexes différents arbitrairement fixés).*

La démonstration du théorème est donnée dans le travail [17]. En particulier les implications (a) → (b) → (c) résultent des considérations précédentes et du théorème 2. Par exemple, si S est une involution, nous obtenons

$$P_1 = \frac{1}{2}(I+S), \quad P_2 = \frac{1}{2}(I-S).$$

Si S est une involution d'ordre N, nous obtenons (par un calcul simple)

$$P_m = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{-km} S^k \quad (m = 1, 2, \ldots, N)$$

où $\varepsilon = e^{2\pi i/N}$ désigne le racine de degré N de l'unité.

IV. Propriétés des polynômes d'une opération algébrique

Soit donné un polynôme de l'opération algébrique S d'ordre N:

$$A(S) = \sum_{m=0}^{M} A_m S^m, \tag{14}$$

A_m $(m = 0, 1, 2, \ldots, M)$ étant des opérations additives, homogènes et transformant l'espace X en lui-même.

On peut désigner

$$A^{(0)}(t_i) = A(t_i), \quad A^{(m)}(t_i) = m! \sum_{k=m}^{M} \binom{k}{m} A_k t_i^{k-m} = \left.\frac{d^m A(t)}{dt}\right|_{t=t_i} \tag{15}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, M;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous démontrerons les propriétés suivantes du polynôme $A(S)$:

$$A(S) = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

$$A(S)P_i = \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

$$A(S) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m P_i. \tag{18}$$

La propriété (16) s'établit comme il suit:

$$A(S) = \sum_{m=0}^{M} A_m S^m = \sum_{m=0}^{M} A_m [(S - t_i I) + t_i I)]^m = \sum_{m=0}^{M} A_m \sum_{k=0}^{M} \binom{m}{k} t_i^{m-k} (S - t_i I)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{M} \left[\sum_{m=k}^{M} A_m \binom{m}{k} t_i^{m-k} \right] (S - t_i I)^k = \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m.$$

Pour la démonstration de la propriété (17) remarquons que, d'après la formule (10), nous avons $(S - t_i I)^{a_i} P_i = 0$, donc

$$A(S)P_i = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m P_i = \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m P_i.$$

La propriété (18) se déduit de la propriété (17) et (8) de la manière suivante:

$$A(S) = A(S) \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} A(S) P_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m P_i.$$

Remarquons que, d'après les propriétés (17) et (18), il suffit de considérer les polynômes $A(S)$ de degré $M \leqslant N-1$, et dans le cas d'une racine multiple t_i il suffit d'ordre $M \leqslant a_i - 1$.

Dans le cas $t_{i_0} = 0$, $A^{(m)}(0) = m!\,A_m$ et nous avons

$$A(S)P_{i_0} = \sum_{m=0}^{a_{i_0}-1} A_m S^m P_{i_0}, \tag{19}$$

donc la décomposition (17) est superflue.

Si les racines caractéristiques t_i de l'opération S sont simples, nous avons $a_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n = N)$ et

$$A(S) = \sum_{i=1}^{N} A(t_i)P_i. \tag{20}$$

Il est évident que les considérations de ce paragraphe subsistent pour les polynômes à coefficients constants complexes a_m:

$$a(S) = \sum_{m=1}^{N-1} a_m S^m.$$

V. Équations à coefficients constants. Cas d'une racine multiple

Soit un espace $X_i = P_i X$ fixé arbitrairement $(1 \leqslant i \leqslant n)$. D'après la propriété (12) nous avons

$$(S - t_i I)^{a_i} x_i = 0 \quad (x_i \in X_i \text{ est arbitraire}),$$

donc on peut considérer l'opération S sur l'espace X_i comme une opération algébrique d'ordre a_i avec une racine multiple t_i.

Désignons

$$E_m(t_i) = \{y_i \in X_i\colon (S - t_i I)^m y_i = 0\} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots a_i). \tag{21}$$

On voit que $E_0(t_i) = \{0\}$, $E_{a_i}(t_i) = X_i$ et que $E_m(t_i) \subset E_{m+1}(t_i)$.

LEMME. *Pour $m = 0, 1, \ldots, a_i - 1$ on a $E_m(t_i) \neq E_{m+1}(t_i)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un indice m_0 $(0 \leqslant m_0 \leqslant a_i - 1)$ pour lequel on ait:

$$E_{m_0}(t_i) = E_{m_0+1}(t_i)$$

donc pour tout $x_i \in X_i$ la condition $(S - t_i I)^{m_0+1} x_i = 0$ implique la condition $(S - t_i I)^{m_0} x_i = 0$. Nous allons démontrer que pour tout $m > m_0$ la condition $(S - t_i I)^{m+1} x_i = 0$ implique la condition $(S - t_i I)^m x_i = 0$. En effet, si

$$0 = (S - t_i I)^{m+1} x_i = (S - t_i I)^{m_0+1}[(S - t_i I)^{m-m_0} x_i]$$

alors on a aussi, d'après notre supposition,

$$0 = (S - t_i I)^{m_0}[(S - t_i I)^{m-m_0} x_i] = (S - t_i I)^m x_i.$$

Il en résulte que

$$E_m(t_i) = E_{m+1}(t_i) \quad \text{pour tout} \quad m_0 \leqslant m \leqslant a_i.$$

Mais d'après la dernière égalité $E_m(t_i) = E_{a_i}(t_i) = X_i$, d'où résulte $m_0 = a_i$, contrairement à l'hypothèse. Donc il doit avoir

$$E_m(t_i) \neq E_{m+1}(t_i) \quad (m = 0, 1, \ldots, a_i - 1).$$

Soit donné un polynôme

$$a(S) = \sum_{m=0}^{a_i-1} a_m S^m \tag{22}$$

à coefficients constants complexes.

THÉORÈME 3. *Tout élément $y_i \in E_{\nu_i}(t_i)$ (ν_i étant fixé dans l'intervalle $0 \leqslant \nu_i \leqslant a_i - 1$) est la solution de l'équation*

$$a(S) y_i = 0 \tag{23}$$

sous la condition nécessaire et suffisante

$$a^{(k)}(t_i) = 0 \quad \textit{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_i - 1 \tag{24}$$

(si $\nu_i = 0$ l'équation (23) n'admet qu'une solution nulle).

Démonstration. Admettons les conditions (24). Si $y_i \in E_{\nu_i}(t_i)$, alors, d'après la propriété (17),

$$a(S) y_i = a(S) P_i y = \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m P_i y$$

$$= \sum_{m=\nu_i}^{a_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)} t_i (S - t_i I)^m y_i = \left[\sum_{m=\nu_i}^{a_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^{m-\nu_i}\right](S - t_i I)^{\nu_i} y_i = 0,$$

donc la condition (24) est suffisante. D'autre part, si $y_i \in E_{\nu_i}(t_i)$ est une solution arbitraire de l'équation (23) qui satisfait à la condition (24), nous avons

$$0 = a(S) y_i = \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m y_i = \sum_{m=0}^{\nu_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^m y_i.$$

En transformant le dernière égalité à l'aide de l'opération $(S - t_i I)^{\nu_i-1}$, nous obtenons l'égalité suivante:

$$\sum_{m=0}^{\nu_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S - t_i I)^{\nu_i-1+m} y_i = 0.$$

Mais $y_i \in E_{\nu_i}(t_i)$, donc il en résulte l'égalité suivante:

$$a^{(0)}(t_i)(S-t_iI)^{\nu_i-1}y_i = 0$$

qui est satisfaite pour $y_i \in E_{\nu_i}(t_i)$ arbitraire. D'après le lemme précédent il existe des $y_i \in E_{\nu_i}(t_i)$ tels que $(S-t_iI)^{\nu_i-1}y_i \neq 0$, donc on doit avoir $a^{(0)}(t_i) = 0$.

