sequence A-summable to zero belongs to T^b_φ. In particular, sequences convergent to zero are A-summable to zero; moreover, by (4.9), the sequence $1, 1, \ldots$ is A-summable to 1. Thus A is a permanent method and, moreover, a sequence is A-summable to t if and only if it is φ_b-summable to t.

References

[1] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[2] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва 1958.

[3] B. Kuttner, *Note on strong summability*, J. London Math. Soc. 21 (1946), p. 118-122.

[4] M. Landsberg, *Lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind*, Math. Zeitschr. 65 (1956), p. 104-112.

[5] W. Matuszewska, *Przestrzenie funkcji φ-całkowalnych*, I. *Własności ogólne φ-funkcji i klas funkcji φ-całkowalnych*, Prace Matematyczne 6 (1961), p. 121-139.

[6] — *Przestrzenie funkcji φ-całkowalnych*, II. *Uogólnione przestrzenie Orlicza*, ibidem 6 (1961), p. 149-164.

[7] — and W. Orlicz, *A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions*, Studia Math. 21 (1961), p. 107-115.

[8] J. Musielak, *On some modular spaces connected with strong summability*, Math. Student 27 (1959), p. 129-136.

[9] — and W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), p. 49-65.

[10] W. Orlicz, *A note on modular spaces I*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 9 (1961), p. 157-162.

[11] R. Taberski, *A theorem of Toeplitz type for the class of M-summable sequences*, ibidem 8 (1960), p. 453-458.

[12] K. Zeller, *Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen*, Math. Zeitschr. 59 (1953), p. 271-277.

Reçu par la Rédaction le 27. 2. 1962

STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1962)

Les intégrales de fonctions presque-périodiques et les sections de séries de Fourier

par

S. HARTMAN (Wrocław)

R. Doss a démontré que, f étant une fonction presque-périodique (p. p.) de Bohr et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ sa série de Fourier, si les points $\alpha < \beta$ sont à distance positive du spectre $\{\lambda_n\}$, alors la série partielle $\sum_{\alpha<\lambda_n<\beta} a_n e^{i\lambda_n t}$ constitue le développement de Fourier d'une fonction de Bohr [3]. Doss ajoute qu'un résultat analogue subsiste pour les fonctions p. p. Stepanoff et p. p. Weyl. Nous nous proposons de généraliser ce théorème en atténuant les conditions et en admettant une notion plus générale de presque-périodicité. L'auteur tient à remercier M. J. -P. Kahane de ses remarques et de ses utiles conseils au cours de la rédaction de ce travail.

THÉORÈME 1. *Si $f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ est une fonction p. p. Bohr, Stepanoff* (S), *Weyl* (W) *ou Besicovitch* (B) *et si $\varphi(t) \in L^2$ $(-\infty, \infty)$ est une fonction continue paire ou impaire, dont la transformée de Fourier*

$$\hat{\varphi}(u) = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \varphi(t) e^{-itu} dt$$

est integrable (L) *dans* $(-\infty, \infty)$, *alors la série* $\sum_n a_n \varphi(\lambda_n) e^{i\lambda_n t}$ *représente le développement de Fourier d'une fonction p. p. de Bohr, Stepanoff, Weyl ou Besicovitch respectivement.*

Démonstration. Si f est p. p. Bohr, p. p. S ou p. p. W, la fonction

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\hat{\varphi}(u)\,du \tag{1}$$

(bien définie pour presque tout t) est du même type respectivement, ce qui est facile à vérifier, puisque $\hat{\varphi} \in L(-\infty, \infty)$, en partant de la définition intrinsèque des classes examinées, c'est-à-dire d'une définition fondée sur l'existence de „presque-périodes". Dans chacun de ces trois cas on peut évaluer les constantes de Fourier $A(\lambda)$ de Φ comme il suit:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\hat{\varphi}(u)\,du\,dt \\ &= \lim_{T}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(u)e^{-i\lambda u}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t-u)e^{-i\lambda(t-u)}\,dt\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(u)e^{-i\lambda u}du\cdot\lim_{T}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t-u)e^{-i\lambda(t-u)}\,dt = \pm\varphi(\lambda)a(\lambda), \end{aligned}$$

où $a(\lambda)$ désigne la constante de Fourier de f, relative à λ, et le signe $+$ ou $-$ est à prendre suivant que φ est paire ou impaire.

La deuxième égalité résulte ici du théorème de Fubini-Tonelli, la troisième ce de que la limite lim est uniforme pour toutes les trois espèces de fonctions presque-périodiques envisagées, enfin la quatrième est une conséquence du théorème de Plancherel, la fonction φ étant à carré intégrable.

