STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1963)

Zur Fredholmschen Theorie in lokalkonvexen Räumen

von

A. PIETSCH (Berlin)

Sind E und $\mathfrak{E}$ zwei (komplexe und separierte) lokalkonvexe Räume (1), so wollen wir sagen, daß die Endomorphismen $T \in \boldsymbol{L}(E)$ und $\mathfrak{T} \in \boldsymbol{L}(\mathfrak{E})$ *verwandt* sind, wenn es Abbildungen $P \in \boldsymbol{L}(E, \mathfrak{E})$ (2) und $\mathfrak{Q} \in \boldsymbol{L}(\mathfrak{E}, E)$ gibt, so daß $T = \mathfrak{Q}P$ und $\mathfrak{T} = P\mathfrak{Q}$ gilt.

Zwischen verwandten Endomorphismen bestehen viele wichtige Beziehungen. Insbesondere kann die Gleichung $x - \lambda Tx = y$ als gelöst angesehen werden, wenn alle Lösungen der Gleichung $\mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{T}\mathfrak{x} = Py$ bekannt sind. Allein dieser Umstand zeigt, daß sich häufig wesentliche Vereinfachungen erzielen lassen, wenn man an Stelle der zu untersuchenden Endomorphismen eines beliebigen lokalkonvexen Raumes verwandte Endomorphismen in einem Banach- oder sogar Hilbertraum betrachtet, die sich leichter behandeln lassen. Im folgenden soll dieses Verfahren zu Untersuchungen über die Fredholmsche Theorie in lokalkonvexen Räumen herangezogen werden.

Während die determinantenfreien Aussagen der Fredholmschen Integralgleichungstheorie [4] schon vor längerer Zeit in den klassischen Arbeiten von Riesz [14] und Schauder [18] für kompakte (=vollstetige) Endomorphismen eines Banachraumes bewiesen wurden, konnte man die eigentliche Fredholmsche Determinantentheorie erst viel später auf Endomorphismen eines Banachraumes übertragen. Von Grothendieck [6] und Ruston [15] wurde eine solche Theorie für nukleare Endomorphismen entwickelt. Wesentlich einfacher ist eine Methode von Leżański [12], der für integrale (= quasinukleare) Endomorphismen Determinantensysteme konstruieren konnte. Im Anschluß daran wurde schließlich von Sikorski [21] eine Determinantentheorie für Hilbert-Schmidt-Endomorphismen aufgebaut, zu der man die ersten Ansätze bereits bei Smithies [23] findet.

(1) Eine Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume findet man in [9].

(2) $\boldsymbol{L}(E, \mathfrak{E})$ ist die Gesamtheit der stetigen linearen Abbildungen von E in $\mathfrak{E}$. Wir setzen $\boldsymbol{L}(E) = \boldsymbol{L}(E, E)$.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, daß sich für zwei verwandte Endomorphismen T und $\mathfrak{T}$ die fundamentalen Aussagen der Fredholmschen Theorie von $\mathfrak{T}$ auf T übertragen. Insbesondere kann man aus jedem Determinantensystem von $\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T}$ ein Determinantensystem von $I-\lambda T$ gewinnen.

Als erste Folgerung aus diesen Untersuchungen erhält man die schon von Leray [11] und Altman [1] bewiesene Tatsache, daß sich die in Banachräumen entwickelte Theorie der kompakten Endomorphismen auf entsprechende Endomorphismen eines beliebigen lokalkonvexen Raumes ausdehnen läßt. Außerdem zeigt sich, daß alle Ergebnisse der Fredholmschen Theorie, die nur für Endomorphismen eines Banachraumes bewiesen wurden, auch für die beschränkten Endomorphismen eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes gelten.

Im Anschluß an Untersuchungen über nukleare und integrale Endomorphismen erhalten wir schließlich die wichtige Aussage, daß jeder halbintegrale Endomorphismus eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes mit einem Hilbert-Schmidt-Endomorphismus eines Funktionenraumes $L^2_\mu(X)$ verwandt ist. Man kann deshalb unter Verwendung der Ergebnisse von Sikorski auch für alle halbintegralen Endomorphismen effektiv Determinantensysteme konstruieren.

Da alle nuklearen und integralen Endomorphismen halbintegral sind, können wir abschließend feststellen, daß man sich bei den bisherigen Verallgemeinerungen der Fredholmschen Determinantentheorie stets nur mit solchen Endomorphismen beschäftigt hat, die sich sehr wenig von den Hilbert-Schmidt-Endomorphismen eines Funktionenraumes $L^2_\mu(X)$ unterscheiden, denn für jeden halbintegralen Endomorphismus T eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes ist die Gleichung

$$x-\lambda Tx = y$$

zu einer Integralgleichung der Form

$$\mathfrak{f}(\xi)-\lambda\int\limits_X \tau(\xi,\eta)\mathfrak{f}(\eta)\,d\mu_\eta = \mathfrak{g}(\xi)$$

mit einem quadratisch integrablen Kern äquivalent.

1. Einfache Beziehungen zwischen verwandten Endomorphismen

In diesem Abschnitt betrachten wir stets zwei verwandte Endomorphismen $T = \mathfrak{Q}P$ und $\mathfrak{T} = P\mathfrak{Q}$ mit $P\in \boldsymbol{L}(E,\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{Q}\in\boldsymbol{L}(\mathfrak{E},E)$. Dann gilt

THEOREM 1. *Für zwei verwandte Endomorphismen T und $\mathfrak{T}$ werden die linearen Mannigfaltigkeiten*

$$N_y[I-\lambda T] = \{x\in E: x-\lambda Tx = y\},\quad N_{Py}[\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T}] = \{\mathfrak{x}\in\mathfrak{E}: \mathfrak{x}-\lambda\mathfrak{T}\mathfrak{x} = Py\}$$

durch die Zuordnung

$$\mathfrak{x} = Px \text{ für } x\in N_y[I-\lambda T],\quad x = \lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{x}+y \text{ für } \mathfrak{x}\in N_{Py}[\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T}]$$

eineindeutig aufeinander abgebildet.

Beweis. Unsere Behauptung folgt unmittelbar aus den Beziehungen

$$(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})Px = Py \text{ und } x = \lambda\mathfrak{Q}Px+y \quad\text{für}\quad x\in N_y[I-\lambda T]$$

sowie

$$(I-\lambda T)(\lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{x}+y) = y \text{ und } \mathfrak{x} = P(\lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{x}+y) \quad\text{für}\quad \mathfrak{x}\in N_{Py}[\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T}].$$

Aus Theorem 1 ergibt sich insbesondere, daß die Gleichung $x-\lambda Tx = y$ als gelöst betrachtet werden kann, wenn man sämtliche Lösungen der Gleichung $\mathfrak{x}-\lambda\mathfrak{T}\mathfrak{x} = Py$ kennt.