De la même manière, en transformant l'égalité

$$\sum_{m=0}^{\nu_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S-t_iI)^m y_i = \sum_{m=1}^{\nu_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S-t_iI)^m y_i = 0$$

à l'aide de l'opération $(S-t_iI)^{\nu_i-2}$, nous obtenons $a^{(1)}(t_i) = 0$.

En général, en admettant que $a^{(0)}(t_i) = \ldots = a^{(k-1)}(t_i) = 0$ $(0 < k \leqslant \nu_i-1)$ et en transformant l'égalité

$$\sum_{m=k}^{\nu_i-1} \frac{1}{m!} a^{(m)}(t_i)(S-t_iI)^m y_i = 0$$

à l'aide de l'opération $(S-t_iI)^{\nu_i-k}$, nous obtenons

$$a^{(k)}(t_i) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_i-1,$$

donc la condition (24) est aussi nécessaire.

THÉORÈME 4. *Supposons satisfaite la condition* (24):

$$a^{(k)}(t_i) = 0 \quad si \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_i-1 \quad (0 \leqslant \nu_i \leqslant a_i-1);$$

alors la condition nécessaire pour que l'équation

(25) $$a(S)x_i = x_{0i} \quad (x_{0i} \in X_i \ \textit{est donné})$$

ait une solution, est la suivante

(26) $$(S-t_iI)^{a_i-\nu_i}x_{0i} = 0$$

(*si* $\nu_i = 0$, *la condition* (26) *est satisfaite pour tout* $x_{0i} \in X_i$!).

Démonstration. S'il existe une solution x_i de l'équation (25) alors, d'après l'hypothèse (24),

$$(S-t_iI)^{a_i-\nu_i}x_{0i} = (S-t_iI)^{a_i-\nu_i}a(S)x_i = (S-t_iI)^{a_i-\nu_i}\sum_{k=\nu_i}^{a_i-1}\frac{1}{k!}a^{(k)}(t_i)(S-t_iI)^k x_i$$

$$= \left[\sum_{k=\nu_i}^{a_i-1}\frac{1}{k!}a^{(k)}(t_i)(S-t_iI)^{k-\nu_i}\right](S-t_iI)^{a_i}x_i = 0,$$

donc la condition (26) est nécessaire.

THÉORÈME 5. *Si les conditions* (24) *et* (26) *sont vérifiées, l'équation* (25) *admet une solution* x_i *si et seulement si* x_i *satisfait aux conditions:*

(27) $$(S-t_iI)^{\nu_i+m}x_i = \left[\frac{\nu_i!}{a^{(\nu_i)}(t_i)}\right]^{a_i-\nu_i}\sum_{k=0}^{a_i-1-\nu_i}(-1)^{k+m}d_{mk}^{\nu_i}(t_i)(S-t_iI)^k x_{0i}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i);$$

on a désigné par $d_{mk}^{\nu_i}(t_i)$ *le sous-déterminant obtenu en rayant la* $(m+1)^e$ *colonne et la* $(k+1)^e$ *ligne dans le déterminant*

(28) $$d_{\nu_i}(t_i) = \det[a_{mk}^{\nu_i}(t_i)],$$

où

(29) $$a_{mk}^{\nu_i}(t_i) = \begin{cases} 0 & \textit{pour} \quad k > m, \\ \dfrac{1}{(\nu_i+m-k)!}a^{(\nu_i+m-k)}(t_i) & \textit{pour} \quad k \leqslant m \end{cases}$$

$$(k, m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i).$$

Démonstration. En transformant l'équation (25) par les opérations $(S-t_iI)^m$ $(m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i)$ nous obtenons le système d'équations suivant:

(30) $$\sum_{k=\nu_i}^{a_i-1}\frac{1}{k!}a^{(k)}(t_i)(S-t_iI)^{k+m}x_i = (S-t_iI)^m x_{0i}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i).$$

Substituons maintenant

$$u_l = (S-t_iI)^{\nu_i+l}x_i, \quad v_l = (S-t_lI)^l x_{0i} \quad (l = 0, 1, \ldots, a_i-\nu_i-1).$$

On peut alors écrire le système (30) sous la forme suivante:

$$\sum_{k=\nu_i}^{a_i-1}\frac{1}{k!}a^{(k)}(t_i)u_{k+m-\nu_i} = v_m \quad (m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i)$$

ou sous la forme encore plus convenable:

(31) $$\sum_{l=0}^{a_i-1-\nu_i}\frac{1}{(\nu_i+l)!}a^{(\nu_i+l)}(t_i)u_{m+l} = v_m \quad (m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i).$$

Tous les éléments du déterminant $d_{\nu_i}(t_i)$ du système (31) (défini par les formules (28) et (29)) sur la diagonale principale sont égaux à

$$\frac{1}{\nu_i!}a^{(\nu_i)}(t_i) \neq 0,$$

au-dessous d'elle ils sont égaux à zéro, donc

$$d_{\nu_i}(t_i) = \left[\frac{1}{\nu_i!}a^{(\nu_i)}(t_i)\right]^{a_i-\nu_i} \neq 0.$$

La solution du système (31) prend la forme

$$(32)\quad u_m = \frac{1}{d_{\nu_i}(t_i)} \sum_{k=0}^{a_i-1-\nu_i} (-1)^{m+k} d_{mk}^{\nu_i}(t_i) v_k \qquad (m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i),$$

d'où résultent les conditions (27).

Au contraire, s'il existe un x_i qui satisfait aux conditions (27), alors on peut faire la même substitution et résoudre le système (32) par rapport à v_k. En effet, le déterminant de ce système est différent de zéro, comme le déterminant de la transformation linéaire inverse d'une transformation déterminée par le système (31) dont le déterminant est non nul. Donc le système (30) a une solution x_i et en admettant $m = 0$, nous obtenons que l'équation (25) admet la solution x_i.

VI. Équations à coefficients constants. Cas général

Considérons maintenant les équations à coefficients constants sur tout l'espace X. Soit donné le polynôme

$$a(S) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m S^m$$

à coefficients constants, S étant une opération algébrique d'ordre N avec le polynôme caractéristique $P(t) = \prod_{m=1}^{n} (t-t_m)^{a_m}$ $(a_1+a_2+\ldots+a_n = N)$. Nous obtenons

THÉORÈME 6. *Tout élément* $y \in X$, *tel que* $P_i y \in E_{\nu_i}(t_i)$ (ν_i *étant fixés arbitrairement dans les intervalles* $0 \leqslant \nu_i \leqslant a_i - 1$; $i = 1, 2, \ldots, n$) *est la solution de l'équation*

$$(33)\qquad a(S) y = 0$$

sous la condition nécessaire et suffisante

$$(34)\qquad a^{(k)}(t_i) = 0 \quad \textit{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_i - 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les ensembles $E_m(t_i)$ *étant déterminés par les formules* (21). (*Si* $\nu_i = 0$, *l'équation* (33) *n'admet qu'une solution nulle*).

Démonstration. D'après le théorème 2, l'équation (33) est équivalente au système d'équations indépendantes

$$(35)\qquad a(S) P_i y = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En remarquant que $P_i y = y_i$ et en appliquant le théorème 3 à chacune des équations (35) dans l'espace X_i correspondant, nous obtenons la conclusion du théorème proposé.