Ainsi, on a

$$\pm\Phi(t)\sim\sum_n a_n\varphi(\lambda_n)e^{i\lambda_n t},$$

ce qui achève la démonstration, sauf pour le cas des fonctions p. p. Besitovitch. Pour traiter ce dernier cas, remarquons que l'on a pour une foncion de Bohr quelconque, d'après (1)

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Phi(t)|\,dt &\leqslant \lim_{T}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(u)|\,du\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t-u)|\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(u)|\,du\lim_{T}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t-u)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(u)|\,du\cdot\lim_{T}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|\,dt, \end{aligned}$$

où la première égalité est une conséquence du fait que la limite

$$\lim_{T}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t-u)|\,dt$$

est uniforme. On en déduit la conclusion suivante: l'opération U_φ — additive et homogène — qui fait correspondre à $f(t)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ la fonction représentée par la série $\sum_n a_n\varphi(\lambda_n)e^{i\lambda_n t}$ est bornée en norme par l'expression

$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(u)|\,du$, si on la considère sur l'ensemble des fonctions de Bohr muni de la norme B.

Comme on le sait, l'ensemble des fonctions p. p. Bohr est un sous-espace linéaire dense de l'espace des fonctions p. p. B. Or si f est p. p. B, soit $\{f_k\}$ une suite de fonctions p. p. Bohr à spectre contenu dans celui de f, qui converge en norme B vers f. Grâce à la dernière conclusion, la suite $\{U_\varphi f_k\}$ est fondamentale, et comme l'espace des fonctions p. p. B est complet, elle converge vers une fonction $g(t)$, presque-périodique B. Les constantes de Fourier étant des fonctionnelles continues, celles de $g(t)$ sont égales à $a_n\varphi(\lambda_n)$, ce qui achève la démonstration(¹).

Pour que l'on ait $\hat{\varphi}\in L(-\infty,\infty)$, il suffit que $\varphi\in L^2(-\infty,\infty)$ soit continûment dérivable, $\lim_{t\to\pm\infty}\varphi(t)=0$ et $\varphi'\in L(-\infty,\infty)$. Cela permet de déduire du théorème 1 le corollaire que voici:

COROLLAIRE. *Si $f(t)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ est une fonction p. p. Bohr, p. p. S, p. p. W ou p. p. B et si $|\lambda_n|>\delta>0$ $(n=1,2,\ldots)$, alors, quel que soit $\mu>\frac{1}{2}$, la série*

$$\sum_{\lambda_n>0}\frac{a_n}{i\lambda_n^\mu}e^{i\lambda_n t}-\sum_{\lambda_n<0}\frac{a_n}{i|\lambda_n|^\mu}e^{i\lambda_n t}$$

représente le développement de Fourier d'une fonction presque-périodique du type correspondant.

Pour le prouver, on n'a qu'à prendre pour $\varphi(t)$ une fonction impaire continûment dérivable, égale à $1/t^\mu$ pour $t\geqslant\delta$.

Remarque. Le cas le plus important est $\mu=1$, le corollaire pouvant alors être énoncé sous la forme suivante: si la fermeture du spectre d'une fonction f, p. p. Bohr, S, W ou B ne contient pas le point 0, l'intégration formelle de la série de Fourier de f conduit à une série de la même classe. Cette implication est connue pour les fonctions de Bohr (voir, par exemple [5], p. 91).

THÉORÈME 2. *Si f est une fonction p. p. Bohr, soit Stepanoff, Weyl ou Besicovitch et si pour deux nombres réels α et $\beta>\alpha$ les fonctions $\int_0^x f(t)e^{-i\alpha t}dt$ et $\int_0^x f(t)e^{-i\beta t}dt$ sont bornées en norme uniforme, soit en norme $S=\|\ \|_S$, $W=\|\ \|_W$ et $B=\|\ \|_B$ respectivement, alors $\sum_{\alpha<\lambda_n<\beta}a_n e^{i\lambda_n t}$ est la série de Fourier d'une fonction p. p. appartenant à la classe correspondante.*

(¹) L'auteur doit à M. Ryll-Nardzewski l'idée de la démonstration dans le cas des fonctions p. p. B.

Avant de démontrer ce théorème nous allons examiner si et à quel point il constitue une généralisation du théorème de Doss mentionné au début. Or, il l'est en effet dans sa partie concernant les fonctions de Bohr, Stepanoff et Weyl, ce qui va être mis en évidence par le théorème 3, partiellement connu. Dans le cas des fonctions p. p. B la situation est moins claire, comme on le verra plus tard.