SATZ 1. *Für zwei verwandte Endomorphismen T und $\mathfrak{T}$ werden die Nullräume*

$$N[(I-\lambda T)^n] = \{x\in E: (I-\lambda T)^n x = o\},$$

$$N[(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})^n] = \{\mathfrak{x}\in\mathfrak{E}: (\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})^n\mathfrak{x} = o\}$$

für $n = 1, 2, \ldots$ durch die Zuordnung

$$\mathfrak{x} = Px \quad\text{für}\quad x\in N[(I-\lambda T)^n]$$

und

$$x = \lambda\mathfrak{Q}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda\mathfrak{T})^{k-1}\mathfrak{x} \quad\text{für}\quad \mathfrak{x}\in N[(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})^n]$$

eineindeutig aufeinander abgebildet.

Beweis. Unsere Behauptung folgt unmittelbar aus den Beziehungen

$$(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})^n Px = o \text{ und } x = \lambda\mathfrak{Q}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda\mathfrak{T})^{k-1}Px \quad\text{für}\quad x\in N[(I-\lambda T)^n]$$

sowie

$$(I-\lambda T)^n\lambda\mathfrak{Q}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda\mathfrak{T})^{k-1}\mathfrak{x} = o$$

und

$$\mathfrak{x} = \lambda P\mathfrak{Q}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda\mathfrak{T})^{k-1}\mathfrak{x} \quad\text{für}\quad \mathfrak{x}\in N[(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})^n].$$

Als einfache Folgerung aus Satz 1 erhält man

SATZ 2. *Zwei verwandte Endomorphismen T und $\mathfrak{T}$ besitzen die gleichen Eigenwerte.*

Andererseits gilt

SATZ 3. *Zwei verwandte Endomorphismen T und $\mathfrak{T}$ besitzen die gleiche Resolventenmenge.*

Beweis. Wenn die komplexe Zahl λ zur Resolventenmenge von $\mathfrak{T}$ gehört, existiert ein Endomorphismus $\mathfrak{R}(\lambda) \in \boldsymbol{L}(\mathfrak{E})$ mit

$$(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})\mathfrak{R}(\lambda) = \mathfrak{R}(\lambda)(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T}) = \mathfrak{I}.$$

Da dann für $R(\lambda) = I+\lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{R}(\lambda)P \in \boldsymbol{L}(E)$ die Beziehung

$$(I-\lambda T)R(\lambda) = R(\lambda)(I-\lambda T) = I$$

besteht, liegt λ auch in der Resolventenmenge von T.

Abschließend bemerken wir, daß wegen $T' = P'\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{T}' = \mathfrak{Q}'P'$ auch die Adjungierten verwandt sind. Folglich gelten alle bisher bewiesenen Aussagen auch für die Endomorphismen T' und $\mathfrak{T}'$. Dabei kann man auf dem topologischen Dual E' von E eine der üblichen lokalkonvexen Topologien verwenden.

2. Die determinantenfreie Theorie

Ein Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ wird als *R-Endomorphismus* bezeichnet, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

1) Zu jeder komplexen Zahl λ gibt es einen Endomorphismus $R(\lambda) \in \boldsymbol{L}(E)$ mit

$$(I-\lambda T)R(\lambda)(I-\lambda T) = (I-\lambda T)$$

(vgl. [13] und [19]).

2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} N[(I-\lambda T)^n]$ bzw. $\bigcup_{n=1}^{\infty} N[(I'-\lambda T')^n]$ ist stets ein endlichdimensionaler Unterraum von E bzw. E'.

3) Die Eigenwerte von T besitzen keinen endlichen Häufungspunkt.

Wie man leicht erkennt, sind die R-Endomorphismen gerade so definiert, daß für sie alle wesentlichen Aussagen der determinantenfreien Rieszschen Theorie der kompakten Endomorphismen gelten.

Es ergibt sich

THEOREM 2. *Jeder mit einem R-Endomorphismus verwandte Endomorphismus ist selbst ein R-Endomorphismus.*

Beweis. Wir betrachten zwei verwandte Endomorphismen $T = \mathfrak{Q}P$ und $\mathfrak{T} = P\mathfrak{Q}$ mit $P \in \boldsymbol{L}(E, \mathfrak{E})$ und $\mathfrak{Q} \in \boldsymbol{L}(\mathfrak{E}, E)$ und nehmen an, daß $\mathfrak{T}$ ein R-Endomorphismus ist. Wenn dann $\mathfrak{R}(\lambda)$ ein Endomorphismus von $\mathfrak{E}$ mit

$$(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})\mathfrak{R}(\lambda)(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T}) = (\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})$$

ist, erhält man für $R(\lambda) = I+\lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{R}(\lambda)P \in \boldsymbol{L}(E)$ die Beziehung

$$(I-\lambda T)R(\lambda)(I-\lambda T) = (I-\lambda T).$$

Weil P wegen Satz 1 den Unterraum $\bigcup_{n=1}^{\infty} N[(I-\lambda T)^n]$ eineindeutig auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} N[(\mathfrak{I}-\lambda\mathfrak{T})^n]$ abbildet, muß $\bigcup_{n=1}^{\infty} N[(I-\lambda T)^n]$ endlichdimensional sein. Das gleiche ergibt sich nach der am Ende des vorigen Abschnitts gemachten Bemerkung auch für $\bigcup_{n=1}^{\infty} N[(I'-\lambda T')^n]$.

Schließlich folgt aus Satz 2, daß sich die Eigenwerte von T nicht im Endlichen häufen können.

3. Die Determinantentheorie

Im weiteren ist $\boldsymbol{A}_n(E)$ der lineare Raum aller Multilinearformen

$$A_n\begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u_1, \ldots, u_n \in E' \text{ und } x_1, \ldots, x_n \in E,$$

die folgende Eigenschaften besitzen:

1) Zu $u_1, \ldots, u_{n-1} \in E'$ und $x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$ gibt es einen Endomorphismus $S_{n-1} \in \boldsymbol{L}(E)$ mit

$$\langle u, S_{n-1}x\rangle = A_n\begin{pmatrix} u, u_1, \ldots, u_{n-1} \\ x, x_1, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad u \in E' \text{ und } x \in E.$$

2) Für $n \geqslant 2$ ist A_n in den Variablengruppen $u_1, \ldots, u_n$ und $x_1, \ldots, x_n$ schiefsymmetrisch.

Insbesondere ist $\boldsymbol{A}_0(E)$ die Menge der komplexen Zahlen.