THÉORÈME 7. *Supposons remplie la condition* (34). *Alors la condition nécessaire pour que l'équation*

$$(36)\qquad a(S) x = x_0$$

ait une solution est la suivante:

$$(37)\qquad (S-t_i I)^{a_i-\nu_i} P_i x_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Démonstration. D'après le théorème 2 l'équation (37) est équivalente au système d'équations indépendantes:

$$a(S) P_i x = P_i x_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous pouvons, comme précédemment, résoudre chaque équation dans l'espace X_i correspondant en substituant $x_i = P_i x$ et $x_{0i} = P_i x_0$ et en appliquant le théorème 4. Il en résulte la conclusion du théorème proposé.

THÉORÈME 8. *Supposons satisfaites les conditions* (34) *et* (37). *Alors l'équation* (36) *admet la solution* x *si et seulement si* x *satisfait aux conditions*:

$$(38)\qquad (S-t_i I)^{\nu_i+m} P_i x = \left[\frac{\nu_i!}{a^{(\nu_i)}(t_i)}\right]^{a_i-\nu_i} \sum_{k=0}^{a_i-1-\nu_i} (-1)^{m+k} d_{mk}^{\nu_i}(t_i) (S-t_i I)^k P_i x_0$$

$$(m = 0, 1, \ldots, a_i-1-\nu_i;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

les sous-déterminants $d_{mk}^{\nu_i}(t_i)$ *étant déterminés dans le théorème* 5.

La démonstration résulte du théorème 5 de même que le théorème 7 résulte du théorème 4.

COROLLAIRE 1. *Si* $\nu_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *l'équation* (36) *admet la solution*

$$x = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[a(t_i)]^{a_i}} \sum_{k=0}^{a_i-1} (-1)^k d_{0k}^{0}(t_i) (S-t_i I)^k P_i\right] x_0$$

pour tout $x_0 \in X$.

Démonstration. En mettant dans les conditions (38) $m = 0$, nous obtenons d'après notre hypothèse:

$$(39)\qquad P_i x = \left[\frac{1}{[a(t_i)]^{a_i}} \sum_{k=0}^{a_i-1} (-1)^k d_{0k}^{0}(t_i) (S-t_i I)^k P_i\right] x_0$$

en outre la condition (37) est satisfaite pour tout $x_0 \in X$. En appliquant le théorème 2 aux formules (39) nous obtenons la formule proposée.

Il en résulte immédiatement, en remarquant que $a(t_i) \neq 0$, si $\nu_i = 0$, le

COROLLAIRE 2. *Si* $a(t_i) \neq 0$, *l'opération inverse de l'opération* $a(S)$ *existe et*

$$[a(S)]^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[a(t_i)]^{a_i}} \Big[\sum_{k=0}^{a_i-1} (-1)^k d^0_{0k}(t_i)(S-t_iI)^k\Big] P_i. \tag{40}$$

COROLLAIRE 3. *Si* $t_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *l'opération inverse de l'opération* S *existe et*

$$S^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} e_i^{(m)}(-1) t_i^{-m-1} S^m\Big] P_i, \tag{41}$$

où on a désigné

$$e_i(t) = \sum_{k=0}^{a_i-1} t^k. \tag{42}$$

Démonstration. Nous avons $a(t) = t$, donc $a(t_i) = t_i \neq 0$, $a^{(1)}(t_i) = 1$, $a^{(k)}t_i = 0$ $(k = 2, 3, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Par conséquent

$$d_0(t_i) = t_i^{a_i} \quad \text{et} \quad d^0_{0k}(t_i) = t_i^{a_i-1-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, a_i-1;\ \ i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après le corollaire précédent nous obtenons

$$S^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \Big[t^{-a_i} \sum_{k=0}^{a_i-1} (-1)^k t_i^{a_i-1-k} (S-t_iI)^k\Big] P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{k=0}^{a_i-1} (-1)^k t_i^{-1-k} \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} t_i^{k-m} S^m\Big] P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{m=0}^{a_i-1} \sum_{k=m}^{a_i-1} (-1)^{k+m} t_i^{-m-1} \binom{k}{m} S^m\Big] P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{m=0}^{a_i-1} \Big(\sum_{k=m}^{a_i-1} (-1)^{k+m} \binom{k}{m}\Big) t_i^{-m-1} S^m\Big] P_i.$$

Remarquons ensuite que

$$e_i^{(m)}(-1) = \Big[m! \sum_{k=m}^{a_i-1} \binom{k}{m} t^{k-m}\Big]_{t=-1} = m! \sum_{k=m}^{a_i-1} \binom{k}{m} (-1)^{k-m} = m! \sum_{k=m}^{a_i-1} \binom{k}{m} (-1)^{k+m}$$

d'où résulte la formule (41).

Considérons encore quelques cas particuliers. Si les racines caractéristiques de l'opération S sont simples, c'est-à-dire si $a_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et sous l'hypothèse $a(t_i) \neq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ nous obtenons

$$[a(S)]^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a(t_i)} P_i \quad \text{et} \quad S^{-1} = \sum_{i=1}^{n} t_i^{-1} P_i$$

sous l'hypothèse que $t_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En effet, dans le dernier cas, le déterminant $d_0(t_i)$ se compose d'un élément unique $a(t_i)$, donc le sous-déterminant $d^0_{00}(t_i) = 1$, en outre $e_i(t) = t^0 = 1$.

En supposant que $P(t) = 1 - t^2 = (1-t)(1+t)$ nous obtenons évidemment

$$[a(S)]^{-1} = [a_0I + a_1S]^{-1} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{a_0 + a_1}(I+S) + \frac{1}{a_0 - a_1}(I-S)\Big]$$

$$= \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}[a_0I - a_1S]$$

si $a_0^2 - a_1^2 \neq 0$ et $S^{-1} = S$.

Remarquons enfin que toutes les considérations des paragraphes précédents restent évidemment en vigueur, si X est l'espace linéaire sur un corps de caractéristique zéro et si les coefficients du polynôme $a(S)$ sont des opérations additives, homogènes, transformant l'espace X en lui-même, commutatives avec l'opération S et entre elles. Dans ce cas il faut supposer que les opérations $a^{(k)}(t_i)$ (coïncidant avec les nombres $a^{(k)}(t_i)$) admettent les opérations inverses $[a^{(k)}(t_i)]^{-1}$.

VII. Notions auxiliaires

Nous énoncerons maintenant les définitions et les propriétés des opérations régulières, des opérations de Fredholm et la définition bien connue du commutateur.

Soit un espace linéaire X (sur le corps des nombres complexes). Par $\mathscr{X}$ désignons l'anneau de toutes les opérations additives et homogènes qui transforment l'espace X en lui-même. On appelle *idéal* des opérations un ensemble $\mathscr{J} \subset \mathscr{X}$ qui vérifie les conditions suivantes: si T, $T' \in \mathscr{J}$, $A \in \mathscr{X}$, alors

a) $aT + bT' \in \mathscr{J}$ (a et b sont des nombres complexes arbitraires),

b) $AT \in \mathscr{J}$, $TA \in \mathscr{J}$.

Nous considérerons seulement les idéaux *propres*, c'est-à-dire tels que $\mathscr{J} \neq \mathscr{X}$.

L'opération $T \in \mathscr{X}$ est *régulière par rapport à l'idéal* $\mathscr{J}$, si $T \in \mathscr{J}$. Tout court on peut dire „opération régulière”.

Les opérations algébriques (ainsi que leurs polynômes) ne sont pas, en général, régulières.