THÉORÈME 3. *Si* $f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ *et*

$$\Phi(t) \sim \sum_n \frac{a_n}{i\lambda_n} e^{i\lambda_n t} \tag{2}$$

sont des fonctions p. p. Bohr, resp. Stepanoff, alors l'intégrale indéfinie $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ *est une fonction p. p. Bohr resp. Stepanoff. Sous les mêmes conditions, si* f *et* Φ *sont p. p. Weyl, il existe une fonction* f^* *telle que* $\|f^*-f\|_W = 0$ *et que* $F^*(x) = \int_0^x f^*(t)\,dt$ *est p. p. W.*

La démonstration sera précédée par le théorème que voici:

THÉORÈME AUXILIAIRE. *Si* $\{w_m\}$ *est une suite de polynômes de Bochner-Fejér relatifs à une fonction* $f(t)$, *presque-périodique Weyl, on peut en extraire une sous-suite qui converge en un point* t^*.

Sans nous occuper de renforcements possibles de ce théorème nous en indiquons une simple démonstration: choisissons l_0 et m_0 de manière que

$$\frac{1}{l}\int_0^l |w_m - f|\,dt < 1 \quad \text{pour} \quad l \geqslant l_0 \text{ et } m \geqslant m_0, \tag{3}$$

ce qui est possible vu les propriétés des polynômes de Bochner-Fejér pour les fonctions p. p. W ([5], p. 242). Un nombre quelconque $M > 0$ étant donné, supposons que $|w_m(t)| \to \infty$ ait lieu partout. Alors, pour $m \geqslant m_1$, on a $|w_m(t)| > M$ dans un ensemble contenu dans $(0, l_0)$ et de mesure surpassant $\frac{1}{2}l_0$. Donc, on obtient

$$\frac{1}{l_0}\int_0^{l_0} |w_m|\,dt > \tfrac{1}{2}M,$$

ce qui n'est pas compatible avec (3) dans le cas où

$$\tfrac{1}{2}M > 1 + \frac{1}{l_0}\int_0^{l_0} |f|\,dt.$$

Démonstration du théorème 3. Nous ne la donnerons que pour les fonctions p. p. S et p. p. W, le cas des fonctions p. p. Bohr, le plus simple de tous, pouvant être traité d'une manière tout à fait analogue à celui des fonctions p. p. S.

Si f est p. p. S, il suffit de prouver que $\Phi(t) = \int_0^t f(u)\,du + C$ presque partout. Or, (2) montre que si

$$w_m(t) = \sum_{n=1}^{s_m} b_n^{(m)} e^{i\lambda_n t}$$

est une suite de polynômes de Bochner-Fejér tendant vers f selon la norme S et si

$$W_m(t) = \sum_{n=1}^{s_m} \frac{b_n^{(m)}}{i\lambda_n} e^{i\lambda_n t}$$

est la suite des polynômes correspondants, relatifs à Φ, on a

$$W_m(t+s) - W_m(t) = \int_t^{t+s} w_m(u)\,du,$$

quel que soit s, et de plus

$$\limsup_{m\to\infty} \sup_x \int_x^{x+1} \left| \int_t^{t+s} w_m(u)\,du - [\Phi(t+s) - \Phi(t)] \right| dt = 0.$$

Mais d'autre part, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire et pour m suffisamment grand, on a

$$\sup_x \int_x^{x+1} \left| \int_t^{t+s} w_m(u)\,du - \int_t^{t+s} f(u)\,du \right| dt \leqslant \sup_x \int_x^{x+1} \int_t^{t+s} |w_m(u) - f(u)|\,du\,dt < \varepsilon(s+1),$$

d'où

$$\Phi(t+s) - \Phi(t) = \int_t^{t+s} f(u)\,du$$

presque partout, et enfin

$$\Phi(t) = \int_0^t f(u)\,du + C$$

presque partout.