Für zwei Multilinearformen $B_r \in \boldsymbol{A}_r(E)$ und $C_s \in \boldsymbol{A}_s(E)$ setzt man

$$B_r \wedge C_s\begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_{r+s} \\ x_1, \ldots, x_{r+s} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta \in (r,s)} \operatorname{sgn}\alpha \operatorname{sgn}\beta\, B_r\begin{pmatrix} u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_r} \\ x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_r} \end{pmatrix} C_s\begin{pmatrix} u_{\alpha_{r+1}}, \ldots, u_{\alpha_{r+s}} \\ x_{\beta_{r+1}}, \ldots, x_{\beta_{r+s}} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist (r, s) die Gesamtheit aller Permutationen $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}\}$ der natürlichen Zahlen $\{1, \ldots, r+s\}$ mit

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \quad \text{und} \quad \alpha_{r+1} < \alpha_{r+2} < \ldots < \alpha_{r+s}.$$

Es gilt $B_r \wedge C_s \in \boldsymbol{A}_{r+s}(E)$.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_n\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \langle u_1, x_1\rangle & \dots & \langle u_1, x_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle u_n, x_1\rangle & \dots & \langle u_n, x_n\rangle \end{vmatrix} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \dots$$

Ist T ein beliebiger Endomorphismus von E, so gehören die Multilinearformen

$$T_n^i\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \sum_{\nu\in[i,n]} \Delta_n\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ T^{\nu_1}x_1, \dots, T^{\nu_n}x_n \end{pmatrix}$$

für $i = 0, 1, \dots$ und $n = 1, 2, \dots$ zu $\boldsymbol{A}_n(E)$. Dabei ist $[i, n]$ die Gesamtheit aller n-tupel $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ von nicht negativen ganzen Zahlen mit $\nu_1 + \dots + \nu_n = i$. Für $n = 0$ setzt man $T_0^0 = 1$ und $T_0^i = 0$ falls $i > 0$.

Ein Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ wird als *F-Endomorphismus* bezeichnet, wenn es eine ganze Funktion

$$D_0(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} D_0^m \lambda^m$$

gibt, so daß folgende Aussagen gelten:

1) Mit $D_n^m = \sum_{i=0}^{m} T_n^i D_0^{m-i}$ sind die Potenzreihen

$$D_n\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}\lambda\Bigg) = \sum_{m=0}^{\infty} D_n^m \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \lambda^m$$

für $u_1, \dots, u_n \in E'$ und $x_1, \dots, x_n \in E$ sowie alle komplexen Zahlen λ konvergent.

2) Die Multilinearformen $D_n(\lambda)$ gehören zu $\boldsymbol{A}_n(E)$.

3) Zu jeder komplexen Zahl λ gibt es eine nicht negative ganze Zahl p mit $D_p(\lambda) \neq 0$.

Es zeigt sich, daß die Multilinearformen $D_n(\lambda)$ mit $n = 0, 1, \dots$ ein Determinantensystem des Endomorphismus $I - \lambda T$ im Sinne von Sikorski [19] bilden. Folglich gelten die bekannten Auflösungsformeln für die Gleichungen $x - \lambda Tx = y$ und $u - \lambda T'u = v$.

Setzt man

$$\overline{T}_n^i\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = T_n^i\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ Tx_1, \dots, Tx_n \end{pmatrix},$$

so ergibt sich

Satz 4. *Ein Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ ist dann und nur dann ein F-Endomorphismus, wenn es eine ganze Funktion*

$$\overline{D}_0(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{D}_0^m \lambda^m$$

gibt, so daß folgende Aussagen gelten:

1) *Mit $\overline{D}_n^m = \sum_{i=0}^{m} \overline{T}_n^i \overline{D}_0^{m-i}$ sind die Potenzreihen*

$$\overline{D}_n\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}\lambda\Bigg) = \lambda^n \sum_{m=0}^{\infty} \overline{D}_n^m \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \lambda^m$$

für $u_1, \dots, u_n \in E'$ und $x_1, \dots, x_n \in E$ sowie alle komplexen Zahlen λ konvergent.

2) *Die Multilinearformen $\overline{D}_n(\lambda)$ gehören zu $\boldsymbol{A}_n(E)$.*

3) *Zu jeder komplexen Zahl λ gibt es eine nicht negative ganze Zahl p mit $\overline{D}_p(\lambda) \neq 0$.*

Beweis. Nach Definition hat man

$$T_n^i\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \sum_{\nu\in[i,n]} \Delta_n\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ T^{\nu_1}x_1, \dots, T^{\nu_n}x_n \end{pmatrix}.$$

Wir zerlegen nun $[i, n]$ in die disjunkten Teilmengen $\beta[i, n]$ mit $\beta \in (r, n-r)$ und $r = 0, \dots, n$, die aus allen n-tupeln $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ mit $\nu_{\beta_1}, \dots, \nu_{\beta_r} > 0$ und $\nu_{\beta_{r+1}} = \dots = \nu_{\beta_n} = 0$ bestehen. Dann erhält man die Beziehung

$$T_n^i\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\beta\in(r,n-r)} \sum_{\nu\in\beta[i,n]} \Delta_n\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ T^{\nu_1}x_1, \dots, T^{\nu_n}x_n \end{pmatrix}.$$

Wenn die rechts auftretenden Determinanten nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz zerlegt werden, ergibt sich

$$T_n^i\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha,\beta\in(r,n-r)} \operatorname{sgn}\alpha \operatorname{sgn}\beta \sum_{\nu\in\beta[i,n]} \Delta_r\begin{pmatrix} u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r} \\ T^{\nu_{\beta_1}}x_{\beta_1}, \dots, T^{\nu_{\beta_r}}x_{\beta_r} \end{pmatrix} \Delta_{n-r}\begin{pmatrix} u_{\alpha_{r+1}}, \dots, u_{\alpha_n} \\ x_{\beta_{r+1}}, \dots, x_{\beta_n} \end{pmatrix}.$$

Folglich erhält man wegen

$$\overline{T}_r^{i-r}\begin{pmatrix} u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r} \\ x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_r} \end{pmatrix} = \sum_{\nu\in\beta[i,n]} \Delta_r\begin{pmatrix} u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r} \\ T^{\nu_{\beta_1}}x_{\beta_1}, \dots, T^{\nu_{\beta_r}}x_{\beta_r} \end{pmatrix}$$

die Identität

$$T_n^i\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}=\sum_{r=0}^{n}\overline{T}_r^{i-r}\wedge\Delta_{n-r}\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dabei gilt $\overline{T}_r^{i-r}=0$ für $r>i$.