Il est souvent très utile de résoudre des équations avec une opération non régulière en les ramenant aux équations avec opérations régulières. Dans ce but nous introduisons la notion de régularisateur d'une opération non régulière A. Soit une opération A (additive, homogène et transformant l'espace X en lui-même). On appelle *régularisateur gauche* (resp. *droit*) *de l'opération A par rapport à l'ideal $\mathcal{J}$* une opération $R^g(A)$ (resp. $R^d(A)$), si elle existe, telle que

$$R^g(A)A = I+T_g \quad \text{(resp. } AR^d(A) = I+T_d)$$

où T_g, T_d sont régulières par rapport à idéal $\mathcal{J}$.

Dans le cas où

$$R^g(A) = R^d(A)$$

(si les opérations $R^g(A)$ et $R^d(A)$ existent), nous appellerons l'opération $R^g(A)$ *régularisateur simple* par rapport à idéal $\mathcal{J}$ et nous le désignons par $R(A)$.

On voit que le régularisateur par rapport à l'idéal $\mathcal{J}$ n'est jamais régulier par rapport au même idéal. Bien plus, le régularisateur n'est jamais régulier par rapport à un autre idéal. Nous considérons les idéaux propres, donc l'identité n'est pas régulière et la somme $I+T$, où T est régulière, n'est pas régulière par rapport à ces idéaux.

On appelle *régularisation* une méthode qui sert à déterminer le régularisateur $R(A)$ d'une opération A. On cherche ce régularisateur dans la même classe d'opérations à laquelle appartient l'opération donnée A. En particulier, nous chercherons le régularisatieur d'un polynôme $A(S)$ de l'opération algébrique S sous forme d'un nouveau polynôme de la même opération algébrique.

Soit $x^*(x)$ une fonctionnelle additive et homogène, définie sur l'espace X, qui prend des valeurs complexes. Désignons par X^* l'espace adjoint à l'espace X, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les fonctionnelles $x^*(x)$. On appelle $X_0^* \subset X^*$ *famille totale* de fonctionnelles, si pour tout $x^* \in X_0^*$ la condition $x^*(x)$ implique $x = 0$.

Soit une opération A additive, homogène et transformant l'espace X en lui-même. On appelle l'opération A^* définie sur l'espace X^* *opération adjointe* à l'opération A, si pour tout $x \in X$ elle satisfait à l'égalité suivante:

$$(A^*x^*)x = x^*(Ax)$$

L'ensemble $\mathcal{J}^*$ de toutes les opérations T^* adjointes aux opérations régulières par rapport à l'idéal $\mathcal{J}$ est aussi un idéal. En effet, si $T, T' \in \mathcal{J}$, $A \in \mathfrak{X}$, nous avons $T, T'^* \in \mathcal{J}^*$, $A^* \in X^*$, d'où nous obtenons

$$aT^* + bT'^* = (aT+bT')^* \in \mathcal{J}^*,$$

$$A^*T^* = (TA)^* \in \mathcal{J}^*, \quad T^*A^* = (AT)^* \in \mathcal{J}^*.$$

Donc les opérations adjointes aux opérations $\mathcal{J}$-régulières sont $\mathcal{J}^*$-régulières. Remarquons ensuite que l'opération S^* adjointe à une opération algébrique S est aussi algébrique en vertu de l'égalité

$$0 = [P(S)]^* = \Big[\sum_{m=0}^{N} p_m S^m\Big]^* = \sum_{m=0}^{N} p_m (S^*)^m.$$

Nous donnerons maintenant la définition d'une opération de Fredholm. Soit une opération T additive, homogène et transformant un espace X en lui-même. On appelle *T opération de Fredholm par rapport à une famille totale $X_0^* \subset X^*$*, si l'opération T^* transforme l'ensemble X_0^* en lui-même et toutes les deux vérifient les trois conditions suivants:

(i) Le nombre des solutions linéairement indépendantes de l'équation $(I+T)x = 0$ est fini.

(ii) Les équations $(I+T)x = 0$ et $(I+T)^*y = 0$ $(x \in X, y \in X^*)$ ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes.

(iii) La condition nécéssaire et suffisante pour que l'équation

$$(I+T)x = x_0 \ \text{(resp. } (I+T)^*y = y_0) \qquad (x_0 \in X, y_0 \in X^*)$$

ait une solution est la suivante:

$$y_i(x_0) = 0 \ \text{(resp. } y_0(x_i) = 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

y_i désignant toutes les fonctionnelles linéairement indépendantes qui sont les solutions de l'équation $(I+T)^*y = 0$ (resp. x_i désignent toutes les solutions linéairement indépendantes de l'équation $(I+T)x = 0$).

Par exemple, toute opération complètement continue dans une espace de Banach est une opération de Fredholm par rapport à l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires qui forment une famille totale. De même, toute transformation intégrale avec un noyau à singularité faible est une opération de Fredholm. Nous démontrerons plus tard que toute opération algébrique, ainsi que ses polynômes, ne sont pas des opérations de Fredholm, car le théorème (ii) n'est pas vérifié par ces opérations.

Ensuite, nous définissons le *commutateur* de deux opérations A et B (additives, homogènes et transformant l'espace X en lui-même) de la façon bien connue:

(42) $$[A, B] = AB - BA.$$

Comme on le sait, le commutateur admet les propriétés suivantes:

$$[B, A] = -[A, B], \tag{43}$$

$$[A+B, C] = [A, C]+[B, C], \tag{44}$$

$$[AB, C] = A[B, C]+[A, C]B, \tag{45}$$

$$[A, [B, C]]+[B, [C, A]]+[C, [A, B]] = 0 \tag{46}$$

(C est une opération additive, homogène et transformant l'espace X en lui-même).

Soit donnée une opération

$$A(S) = \sum_{m=0}^{N-1} A_m S^m,$$

où S est une opération algébrique d'ordre N, les coefficients $A_0, \ldots, A_{N-1}$ étant des opérations additives, homogènes et transformant l'espace X en lui-même, c'est-à-dire, $A_0, \ldots, A_{N-1} \in \mathscr{X}$. Considérons les commutateurs $[A_i, S]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Désignons par $\mathscr{J}_c$ un idéal (contenu dans $\mathscr{X}$) qui contient tous les commutateurs $[A_i, S]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$. Nous avons admis que les idéaux considérés sont propres, donc $\mathscr{J}_c \neq \mathscr{X}$, d'où il résulte que les commutateurs $[A_i, S]$ ne peuvent pas être de la forme $a \cdot I$, où a est un nombre complexe.

VIII. Régularisation. Cas d'une racine multiple

Soit un polynôme

$$A(S) = \sum_{m=0}^{N-1} A_m S^m$$

de l'opération algébrique S d'ordre N. Nous pouvons considérer l'opération $A(S)$ sur l'espace X_i ($1 \leqslant i \leqslant n$ étant fixé arbitrairement), comme au § V. D'après la formule (12) l'opération S satisfait dans l'espace X_i à l'identité

$$(S-t_i I)^{a_i} x_i = 0 \qquad (x_i \in X_i),$$

donc on peut traiter ce cas comme celui d'une racine multiple. Il résulte de la formule (17) que

$$A(S)x_i = \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S-t_i I)^m x_i.$$

Conformément aux considérations du paragraphe précedent, nous chercherons le régularisateur de l'opération $A(S)$ sous forme d'un polynôme

$$B(S) = \sum_{m=0}^{a_i-1} B_m S^m. \tag{47}$$

Nous démontrerons d'abord le théorème auxiliaire suivant:

THÉORÈME 9. *Soient les deux opérations*

$$B(S)+T_B, \qquad A(S)+T_A \qquad (T_A, T_B \in \mathscr{J}_c).$$

Leur superposition est aussi de la même forme, c'est-à-dire

$$[B(S)+T_B][A(S)+T_A] = C(S)+T_C, \tag{48}$$

où

$$C(S) = \sum_{m=0}^{a_i-1} C_m S^m, \tag{49}$$

$$C_m = (-1)^m \frac{1}{m!} \sum_{j=m}^{a_i-1} \frac{1}{(j-m)!} t_i^{j-m} \sum_{k=0}^{j} B^{(k)}(t_i) A^{(j-k)}(t_i) \tag{50}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, a_i-1),$$

$$T_C = \sum_{k,m=0}^{a_i-1} \frac{1}{k!m!} B^{(k)}(t_i)[(S-t_i I)^k, A^{(m)}(t_i)](S-t_i I)^m + \tag{51}$$
$$+T_B A(S)+B(S)T_A+T_B T_A \in \mathscr{J}_c.$$

Démonstration. Nous avons

$$[B(S)+T_B][A(S)+T_A] = B(S)A(S)+B(S)T_A+T_B A(S)+T_B T_A,$$

$$B(S)A(S) = \sum_{k=0}^{a_i-1} \frac{1}{k!} B^{(k)}(t_i)(S-t_i I)^k \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} A^{(m)}(t_i)(S-t_i I)^m$$

$$= \sum_{k,m=0}^{a_i-1} \frac{1}{k!m!} B^{(k)}(t_i) A^{(m)}(t_i)(S-t_i I)^{m+k} +$$

$$+ \sum_{k,m=0}^{a_i-1} \frac{1}{k!m!} B^{(k)}(t_i)[(S-t_i I)^k, A^{(m)}(t_i)](S-t_i I)^m.$$

Mais, pour tout $x_i \in X_i$, $(S-t_iI)^{a_i-1}x_i = 0$, donc dans cet espace

$$\sum_{k,m=0}^{a_i-1} \frac{1}{k!m!} B^{(k)}(t_i)A^{(m)}(t_i)(S-t_iI)^{m+k}$$
$$= \sum_{k=0}^{a_i-1}\sum_{m=0}^{a_i-1-k} \frac{1}{k!m!} B^{(k)}(t_i)A^{(m)}(t_i)(S-t_iI)^{k+m}$$
$$= \sum_{j=0}^{a_i-1}\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!(j-k)!} B^{(k)}(t_i)A^{(j-k)}(t_i)(S-t_iI)^{j}$$
$$= \sum_{j=0}^{a_i-1}\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} B^{(k)}(t_i)A^{(j-k)}(t_i)(S-t_iI)^{j}$$
$$= \sum_{m=0}^{a_i-1}\left\{(-1)^m \sum_{j=m}^{a_i-1}\frac{1}{j!}\binom{j}{m}t_i^{j-m}\left[\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}B^{(k)}(t_i)A^{(j-k)}(t_i)\right]\right\}S^m.$$

En admettant les notations (49), (50), (51), nous obtenons la formule proposée pour la superposition $[B(S)+T_B][A(S)+T_A]$.

Enfin, il faut démontrer que $T_C \in \mathscr{I}_c$. Nous admettons que $[A_l, S] \in \mathscr{I}_c$, $T_A \in \mathscr{I}_c, T_B \in \mathscr{I}_c$, donc $T_BA(S)+B(S)T_A+T_BT_A \in \mathscr{I}_c$, en outre $[S-t_iI, A_l] = [S, A_l] \in \mathscr{I}_c$ et, d'après la formule (45),

$$[(S-t_iI)^k, A_l] = (S-t_iI)[(S-t_iI)^{k-1}, A_l]+[S-t_iI, A_l](S-t_iI)^{k-1} \in \mathscr{I}_c,$$

pour k entier quelconque (par induction) et finalement

$$[(S-t_iI)^k, A^{(m)}(t_i)] = m!\sum_{j=m}^{a_i-1}\binom{j}{m}t_i^{j-m}[(S-t_iI)^k, A_j] \in \mathscr{I}_c.$$

Il en résulte que $T_C \in \mathscr{I}_c$.

THÉORÈME 10. *Si l'opération $[A(t_i)]^{-1}$ inverse de l'opération $A(t_i)$ existe alors l'opération $A(S)+T_A$ ($T_A \in \mathscr{I}_c$) admet un régularisateur gauche par rapport à l'idéal $\mathscr{I}_c$ dans l'espace X_i:*

$$R_i^g(A) = \sum_{m=0}^{a_i-1}\left[\sum_{j=m}^{a_i-1}(-1)^m\frac{1}{j!}\binom{j}{m}t_i^{j-m}B^{(j)}(t_i)\right]S^m, \tag{52}$$

où les opérations $B^{(j)}(t_i)$ sont définies par les formules récurrentes suivantes:

$$B^{(0)}(t_i) = [A(t_i)]^{-1},$$
$$B^{(m)}(t_i) = -[A(t_i)]^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}B^{(k)}(t_i)A^{(m-k)}(t_i) \quad \textit{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, a_i-1 \tag{53}$$

en outre

$$R_i^g(A)[A(S)+T_A] = I+T_i^g,$$

où

$$T_i^g = \sum_{k,m}^{a_i-1}\frac{1}{k!m!}B^{(k)}(t_i)[(S-t_iI)^k,\ A^{(m)}(t_i)](S-t_iI)^m+R_i^g(A)T_A \in \mathscr{I}_c.$$

Démonstration. D'après le théorème précédent il suffit de déterminer les opérations coefficients de telle manière que l'on ait: $C_0 = I$, $C_1 = C_2 = \ldots = C_{a_i-1} = 0$. On peut évidemment supposer $T_B = 0$. Nous obtenons $C(t_i) = I$, $C^{(m)}(t_i) = 0$ pour $m = 1, 2, \ldots, a_i-1$. D'après la formule (50) il en résulte le système d'équations (relativement aux opérations $B^{(m)}$) suivant:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B^{(k)}(t_i)A^{(m-k)}(t_i) = \delta_{om}I \quad (m = 0, 1, \ldots, a_i-1),$$

où δ_{km} désigne le symbole de Kronecker. En résolvant l'équation d'indice $m = 0$ nous obtenons la première des formules (53). Si on a défini les opérations $B^{(0)}(t_i), \ldots, B^{(m-1)}(t_i)$, nous obtenons de la m-ième équation la deuxième des formules (53), pour $m = 1, 2, \ldots, a_i-1$. De même que dans la formule (51) nous obtenons la formule proposée pour l'opération $R_i^g(A) = B(S)$.

On peut facilement obtenir un théorème analogue pour le régularisateur droit. Dans ce but il suffit d'échanger les rôles des opérations $A(S)$ et $B(S)$.