Wenn zu dem Endomorphismus T eine ganze Funktion

$$\overline{D}_0(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{D}_0^m\lambda^m$$

mit den angegebenen Eigenschaften existiert, so setzen wir

$$D_0^m=\overline{D}_0^m\quad\text{für}\quad m=0,1,\dots$$

Dann besteht wegen (1) die Beziehung

$$D_n^m\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}=\sum_{r=0}^{n}\overline{D}_r^{m-r}\wedge\Delta_{n-r}\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $\overline{D}_r^{m-r}=0$ für $r>m$, und es ergibt sich mit $p>n$

$$\sum_{m=0}^{p}D_n^m\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}\lambda^m=\sum_{r=0}^{n}\lambda^r\sum_{l=0}^{p-r}\overline{D}_r^l\lambda^l\wedge\Delta_{n-r}\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Folglich ist die Potenzreihe

$$D_n\left(\begin{matrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)=\sum_{m=0}^{\infty}D_n^m\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}\lambda^m$$

für $u_1,\dots,u_n\in E'$ und $x_1,\dots,x_n\in E$ sowie alle komplexen Zahlen λ konvergent, und es gilt die Identität (vgl. [20], Theorem 1)

$$D_n\left(\begin{matrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)=\sum_{r=0}^{n}\overline{D}_r(\lambda)\wedge\Delta_{n-r}\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Deshalb gehören die Multilinearformen $D_n(\lambda)$ zu $\boldsymbol{A}_n(E)$.

Schließlich folgt aus (4) und der Beziehung

$$\overline{D}_n\left(\begin{matrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)=\lambda^nD_n\left(\begin{matrix}u_1,\dots,u_n\\Tx_1,\dots,Tx_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right), \tag{5}$$

daß für eine feste komplexe Zahl λ die Aussagen

$$D_n(\lambda)=0\quad\text{für}\quad n<p\ \text{und}\ D_p(\lambda)\neq 0 \tag{6}$$

und

$$\overline{D}_n(\lambda)=0\quad\text{für}\quad n<p\ \text{und}\ \overline{D}_p(\lambda)\neq 0 \tag{7}$$

äquivalent sind. Folglich ist T ein F-Endomorphismus.

Hat man andererseits einen F-Endomorphismus T, und besitzt die ganze Funktion

$$D_0(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}D_0^m\lambda^m$$

die geforderten Eigenschaften, so setzen wir

$$\overline{D}_0^m=D_0^m\quad\text{für}\quad m=0,1,\dots$$

Dann gilt

$$\overline{D}_n^m\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}=D_n^m\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\Tx_1,\dots,Tx_n\end{pmatrix},$$

und es ergibt sich, daß die Potenzreihe

$$\overline{D}_n\left(\begin{matrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)=\lambda^n\sum_{m=0}^{\infty}\overline{D}_n^m\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}\lambda^m$$

für $u_1,\dots,u_n\in E'$ und $x_1,\dots,x_n\in \overline{E}$ sowie alle komplexen Zahlen λ konvergent ist. Wegen

$$\overline{D}_n\left(\begin{matrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)=\lambda^nD_n\left(\begin{matrix}u_1,\dots,u_n\\Tx_1,\dots,Tx_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)$$

hat man $\overline{D}_n(\lambda)\in\boldsymbol{A}_n(E)$. Abschließend folgt aus der Äquivalenz der Aussagen (6) und (7), daß die ganze Funktion $\overline{D}_0(\lambda)$ alle geforderten Bedingungen erfüllt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir

THEOREM 3. *Jeder mit einem F-Endomorphismus verwandte Endomorphismus ist selbst ein F-Endomorphismus.*

Beweis. Wir betrachten zwei verwandte Endomorphismen $T=\mathfrak{Q}P$ und $\mathfrak{T}=P\mathfrak{Q}$ mit $P\in\boldsymbol{L}(E,\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{Q}\in\boldsymbol{L}(\mathfrak{E},E)$ und nehmen an, daß $\mathfrak{T}$ ein F-Endomorphismus ist. Dann existiert eine ganze Funktion

$$\mathfrak{D}_0(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathfrak{D}_0^m\lambda^m$$

mit den in der Definition der F-Endomorphismen angegebenen Eigenschaften. Wenn wir nun

$$\overline{D}_0^m=\mathfrak{D}_0^m\quad\text{für}\quad m=0,1,\dots$$

setzen, ergibt sich wegen (3)

$$\overline{T}_n^i\begin{pmatrix}u_1,\dots,u_n\\x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}=\mathfrak{T}_n^i\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}'u_1,\dots,\mathfrak{Q}'u_n\\Px_1,\dots,Px_n\end{pmatrix}$$

(3) Es gilt $\langle\mathfrak{Q}'u,\mathfrak{T}^rPx\rangle=\langle u,T^rTx\rangle$.

die Beziehung

$$\bar{D}_n^m\begin{pmatrix}u_1, \dots, u_n\\ x_1, \dots, x_n\end{pmatrix} = \mathfrak{D}_n^m\begin{pmatrix}\Omega' u_1, \dots, \Omega' u_n\\ P x_1, \dots, P x_n\end{pmatrix}.$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe

$$\bar{D}_n\left(\begin{matrix}u_1, \dots, u_n\\ x_1, \dots, x_n\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \lambda^n \sum_{m=0}^{\infty} \bar{D}_n^m\begin{pmatrix}u_1, \dots, u_n\\ x_1, \dots, x_n\end{pmatrix}\lambda^m$$

für $u_1, \dots, u_n \in E'$ und $x_1, \dots, x_n \in E$ sowie alle komplexen Zahlen λ. Aus der Beziehung

$$\text{(1)} \qquad \bar{D}_n\left(\begin{matrix}u_1, \dots, u_n\\ x_1, \dots, x_n\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \lambda^n \mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix}\Omega' u_1, \dots, \Omega' u_n\\ P x_1, \dots, P x_n\end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

folgt, daß die Multilinearformen $\bar{D}_n(\lambda)$ zu $\boldsymbol{A}_n(E)$ gehören.

Schließlich sind wegen (1),

$$\text{(2)} \qquad D_n\left(\begin{matrix}u_1, \dots, u_n\\ x_1, \dots, x_n\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \sum_{r=0}^{n} \bar{D}_r(\lambda) \wedge \Delta_{n-r}\begin{pmatrix}u_1, \dots, u_n\\ x_1, \dots, x_n\end{pmatrix},$$

$$\text{(3)} \qquad \bar{\mathfrak{D}}_n\left(\begin{matrix}\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n\\ \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \lambda^n D_n\left(\begin{matrix}P' \mathfrak{u}_1, \dots, P' \mathfrak{u}_n\\ \Omega \mathfrak{x}_1, \dots, \Omega \mathfrak{x}_n\end{matrix}\middle|\lambda\right),$$

und

$$\text{(4)} \qquad \mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix}\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n\\ \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \sum_{r=0}^{n} \bar{\mathfrak{D}}_r(\lambda) \wedge \Delta_{n-r}\begin{pmatrix}\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n\\ \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n\end{pmatrix}$$

die Aussagen

$$\mathfrak{D}_n(\lambda) = 0 \quad \text{für} \quad n < p \text{ und } \mathfrak{D}_p(\lambda) \neq 0$$

und

$$\bar{D}_n(\lambda) = 0 \quad \text{für} \quad n < p \text{ und } \bar{D}_p(\lambda) \neq 0$$

äquivalent. Nun ergibt sich aus Satz 4, daß T ein F-Endomorphismus ist.