THÉORÈME 11. *Les hypothèses du théorème 10 étant admises, si en outre les opérations coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ sont commutatives entre elles, alors l'opération $A(S)+T_A$ admet un régularisateur simple par rapport à l'idéal $\mathscr{I}_c$ et*

$$R_i(A) = [A(t_i)]^{-a_i}\sum_{m=0}^{a_i-1}(-1)^m\frac{1}{m!}D_{mo}^i(t_i)(S-t_iI)^m \tag{54}$$
$$= [A(t_i)]^{-a_i}\sum_{k=0}^{a_i-1}\left[\sum_{m=k}^{a_i-1}(-1)^{k+m}\frac{1}{k!(m-k)!}t_i^{m-k}D_{mo}^i(t_i)\right]S^k,$$

où on a désigné par $D_{mk}^i(t_i)$ le sous-déterminant du déterminant

$$\det[A_{mk}^i(t_i)], \quad \textit{où} \quad A_{mk}^i(t_i) = \begin{cases}\binom{m}{k}A^{(m-k)}(t_i), & \textit{si} \quad m \geqslant k,\\ 0, & \textit{si} \quad m < k\end{cases} \tag{55}$$
$$(m, k = 0, 1, \ldots, a_i-1),$$

obtenu en rayant la $(m+1)^e$ colonne et la $(k+1)^e$ ligne, en outre

$$R_i(A)[A(S)+T_A] = I+T_i', \qquad [A(S)+T_A]R_i(A) = I+T_i'', \tag{56}$$

où

$$T_i' = \sum_{k,m=0}^{a_i-1} \frac{1}{k!\,m!} R_i(A)^{(k)}(t_i)[(S-t_iI)^k, A^{(m)}(t_i)](S-t_iI)^m + R_i(A)T_A \in \mathscr{J}_c,$$

(57)

$$T_i'' = \sum_{k,m=0}^{a_i-1} \frac{1}{k!\,m!} A^{(k)}(t_i)[(S-t_iI)^k, R_i(A)^{(m)}(t_i)](S-t_iI)^m + T_A R_i(A) \in \mathscr{J}_c$$

(comme précédemment $[R_i(A)]^m(t_i)$ désigne l'opération obtenue de l'opération $R_i(A)$ en substituant au lieu de l'opération S le paramètre complexe t et en dérivant cette nouvelle opération m fois au point t_i).

Démonstration. Considérons le système d'équations (54). Les opérations $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ sont commutatives entre elles, donc on peut résoudre ce système à l'aide de déterminants. Les éléments du déterminant $\det A^i_{mk}(t_i)$ (défini par les formules (55)) sur la diagonale principale sont égaux à $A^i_{mm}(t_i) = A(t_i)$ et au-dessus d'elle ils sont égaux à zéro, donc

$$\det A^i_{mk}(t_i) = [A(t_i)]^{a_i},$$

d'où résulte la formule suivante pour la solution du système (53):

$$B^{(m)}(t_i) = [A(t_i)]^{-a_i} \sum_{k=0}^{a_i-1} (-1)^{k+m} D^i_{mk}(t_i)\,\delta_{ok} = [A(t_i)]^{-a_i}(-1)^m D^i_{mo}(t_i)$$

et

$$B(S) = \sum_{m=0}^{a_i-1} \frac{1}{m!} B^{(m)}(t_i)(S-t_iI)^m = [A(t_i)]^{-a_i} \sum_{m=0}^{a_i-1} (-1^m)\frac{1}{m!} D^i_{mo}(t_i)(S-t_iI)^m$$

$$= [A(t_i)]^{-a_i} \sum_{m=0}^{a_i-1} \left[(-1)^m \frac{1}{m!} D^i_{mo}(t_i) \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (-1)^k t_i^{m-k} S^k\right]$$

$$= [A(t_i)]^{-a_i} \sum_{k=0}^{a_i-1} \left[\sum_{m=k}^{a_i-1} \binom{m}{k} (-1)^{m+k} \frac{1}{m!} D^i_{mo}(t_i)\, t_i^{m-k}\right] S^k$$

$$= [A(t_i)]^{-a_i} \sum_{k=0}^{a_i-1} \left[\sum_{m=k}^{a_i-1} \frac{(-1)^{m+k}}{k!\,(m-k)!} D^i_{mo}(t_i)\, t_i^{m-k}\right] S^k.$$

Il en résulte la première partie de la conclusion du théorème proposé. La seconde s'obtient en échangeant les rôles de $A(S)$ et $B(S)$.

IX. Régularisation. Cas général

Nous avons démontré que dans l'espace X_i l'opération $A(S)+T_A$ $(T_A \in \mathscr{J}_c)$ admet un régularisateur (respectivement gauche, droit où simple) par rapport à l'idéal $\mathscr{J}_c$. Nous allons maintenant déterminer le régularisateur (respectivement gauche, droit où simple) pour tout l'espace X.

Théorème 12. *Si les opérations $[A(t_i)]^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ inverses des opérations $A(t_i)$ existent, l'opération $A(S)+T_A$ $(T_A \in \mathscr{J}_c)$ admet un régularisateur gauche (resp. droit) par rapport à l'idéal $\mathscr{J}_c$:*

$$R^g(A) = \sum_{i=1}^{n} R_i^d(A)P_i \qquad \left(R^d(A) = \sum_{i=1}^{n} R_i^d(A)P_i\right) \tag{58}$$

et

$$R^g(A)[A(S)+T_A] = I+T^g, \qquad ([A(S)+T_A]R^d(A) = I+T^d),$$

où

$$T^g = \sum_{i=1}^{n}\left\{T_i^g P_i + \sum_{m=0}^{N-1} [A_m, P_i]S^m + [T_A, P_i]\right\} \in \mathscr{J}_c; \tag{59}$$

$$\left(T^d = \sum_{i=1}^{n} T_i^d P_i \in \mathscr{J}_c\right);$$

les opérations R_i^g, T_i^g sont définies dans le théorème 10, les opérations R_i^d, T_i^d s'obtiennent d'une façon analogue en échangeant dans ce théorème les rôles des opérations $A(S)$ et $B(S)$.

Démonstration. D'après le théorème 10, nous avons

$$\begin{aligned} R_i^g(A)[A(S)+T_A]x_i &= (I+T_i^g)x_i, \\ [A(S)+T_A]R_i^d(A)x_i &= (I+T_i^d)x_i \end{aligned} \qquad (x_i \in X_i;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

où T_i^d, $T_i^g \in \mathscr{J}_i$. Mais $x_i = P_i x$, $x \in X$, d'où, d'après le théorème 2, nous obtenons en ajoutant pour tout $x \in X$:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^g(A)[A(S)+T_A]P_i x = \sum_{i=1}^{n} (I+T_i^g)P_i x,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [A(S)+T_A]R_i^d(A)P_i x = \sum_{i=1}^{n} (I+T_i^d)P_i x.$$

Remarquons qu'on peut écrire

$$R_i^g(A)[A(S)+T_A]P_i = R_i^g(A)P_i[A(S)+T_A] + R_i^g(A)[A(S)+T_A, P_i]$$

et

$$[A(S)+T_A, P_i] = \sum_{m=0}^{N-1} [A_m S^m, P_i]+[T_A, P_i]$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} \{A_m[S^m, P_i]+[A_m, P_i]S^m\}+[T_A, P_i]$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} [A_m, P_i]S^m+[T_A, P_i] \in \mathscr{J}_c.$$

On déduit les égalités suivantes:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^g(A)P_i[A(S)+T_A] = I+T^g, \quad [A(S)+T_A]\sum_{i=1}^{n} R_i^d(A)P_i = I+T^d$$

et la conclusion du théorème proposé.

THÉORÈME 13. *Si les opérations $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ sont commutatives entre elles et si les opérations $[A(t_i)]^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ inverses des opérations $A(t_i)$ existent, alors l'opération $A(S)+T_A$, où $T_A \in \mathscr{J}_c$, admet un régularisateur simple $R(A)$ par rapport à l'idéal $\mathscr{J}_c$:*

$$R(A) = \sum_{i=1}^{n} R_i(A)P_i; \tag{60}$$

les opérations $R_i(A)$ sont définies par les formules (51), *en outre*

$$R(A)[A(S)+T_A] = I+T', \quad [A(S)+T_A]R(A) = I+T'',$$

où

$$(61)\quad \begin{aligned} T' &= \sum_{i=1}^{n}\Big\{T_i'P_i+\sum_{n=0}^{N-1}[A_m, P_i]S^m+[T_A, P_i]\Big\} \in \mathscr{J}_c,\\ T'' &= \sum_{i=1}^{n} T_i''P_i \in \mathscr{J}_c; \end{aligned}$$

T_i', T_i'' sont définies par les formules (59).