4. Kompakte Endomorphismen

Ein Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ heißt *kompakt* (*=vollstetig*), wenn es eine Nullumgebung U gibt, die durch T in eine kompakte Teilmenge von E abgebildet wird.

SATZ 5. *Jeder kompakte Endomorphismus eines lokalkonvexen Raumes ist mit einem kompakten Endomorphismus eines Banachraumes verwandt.*

Beweis. Ist T ein kompakter Endomorphismus von E, so bestimmen wir eine absolutkonvexe Nullumgebung U, die durch T in eine kompakte Teilmenge K von E abgebildet wird. Dann ist $B = \overline{T(U)} \subset K$ eine absolutkonvexe und kompakte Teilmenge von E. Nun betrachten wir den Banachraum

$$E_B = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB \text{ mit der Norm } \|x\| = \inf\{\varrho > 0 : x \in \varrho B\}.$$

Dann wird durch T eine Abbildung $P \in \boldsymbol{L}(E, E_B)$ mit $Px = Tx$ induziert, und die identische Abbildung Ω von E_B in E ist kompakt. Folglich ist $T = \Omega P$ mit dem kompakten Endomorphismus $\mathfrak{T} = P\Omega$ des Banachraumes E_B verwandt.

Auf Grund von Theorem 2 und Satz 5 lassen sich die klassischen Ergebnisse von Riesz und Schauder auf kompakte Endomorphismen eines lokalkonvexen Raumes übertragen (vgl. [1]). Es gilt

THEOREM 4. *Jeder kompakte Endomorphismus eines lokalkonvexen Raumes ist ein R-Endomorphismus.*

5. Beschränkte Endomorphismen

Ein Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Nullumgebung U gibt, die durch T in eine beschränkte Teilmenge von E abgebildet wird.

SATZ 6. *Jeder beschränkte Endomorphismus eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes ist mit einem (beschränkten) Endomorphismus eines Banachraumes verwandt.*

Beweis. Ist T ein beschränkter Endomorphismus von E, so bestimmen wir eine Nullumgebung U mit $T(U) \subset B$. Dabei soll B eine absolutkonvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E sein. Nun betrachten wir den Banachraum

$$E_B = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB \text{ mit der Norm } \|x\| = \inf\{\varrho > 0 : x \in \varrho B\}.$$

Dann wird durch T eine Abbildung $P \in \boldsymbol{L}(E, E_B)$ mit $Px = Tx$ induziert, und die identische Abbildung Ω von E_B in E ist stetig (= beschränkt). Folglich ist $T = \Omega P$ mit dem Endomorphismus $\mathfrak{T} = P\Omega$ des Banachraumes E_B verwandt.

Da Ruston zeigen konnte (4), daß in Banachräumen die R-Endomorphismen mit den F-Endomorphismen zusammenfallen, erhält man aus Theorem 2 und Theorem 3 in Verbindung mit Satz 6 unmittelbar

(4) Diese Untersuchungen sind unter Verwendung der Theorie der topologischen Tensorprodukte durchgeführt; sie lassen sich jedoch mühelos in die wesentlich einfachere Sprache der Multilinearformen übersetzen.

Theorem 5. *In einem folgenvollständigen lokalkonvexen Raum fallen die beschränkten R-Endomorphismen mit den beschränkten F-Endomorphismen zusammen.*

Durch Verallgemeinerung der Rustonschen Methoden kann man zeigen, daß in einem beliebigen lokalkonvexen Raum jeder F-Endomorphismus ein R-Endomorphismus ist ([5]), während die Umkehrung dieser Aussage ohne zusätzliche Voraussetzungen wahrscheinlich nicht richtig zu sein braucht. Außerdem läßt sich beweisen, daß für jeden F-Endomorphismus T die Vielfachheit der Nullstellen von $D_0(\lambda)$ mit der Dimension der linearen Räume $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N[(I-\lambda T)^n]$ übereinstimmt. Schließlich erwähnen wir, daß $D_0(\lambda)$ durch jede andere ganze Funktion ersetzt werden darf, die die gleichen Nullstellen besitzt und die sich demnach von $D_0(\lambda)$ nur um einen Faktor der Form $e^{F(\lambda)}$ unterscheidet.

6. Nukleare Endomorphismen

Ein Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ heißt *nuklear*, wenn er sich in der Form

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u_k, x\rangle x_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < +\infty, \quad u_k \in U^0 \ (^6) \quad \text{und} \quad x_k \in B$$

darstellen läßt. Dabei muß U eine Nullumgebung und B eine absolutkonvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E sein, für die $E_B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nB$ mit der Norm $\|x\| = \inf\{\varrho > 0 : x \in \varrho B\}$ ein Banachraum ist.

Es ergibt sich

Satz 7. *Jeder nukleare Endomorphismus eines lokalkonvexen Raumes ist mit einem Endomorphismus $\mathfrak{T}$ eines Folgenraumes l^p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ verwandt, der sich mit einer unendlichen Matrix $\{\tau_{ij}\}$, für die $|\tau_{ij}| \leqslant |\tau_i||\tau_j'|$ mit $\{\tau_i\} \in l^p$ und $\{\tau_j'\} \in l^q$ $(1/p+1/q = 1)$ gilt, in der Form*

$$\mathfrak{T}\{\xi_j\} = \Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau_{ij}\, \xi_j\Big\}$$

darstellen läßt.

Beweis. Wir betrachten einen nuklearen Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ und bringen ihn auf die oben angegebene Form. Wegen $\|x_k\| \leqslant 1$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\lambda_j^{1/q} \xi_j| < +\infty$ konvergiert dann die unendliche Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{1/q} \xi_j x_j$ für alle $\{\xi_j\} \in l^p$ in dem Banachraum E_B und somit auch in E. Folglich kann man

$$Px = \{\lambda_i^{1/p} \langle u_i, x\rangle\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}\{\xi_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{1/q} \xi_j x_j$$

setzen. Dann gilt $T = \mathfrak{Q}P$ und der Endomorphismus $\mathfrak{T} = P\mathfrak{Q} \in \boldsymbol{L}(l^p)$ besitzt die Gestalt

$$\mathfrak{T}\{\xi_j\} = \Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i^{1/p} \lambda_j^{1/q} \langle u_i, x_j\rangle \xi_j\Big\}.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, denn für $\tau_{ij} = \lambda_i^{1/p} \lambda_j^{1/q} \langle u_i, x_j\rangle$ ergibt sich mit $\varrho = \sup\{|\langle u_i, x_j\rangle|\}$ die Abschätzung

$$|\tau_{ij}| \leqslant \varrho\, |\lambda_i|^{1/p} |\lambda_j|^{1/q}.$$

Aus Theorem 1 und Satz 7 folgt, daß für einen nuklearen Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ die Gleichung

$$x - \lambda T x = y \quad \text{mit} \quad x, y \in E$$

zu einem unendlichen Gleichungssystem der Form

$$\xi_i - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{ij}\, \xi_j = \eta_i \quad \text{mit} \quad \{\xi_i\}, \{\eta_j\} \in l^p$$

äquivalent ist.

Setzt man $p = \infty$, so ergibt sich für die unendliche Matrix $\{\tau_{ij}\}$ die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_i |\tau_{ij}| < +\infty.$$

Für solche Matrizen wurde aber bereits um 1900 durch v. Koch [8] eine Determinantentheorie entwickelt. Dabei zeigte sich, daß man genauso wie im Falle von endlichvielen Unbekannten zur Auflösung des Gleichungssystems die Cramersche Regel benutzen kann (vgl. [22], Theorem 28).

7. Integrale Endomorphismen

Im folgenden verwenden wir auf dem bidualen Raum E'' von E die aus den gleichstetigen Teilmengen von E' erzeugte natürliche lokalkonvexe Topologie, so daß E als Unterraum von E'' aufgefaßt werden kann.

Ist X ein kompakter Hausdorffraum mit einem positiven Radonschen Maß μ, so wollen wir für $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ die identische Abbildung von $L_\mu^q(X)$ in $L_\mu^p(X)$ mit $\mathfrak{J}_q^p$ bezeichnen.

([5]) Wegen der Konstruktion der verallgemeinerten Inversen (quasi-inverse) mit $(I-\lambda T)R(\lambda)(I-\lambda T) = (I-\lambda T)$ vgl. [19].

([6]) Es gilt $|\langle u_k, x\rangle| \leqslant 1$ für $x \in U$.

Ein Endomorphismus $T\in \boldsymbol{L}(E)$ heißt *integral*, wenn es einen kompakten Hausdorffraum X mit einem positiven Radonschen Maß μ gibt, so daß sich T auf die folgende Art als Produkt von drei stetigen linearen Abbildungen darstellen läßt:

$$E \xrightarrow{\ A\ } L^\infty_\mu(X) \xrightarrow{\ \mathfrak{J}^1_\infty\ } L^1_\mu(X) \xrightarrow{\ \mathfrak{B}\ } E''.$$

Auf Grund dieser Zerlegung ergibt sich

Satz 8. *Für jeden integralen Endomorphismus T eines lokalkonvexen Raumes ist T'' mit einem Endomorphismus $\mathfrak{T}$ eines Funktionenraumes $L^p_\mu(X)$ $(1\leqslant p\leqslant +\infty)$ verwandt, der sich mit einem meßbaren und beschränkten Kern $\tau(\xi,\eta)$ in der Form*

$$\mathfrak{T}\mathfrak{f}(\xi) = \int_X \tau(\xi,\eta)\mathfrak{f}(\eta)\,d\mu_\eta \quad \text{für} \quad \mathfrak{f}\in L^p_\mu(X)$$

darstellen läßt.

Beweis. Wenn $\mathfrak{K}$ die identische Abbildung von $L^1_\mu(X)$ in $L^1_\mu(X)''$ ist, so gilt wegen $L^\infty_\mu(X) = L^1_\mu(X)'$

$$(\mathfrak{J}^1_\infty)' = \mathfrak{K}\mathfrak{J}^1_\infty \quad\text{und}\quad (\mathfrak{J}^1_\infty)'' = \mathfrak{K}\mathfrak{J}^1_\infty\mathfrak{K}'.$$

Demnach hat man $T'' = \mathfrak{B}''\mathfrak{K}\mathfrak{J}^1_\infty\mathfrak{K}'A''$, und es besteht wegen $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}''\mathfrak{K}$ die Identität $T'' = \mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_\infty\mathfrak{K}'A''$.

Weil $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{K}'A''\mathfrak{B}$ eine stetige lineare Abbildung von $L^1_\mu(X)$ in $L^\infty_\mu(X)$ ist, gibt es eine meßbare und beschränkte Funktion $\tau(\xi,\eta)$ mit

(*) $$\mathfrak{T}_0\mathfrak{f}(\xi) = \int_X \tau(\xi,\eta)\mathfrak{f}(\eta)\,d\mu_\eta \quad\text{für}\quad \mathfrak{f}\in L^1_\mu(X)$$

(vgl. [5], Chap. I, Cor. 4 auf S. 61).

Setzt man $P = \mathfrak{J}^p_\infty\mathfrak{K}'A''$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_p$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{J}^p_\infty\mathfrak{T}_0\mathfrak{J}^1_p$, so gilt $T'' = \mathfrak{Q}P$ und $\mathfrak{T} = P\mathfrak{Q}$. Folglich ist T'' mit dem Endomorphismus $\mathfrak{T}$ verwandt, der sich wegen (*) in der angegebenen Form darstellen läßt.

Als Ergänzung zu Satz 8 formulieren wir

Satz 9. *Jeder integrale Endomorphismus T eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes ist mit T'' verwandt.*

Beweis. Wir betrachten einen integralen Endomorphismus $T\in\boldsymbol{L}(E)$, der auf die angegebenen Art zerlegt worden ist. Weil $\mathfrak{H} = (\mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_2)^{-1}(E)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2_\mu(X)$ ist, gibt es einen stetigen Projektor $\mathfrak{P}_\mathfrak{H}$ von $L^2_\mu(X)$ auf $\mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_2\mathfrak{J}^2_\infty Ax = Tx\in E$ gehört $\mathfrak{J}^2_\infty Ax$ für alle $x\in E$ zu $\mathfrak{H}$. Folglich gilt $\mathfrak{P}_\mathfrak{H}\mathfrak{J}^2_\infty A = \mathfrak{J}^2_\infty A$ und $T = \mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_2\mathfrak{P}_\mathfrak{H}\mathfrak{J}^2_\infty A$. Da $L^2_\mu(X)$ reflexiv ist, hat man $\mathfrak{P}''_\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}''(\mathfrak{J}^1_2)'' = \mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_2$. Also besteht die Identität $T'' = \mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_2\mathfrak{P}_\mathfrak{H}(\mathfrak{J}^2_\infty)''A''$. Da aber nach Konstruktion von $\mathfrak{H}$ die Beziehung $\mathfrak{B}\mathfrak{J}^1_2\mathfrak{P}_\mathfrak{H}[L^2_\mu(X)]\subset E$ gilt, hat man $T''(E'')\subset E$.