La démonstration résulte du théorème 11 de même que celle du théorème 12 résulte du théorème 10.

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème* 13, *si*

$$[A_m, S] = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots, N-1)$$

l'opération inverse de l'opération $A(S)$ existe et

$$[A(S)]^{-1} = R(A).$$

Démonstration. Dans ce cas $\mathscr{J}_c = 0$, il faut admettre $T_A = 0$ et toutes les opérations T_i', T_i'' sont égales a zéro. Donc nous avons, d'après le théorème 13,

$$R(A)A(S) = I, \quad A(S)R(A) = I,$$

d'où résulte la formule proposé.

Remarquons ensuite que pour la détermination d'un régularisateur simple de l'opération $A(S)+T_A$, où S est une opération algébrique avec racines simples, il ne faut plus admettre que les opérations-coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ sont commutatives entre elles. En effet, dans ce cas nous avons seulement la première des formules (53) pour laquelle cette supposition n'est pas nécessaire.

X. Théorèmes généraux sur l'existence et le nombre des solutions des èquations avec opérations algébriques

Nous établirons maintenant trois théorèmes analogues aux conditions (i), (ii), (iii) dans la définition des opérations de Fredholm.

Admettons les hypothèses suivantes sur l'opération $A(S)+T_A$:

1° les opérations $[A(t_i)]^{-1}$ existent $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

2° $\mathscr{J}_c$ est un idéal propre des opérations de Fredholm par rapport à une famille totale $X_0^* \subset X^*$;

3° $T_A \in \mathscr{J}_c$.

(Comme précédemment, nous désignons par $\mathscr{J}_c$ un idéal qui contient tous les commutateurs $[A_m, S]$ $(m = 0, 1, \ldots, N-1)$.)

Alors nous avons:

THÉORÈME 14. *Le nombre k des solutions linéairement indépendantes de l'équation*

$$[A(S)+T_A]x = 0$$

est fini.

Démonstration. L'hypothèse 1° étant admise, il existe d'après le théorème 12 un régularisateur gauche $R^g(A)$ de l'opération $A(S)+T_A$ par rapport à l'idéal $\mathscr{J}_c$ et $R^g(A)[A(S)+T_A] = I+T'$, où T' est une opération de Fredholm d'après les hypothèses 2° et 3°. Donc, du théorème (i) nous déduisons que le nombre k_r des solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$(I+T')x = 0$$

est fini. Mais, comme on le sait, $k_r \geqslant k$, d'où résulte la conclusion du théorème proposé.

THÉORÈME 15. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$[A(S)+T_A]x = x_0 \tag{62}$$

ait une solution est la suivante:

$$y_m(x_0) = 0, \tag{63}$$

où y_m $(m = 1, 2, \ldots, k^*)$ désignent toutes les solutions linéairement indépendantes de l'équation adjointe homogène:

$$[A(S)+T_A]^* y = 0 \quad (y \in X^*). \tag{64}$$

Démonstration. Par régularisation de l'équation (62) nous obtenons l'équation

$$(I+T')x = R(A)x_0. \tag{65}$$

D'après le théorème (iii) elle admet une solution sous la condition nécessaire et suffisante que

$$z[R^g(A)x_0] = 0, \tag{66}$$

où z est une solution arbitraire de l'équation $(I+T')^*z = 0$, adjointe à l'équation (65). Mais on a

$$(I+T')^* = \{R^g(A)[A(S)+T_A]\}^* = [A(S)+T_A]^*[R^g(A)]^*.$$

En posant $y = [R^g(A)]^*z$ nous obtenons, d'après, la condition (66),

$$0 = z[R^g(A)x_0] = [R^g(A)]^*z(x_0) = y(x_0),$$

où y désigne une solution arbitraire de l'équation (64). Il en résulte la conclusion du théorème, si nous désignons par k^* le nombre des solutions linéairement indépendantes de l'équation (64).

THÉORÈME 12. *La différence $\varkappa = k-k^*$ du nombre k des solutions linéairement indépendantes de l'équation*

$$[A(S)+T_A]x = 0 \tag{67}$$

et du nombre k^* des solutions linéairement indépendantes de l'équation adjointe

$$[A(S)+T_A]^*y = 0 \tag{68}$$

ne dépend que de l'opération $A(S)$.

Démonstration. Par régularisation nous obtenons les équations suivantes:

$$R^g(A)[A(S)+T_A]x = 0, \quad [A(S)+T_A]^*[R^g(A)]^*z = 0 \quad (y = [R^g(A)]^*z).$$

Mais $[A(S)+T_A]^*[R^g(A)]^* = \{R^g(A)[A(S)+T_A]\}^* = (I+T')^*$, donc nous obtenons les équations suivantes:

$$(I+T')x = 0, \tag{69}$$

$$(I+T')^*z = 0. \tag{70}$$

En désignant par k' (resp. k'') le nombre des solutions linéairement indépendantes de l'équation (69) (resp. (70)), nous obtenons, d'après le théorème (ii),

$$k' = k''. \tag{71}$$

Mais il est évident que

$$\begin{aligned} k' &= k+a \\ k'' &= k^*+b \end{aligned} \qquad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$$

et d'après l'égalité (69) nous obtenons

$$\varkappa = k-k^* = b-a.$$

Les nombres a et b ne dépendent que du régularisateur $R^g(A)$ qui a été construit au moyen des opérations $S, A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ déterminant l'opération $A(S)$. Il en résulte la conclusion du théorème 12.

On appelle le nombre $\varkappa$ *indice* de l'opération $A(S)$. Les opérations de Fredholm ont évidemment un indice nul. Les polynômes d'opérations algébriques ont, en général, un indice différent de zéro.

Par exemple, une transformation intégrale singulière (voir § 1) admet un indice non nul.

Remarquons que pour les démonstrations des théorèmes 14, 15, 16 l'existence de régularisateur *gauche* est suffisante. L'existence d'un régularisateur droit est nécessaire pour la démonstration des théorèmes analogues aux théorèmes 14, 15 pour l'opération adjointe $[A(S)+T_A]^*$.

Nous avons considéré seulement les opérations $A(S)$ avec la multiplication par l'opération algébrique à droite. On peut aussi considérer les opérations $\cdot A(S)$ avec la multiplication à gauche, mais cela n'est pas nécessaire. En effet, nous avons l'égalité suivante:

$$\cdot A(S) = \sum_{m=0}^{N-1} S^m A_m = \sum_{m=0}^{N-1} \{A_m S^m + [S^m, A_m]\} = A(S)+T,$$

où $T \in \mathscr{J}_c$. Donc $\cdot A(S)+T_A = A(S)+T'_A$, où $T'_A = T+T_A \in \mathscr{J}_c$. De plus, on voit que les indices des opérations $A(S)$ et $\cdot A(S)$ sont égaux.

XI. Exemples d'opérations algébriques

Nous donnerons maintenant différents exemples d'opérations algébriques. Nous nous bornerons à en faire mention, sans étudier plus en détail les opérations algébriques considérées dans les travaux précédents.

1. Toute transformation linéaire S dans un espace vectoriel de dimension k est une opération algébrique.

En effet, elle satisfait à l'identité polynomiale $P(S) = 0$, où $P(t)$ désigne le polynôme caractéristique de la matrice de la transformation S.

2. L'opération additive et homogène S, qui transforme l'espace X de dimension infinie en un espace de dimension finie, est une opération algébrique.

En effet, l'espace SX admet une dimension finie, donc dans cet espace l'opération S satisfait à l'identité $P(S) = 0$. Il en résulte que l'opération S satisfait dans l'espace X à l'identité $SP(S) = 0$, donc elle est algébrique.