Wegen $T''(E'')\subset E$ wird durch T'' eine stetige lineare Abbildung $\mathfrak{Q}$ von E'' in E mit $\mathfrak{Q}x'' = T''x''$ induziert. Wenn man außerdem die identische Abbildung von E in E'' mit P bezeichnet, gilt $T = \mathfrak{Q}P$ und $T'' = P\mathfrak{Q}$. Folglich sind die Endomorphismen T und T'' verwandt.

Aus Theorem 1, Satz 8 und Satz 9 folgt, daß für einen integralen Endomorphismus T eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes E die Gleichung

$$x-\lambda Tx = y \quad\text{mit}\quad x, y\in E$$

zu einer Integralgleichung der Form

$$\mathfrak{f}(\xi)-\lambda\int_X \tau(\xi,\eta)\mathfrak{f}(\eta)\,d\mu_\eta = \mathfrak{g}(\xi) \quad\text{mit}\quad \mathfrak{f},\mathfrak{g}\in L^p_\mu(X)$$

und einem meßbaren, beschränkten Kern $\tau(\xi,\eta)$ äquivalent ist.

8. Halbintegrale Endomorphismen

Ein Endomorphismus T eines Hilbertraumes wird als *Hilbert-Schmidt-Endomorphismus* bezeichnet, wenn für ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $\{\mathfrak{f}_\omega : \omega\in\Omega\}$ die Ungleichung

$$\sum_{\omega\in\Omega}\|\mathfrak{T}\mathfrak{f}_\omega\|^2 < +\infty$$

besteht. Ein bekanntes Kriterium besagt, daß ein Endomorphismus $\mathfrak{T}$ eines Funktionenraumes $L^2_\mu(X)$ dann und nur dann ein Hilbert-Schmidt-Endomorphismus ist, wenn er sich mit einem quadratisch integrablen Kern $\tau(\xi,\eta)$ in der Form

$$\mathfrak{T}\mathfrak{f}(\xi) = \int_X \tau(\xi,\eta)\mathfrak{f}(\eta)\,d\mu_\eta$$

darstellen läßt.

Für unsere weiteren Betrachtungen benötigen wir eine von Grothendieck stammende Aussage, für die wir hier einen einfachen Beweis angeben. Es gilt der folgende

Hilfssatz. *Für jede stetige lineare Abbildung $\mathfrak{T}$ von $L^2_\mu(X)$ in $L^\infty_\mu(X)$ ist $\mathfrak{J}^2_\infty\mathfrak{T}$ ein Hilbert-Schmidt-Endomorphismus von $L^2_\mu(X)$.*

Beweis. Ist $\{\mathfrak{f}_\omega : \omega\in\Omega\}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem von $L^2_\mu(X)$, so setzen wir $\mathfrak{g}_\omega = \mathfrak{T}\mathfrak{f}_\omega$. Dann gibt es zu jeder endlichen Teilmenge $\Phi = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ von Ω wegen

$$\operatorname{vrai\,sup}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i\mathfrak{g}_{\omega_i}(\xi)\Big| : \xi\in X\Big\} \leqslant \|\mathfrak{T}\|\Big\{\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^2\Big\}^{1/2}$$

eine μ-Nullmenge $N(\Phi)$, so daß für die abzählbare Menge alle n-tupel $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ von rationalen komplexen Zahlen die Ungleichung

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathfrak{g}_{\omega_i}(\xi)\Big| \leqslant \|\mathfrak{T}\| \Big\{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\Big\}^{1/2} \quad \text{für} \quad \xi \in X N\backslash(\Phi)$$

besteht. Da sich jede komplexe Zahl durch rationale komplexe Zahlen approximieren läßt, gilt die angegebene Abschätzung sogar für alle n-tupel von komplexen Zahlen. Folglich hat man

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{g}_{\omega_i}(\xi)|^2 \leqslant \|\mathfrak{T}\|^2 \quad \text{für} \quad \xi \in X N\backslash(\Phi),$$

und durch Integration ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} \int_X |\mathfrak{g}_{\omega_i}|^2 d\mu \leqslant \|\mathfrak{T}\|^2 \|\mu\|,$$

Weil Φ eine beliebige endliche Teilmenge von Ω war, erhalten wir abschließend die Ungleichung

$$\sum_{\Omega} \|\mathfrak{J}_\infty^2 \mathfrak{T} \mathfrak{f}_\omega\|^2 \leqslant \|\mathfrak{T}\|^2 \|\mu\| < +\infty.$$

Folglich ist $\mathfrak{J}_\infty^2 \mathfrak{T}$ ein Hilbert-Schmidt-Endomorphismus.

Ein Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$ heißt *halbintegral* (7), wenn es einen kompakten Hausdorffraum X mit einem positiven Radonschen Maß μ gibt, so daß sich T auf eine der beiden folgenden Arten als Produkt von drei stetigen linearen Abbildungen darstellen läßt:

$$\text{(r)} \qquad E \xrightarrow{\ A\ } L_\mu^\infty(X) \xrightarrow{\ \mathfrak{J}_\infty^2\ } L_\mu^2(X) \xrightarrow{\ \mathfrak{B}\ } E'',$$

$$\text{(l)} \qquad E \xrightarrow{\ A\ } L_\mu^2(X) \xrightarrow{\ \mathfrak{J}_2^1\ } L_\mu^1(X) \xrightarrow{\ \mathfrak{B}\ } E''.$$

Man erkennt sofort, daß jeder integrale Endomorphismus auch halbintegral ist.

SATZ 10. *Jeder halbintegrale Endomorphismus eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes ist mit einem Hilbert-Schmidt-Endomorphismus eines Funktionenraumes $L_\mu^2(X)$ verwandt.*

(7) Jeder halbintegrale Endomorphismus ist semi-intégral im Sinne von Grothendieck. Vgl. [5], Chap. I, Lemma 17 und Korollar.

Beweis. Wir betrachten einen halbintegralen Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$, der sich auf die angegebene Art (r) zerlegen läßt. Weil $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}^{-1}(E)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_\mu^2(X)$ ist, gibt es dann einen stetigen Projektor $\mathfrak{P}_{\mathfrak{H}}$ von $L_\mu^2(X)$ auf $\mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{B}\mathfrak{J}_\infty^2 Ax = Tx \in E$ gehört $\mathfrak{J}_\infty^2 Ax$ für alle $x \in E$ zu $\mathfrak{H}$. Folglich gilt $\mathfrak{P}_{\mathfrak{H}} \mathfrak{J}_\infty^2 A = \mathfrak{J}_\infty^2 A$.