3. Soit X l'espace des fonctions $x(t)$ bornées sur l'axe réel. L'opération

$$Sx(t) = x(-t)$$

est une involution. X_1 est l'ensemble de toutes les fonctions paires, X_2 — l'ensemble de toutes les fonctions impaires (voir [14]).

4. Soit X l'espace des matrices carrées de rang n. La transposition d'une matrice est une involution. X_1 est l'espace de toutes les matrices symétriques, X_2 — l'espace de toutes les matrices antisymétriques (voir [14]).

5. Soit X l'espace des fonctions höldériennes (avec un exposant fixé $0 < \mu < 1$) définies sur un arc L de Jordan régulier et fermé. La transformation intégrale singulière

$$Sx(t) = \frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L-L_\varepsilon}\frac{x(s)}{s-t}\,ds \qquad (s, t\in L) \tag{72}$$

(L_ε désignant la partie de l'arc L située à l'intérieur du cercle $|s-t| \leqslant \varepsilon$) est une involution (voir [10]). X_1 est l'espace de toutes les valeurs limites des fonctions holomorphes à l'intérieur du domaine borné par l'arc L, X_2 — l'espace de toutes les valeurs limites des fonctions holomorphes à l'extérieur de ce domaine et bornées à l'infini (voir [14]).

W. Pogorzelski [12] a généralisé cette propriété de la transformation singulière (72) pour une classe de fonctions discontinues sur une ligne fermée de Jordan composée d'arcs réguliers.

L'auteur à démontré [13] que la transformation singulière (72), pour une classe de fonctions définies sur un arc fermé à l'infini, est aussi une involution.

6. Soit X l'espace de toutes les fonctions continues dans l'intervalle $[0, \infty]$ et satisfaisant à l'inégalité

$$\int_0^\infty x(t)t^{k-1}dt < +\infty.$$

La transformation intégrale de Hankel

$$Sx = \int_0^\infty x(t)t^{k-1}V_{(k-1)/2}(st)\,dt,$$

où $V_k(t) = J_k(t)/t^k$ et $J_k(t)$ est une fonction de Bessel de premier genre de rang k, est une involution (voir [1], p. 75, et [14]).

7. Soit $X = L^2(E^k)$. La transformation de Fourier

$$Tx = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\int_{E^k} x(s)\,e^{i(s,t)}ds$$

est une involution d'ordre 4 (voir [1], [15], [16]). Nous avons démontré [16] que les opérations de la forme

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{2k} + M^{2k} \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

où M désigne la multiplication par it, sont commutatives avec la transformation de Fourier.

8. Dans le même espace, les deux transformations

$$T_C = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\int_{E^k} x(s)\cos(s, t)\,ds, \qquad T_S = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\int_{E^k} x(s)\sin(s, t)\,ds$$

satisfont aux équations

$$T_C^3 - T_C = 0, \qquad T_S^3 - T_S = 0.$$

Pour la transformation T_C, X_1 est l'espace de toutes les fonctions impaires, X_2 — l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I-T_C)x$, X_3 — l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{2}(I+T_C)x$, où x sont des fonctions paires. La décomposition analogue pour la transformation T_S s'obtient en échangeant les rôles des fonctions paires et impaires (voir [17]). Remarquons ensuite que les quatres sous-espaces de l'espace X: les espaces X_2 et X_3 déterminés par la transformation T_C et les espaces X_2 et X_3 déterminés par la transformation T_S, sont des composantes de l'espace X déterminés par la transformation de Fourier.

9. De nombreux opérateurs de la mécanique quantique sont des opérations algébriques. Par exemple, les projections de l'opérateur du spin d'un électron sur les axes des coordonnées sont des involutions (voir [5]).

10. Soit X l'espace des fonctions réelles continues sur tout le plan, qui ont la forme suivante:

$$x(t, s) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m(s) t^m.$$

L'opération $S = \partial/\partial t$ satisfait évidemment à l'identité $S^n = 0$.

11. Soit X l'espace des fonctions réelles, définies sur l'axe réel, de la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} W_i(t) e^{b_i t},$$

b_i étant des nombres réels arbitraires, $W_i(t)$ — des polynômes arbitraires de degré $a_i - 1$ respectivement. En admettant $S = d/dt$ il est évident que l'opération S satisfait dans l'espace X à l'identité suivante:

$$\prod_{i=1}^{n} (S - b_i I)^{a_i} = 0.$$

On peut facilement constater que l'espace X_i est l'espace de toutes les fonctions de la forme $W_i(t) e^{b_i t}$, où $W_i(t)$ est un polynôme arbitraire de degré $a_i - 1$.

12. Soit l'équation *polyharmonique*

$$\Delta^n u = 0, \tag{71}$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace, $u(x, y)$ est une fonction définie dans un domaine D. Toutes les solutions réelles (par exemple) de l'équation (71) ont d'après Vécoua [2] la forme suivante:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k r^{2k} + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \int_0^z \frac{(z-t)^k}{k!} \chi_k(t)\, dt, \tag{72}$$

où $z = x + iy$, $r = |z|$, $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sont des constantes réelles arbitraires, $\chi_k(z)$ sont des fonctions arbitraires, holomorphes dans le domaine D.

Désignons par X l'espace de toutes les fonctions de la forme (72). Par les méthodes présentées dans ce travail on peut étudier toute équation de la forme

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \Delta^m u = u_0$$

($u_0 \in X$ étant donné, a_m des coefficients constants). Le problème se ramène à la détermination des constantes c_k et des fonctions $\chi_k(z)$ telles que ces équations soient satisfaites. Ce problème sera étudié plus en détail dans un nouveau travail sur certaines équations partielles d'ordres supérieurs [18].

Travaux cités

[1] S. Bochner and K. Chandrasekharan, *Fourier transforms*, Princeton 1949.

[2] Н. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, Москва - Ленинград 1948, p. 169-173.

[3] A. P. Calderón and A. Zygmund, *Algebras on certain singular operators*, Amer. Jour. of Math. 78, 2 (1956), p. 310-320.

[4] Ю. И. Черский, *Общее сингулярное уравнение и уравнения типа свёртки*, Мат. Сборник 41, 3 (1957), p. 277-296.

[5] P. A. M. Dirac, *The principles of Quantum Mechanics*, IV édition russe, Moscou 1960, p. 55-66.

[6] З. И. Халилов, *Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце*, Мат. сборник 25 (67), 2 (1949), p. 169-188.

[7] В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*, Москва 1954, p. 64-66.

[8] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), p. 575-580.

[9] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, Toronto-New York-London 1953.

[10] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen 1953.

[11] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Москва 1959.

[12] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinues dans la théorie des fonctions analytiques*, Journ. Math. Mech. (1960), p. 583-606.

[13] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur l'intégrale de Cauchy pour un arc fermé à l'infini*, Annales Pol. Math. 8 (1960), p. 155-171.

[14] — *Sur les équations involutives et leurs applications*, Studia Math. 20 (1961), p. 95-117.

[15] — *Sur les involutions d'ordre n*, Bull. de l'Acad. Pol. d. Sci., Cl. III, 8, 11-12 (1960), p. 735-739.

[16] — *Sur les équations involutives d'ordre n*, ibidem, p. 74-76.

[17] — *Sur les opérations satisfaisant à une identité polynomiale*, Studia Math. 22 (1962), p. 43-58.

[18] — *Sur l'unique solution polyharmonique d'équation* $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k u = v$, Atti dell'Accademia Nazionale dei Linzei (sous presse).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 13. 3. 1962