Wenn wir $P = \mathfrak{J}_\infty^2 A$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{P}_{\mathfrak{H}}$ setzen, ergibt sich $T = \mathfrak{Q}P$. Demnach ist T mit dem Hilbert-Schmidt-Endomorphismus $\mathfrak{T} = P\mathfrak{Q}$ $= \mathfrak{J}_\infty^2 A \mathfrak{B} \mathfrak{P}_{\mathfrak{H}}$ verwandt.

Wir betrachten nun einen halbintegralen Endomorphismus $T \in \boldsymbol{L}(E)$, der sich auf die angegebene Art (l) zerlegen läßt. Weil $\mathfrak{H} = (\mathfrak{B}\mathfrak{J}_2^1)^{-1}(E)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_\mu^2(X)$ ist, gibt es dann einen stetigen Projektor $\mathfrak{P}_{\mathfrak{H}}$ von $L_\mu^2(X)$ auf $\mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{B}\mathfrak{J}_2^1 Ax = Tx \in E$ gehört Ax für alle $x \in E$ zu $\mathfrak{H}$. Folglich gilt $\mathfrak{P}_{\mathfrak{H}} A = A$.

Wenn wir $P = A$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{J}_2^1 \mathfrak{P}_{\mathfrak{H}}$ setzen, ergibt sich $T = \mathfrak{Q}P$. Demnach ist T mit dem Endomorphismus $\mathfrak{T} = P\mathfrak{Q} = A\mathfrak{B}\mathfrak{J}_2^1\mathfrak{P}_{\mathfrak{H}}$ verwandt. Da aber $\mathfrak{J}_\infty^2 \mathfrak{B}' A' = (A\mathfrak{B}\mathfrak{J}_2^1)'$ nach unserem Hilfssatz ein Hilbert-Schmidt-Endomorphismus ist, gilt das gleiche auch für $A\mathfrak{B}\mathfrak{J}_2^1$ und $\mathfrak{T}$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Aus Theorem 1 und Satz 1 folgt, daß für jeden halbintegralen Endomorphismus T eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes E die Gleichung

$$x - \lambda T x = y \quad \text{mit} \quad x, y \in E$$

zu einer Integralgleichung der Form

$$\mathfrak{f}(\xi) - \lambda \int_X \tau(\xi, \eta) \mathfrak{f}(\eta) d\mu_\eta \quad \text{mit} \quad \mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in L_\mu^2(X)$$

und einem quadratisch integrablen Kern $\tau(\xi, \eta)$ äquivalent ist. Diese Integralgleichungen wurden aber von Hilbert und Schmidt eingehend untersucht, und Carleman konnte auch die Fredholmsche Determinantentheorie, die ursprünglich nur für Integralgleichungen mit stetigen Kernen galt, durch eine geringe Modifikation auf diese Integralgleichungen übertragen. Schließlich wurde von Sikorski eine Determinantentheorie für Hilbert-Schmidt-Endomorphismen eines abstrakten Hilbertraumes entwickelt, die nach den von uns bewiesenen Aussagen automatisch eine Determinantentheorie für alle halbintegralen Endomorphismen liefert. Somit gilt

THEOREM 6. *Jeder halbintegrale Endomorphismus eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes ist ein F-Endomorphismus.*

Schließlich ergibt sich aus der Schurschen Abschätzung

$$\sum_i \frac{1}{|\lambda_i|^2} \leqslant \int_X \int_X |\tau(\xi, \eta)|^2 d\mu_\xi d\mu_\eta,$$

in der die Eigenwerte λ_i entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt werden, eine analoge Aussage für halbintegrale Endomorphismen.

Theorem 7. *Für jeden halbintegralen Endomorphismus eines folgenvollständigen lokalkonvexen Raumes besitzt $D_0(\lambda)$ mit einer ganzen Funktion $F(\lambda)$ die Darstellung*

$$D_0(\lambda) = e^{F(\lambda)} \prod_i \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\lambda/\lambda_i}.$$

Literatur

[1] M. Altman, *On linear functional equations in locally convex linear topological spaces*, Studia Math. 13 (1953), S. 194-207.

[2] — *The Fredholm theory of linear equations in locally convex linear topological spaces*, Bull. Acad. Pol. Sciences, Kl. III, 2 (1954), S. 267-269.

[3] T. Carleman, *Zur Theorie der linearen Integralgleichungen*, Math. Z. 9 (1921), S. 196-217.

[4] I. Fredholm, *Les équations intégrales linéaires*, C. R. du Congr. de Stockholm 1910, S. 92-100.

[5] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoires Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] — *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), S. 319-384.

[7] E. Hellinger und O. Toeplitz, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, Encyklopädie Math. II, Analysis 3, 2 (1923/27), S. 1335-1601.

[8] H. v. Koch, *Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis*, Acta Math. 24 (1900), S. 89-122.

[9] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[10] R. Kultze, *Zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen in nuklearen topologischen Vektorräumen*, J. reine angew. Math. 200 (1958), S. 112-124.

[11] J. Leray, *Valeurs propes et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes*, Acta Sci. Math. 12B (1950), S. 177-186.

[12] T. Leżański, *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 13 (1953), S. 244-276.

[13] A. Pietsch, *Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen*, Math. Nachr. 21 (1960), S. 347-369.

[14] F. Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Math. 41 (1916), S. 71-98.

[15] A. F. Ruston, *Direct products of Banach spaces and linear functional equations*, Proc. London Math. Soc. (3) 1 (1951), S. 327-384.

[16] — *Formulae of Fredholm type for compact linear operators on a general Banach space*, ibidem (3) 3 (1953), S. 368-377.

[17] — *Operators with a Fredholm theory*, J. London Math. Soc. 29 (1954), S. 318-326.

[18] J. Schauder, *Über lineare, vollstetige Funktionaloperatoren*, Studia Math. 2 (1930), S. 183-196.

[19] R. Sikorski, *Determinant systems*, ibidem 18 (1959), S. 161-186.

[20] — *Remarks on Leżański's determinants*, ibidem 20 (1961), S. 145-161.

[21] — *On the Carleman determinants*, ibidem 20 (1961), S. 327-346.

[22] — *The determinant theory in Banach spaces*, Coll. Math. 8 (1961), S. 141-198.

[23] F. Smithies, *The Fredholm theory of integral equations*, Duke Math. J. 8 (1941) S. 107-130.

[24] A. C. Zaanen, *Linear analysis*, Amsterdam 1953.

Reçu par la Rédaction le 3. 2. 1962