Si f est p. p. W, le raisonnement est analogue. Pour construire f^*, on répète deux fois, avec des précautions supplémentaires, la construction connue de Besicovitch ([2], p. 110-112), en partant des polynômes w_m, à savoir: on extrait d'abord une sous-suite $\{w_{m_k}\}$ de manière que pour $j > k$ et $l \geqslant l_0(k)$ on ait

$$(4)\qquad \sup_x \frac{1}{l}\int_x^{x+l} |w_{m_k} - w_{m_j}|\,dt < \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \sup_x \frac{1}{l}\int_x^{x+l} |W_{m_k} - W_{m_j}|\,dt < \varepsilon_k,$$

où ε_k est une suite tendant vers 0, ce qui est possible vu les propriétés des polynômes de Bochner-Fejér pour les fonctions p. p. W, déjà utilisées dans la démonstration du théorème auxiliaire; ensuite on choisit convenablement les points $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ et on pose $f^*(t) = w_1(t)$ et $\Phi^*(t) = W_1(t)$ dans $(-t_1, t_1)$, $f^*(t) = w_2(t)$ et $\Phi^*(t) = W_2(t)$ dans $(-t_2, -t_1)$ et dans (t_1, t_2) etc. Les nombres t_j doivent être soumis aux conditions suivantes:

(a) $t_j - t_{j-1} \geqslant l_0(k)$ pour $k < j$,

(b) $\left|\int_0^{t_j} (w_{m_j} - w_{m_{j-1}})\,dt\right| < \dfrac{1}{2^j}$ $(j = 2, 3, \ldots)$,

ce qui est compatible avec la conditon précédente, puisque les polynômes w_j n'ont pas de terme constant.

En vertu de (4) la condition (a) assure la convergence en norme W de la suite $\{w_{m_k}\}$ vers f^* et de la suite $\{W_{m_k}\}$ vers Φ^*, ce qui donne $\|f^* - f\|_W = \|\Phi^* - \Phi\|_W = 0$. Reste à prouver que F^* est une fonction p. p. W. Ayant en vue le théorème auxiliaire, admettons que la suite $W_{m_k}(t)$ converge au point 0:

$$(5)\qquad \lim_k W_{m_k}(0) = C,$$

ce qui simplifie les notations sans nuire à la généralité. On a, pour $k = k(x)$, tel que $t_{k-1} \leqslant x < t_k$,

$$(6)\qquad \begin{aligned} F^*(x) &= \int_0^x f^*(t)\,dt = \int_0^{t_1} w_{m_1}(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} w_{m_2}(t)\,dt + \ldots + \int_{t_{k-1}}^{x} w_{m_k}(t)\,dt \\ &= [W_{m_1}(t_1) - W_{m_1}(0)] + [W_{m_2}(t_2) - W_{m_2}(t_1)] + \ldots \\ &\quad + [W_{m_k}(x) - W_{m_{k-1}}(t_{k-1})] \\ &= W_{m_k}(x) - \sum_{j=2}^{k}\int_0^{t_{j-1}} [w_{m_j}(t) - w_{m_{j-1}}(t)]\,dt - W_{m_k}(0). \end{aligned}$$

La condition (b) implique la convergence de la somme dans (6). Soit S la valeur limite de cette somme. Ainsi, on a en vertu de (5) $\lim_{x\to\infty}\big(F^*(x) - W_{m_{k(x)}}(x)\big) = -(S+C)$. Donc $\lim_{x\to\infty}\big(F^*(x) - \Phi^*(x)\big) = -(S+C)$, d'où

$$\|F^* - (\Phi^* - S - C)\|_W = 0,$$

et comme Φ^* est une fonction p. p. Weyl, F^* l'est aussi.

THÉORÈME 3'. *Si le nombre 0 n'appartient pas à la fermeture du spectre d'une fonction p. p. Bohr, resp. Stepanoff, $f(t)$, alors l'intégrale indéfinie*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

est une fonction p. p. Bohr resp. Stepanoff. Sous la même condition, si f est p. p. W, il existe une fonction f^*, telle que $\|f^* - f\|_W = 0$ et que

$$F^*(x) = \int_0^x f^*(t)\,dt$$

est p. p. W.

Pour la démonstration on n'a qu'à faire usage du corollaire au théorème 1 et de la remarque qui le suit. On a alors (2), Φ étant une fonction p. p. Bohr, Stepanoff ou Weyl, selon le type de presque-périodicité de f. La partie du théorème 3' concernant les fonctions de Bohr est connue, à savoir elle a été démontrée par Levitan ([5], p. 89).

En admettant le théorème 3' et en supposant que α et β sont isolés du spectre, nous voyons que l'hypothèse du théorème 2 est satisfaite, d'où l'on obtient le théorème de Doss pour les fonctions p. p. Bohr, p. p. S et p. p. W.

L'auteur ignore si dans la deuxième partie du théorème 3 et du théorème 3' la presque-périodicité Weyl et la norme W peuvent être remplacées par la presque-périodicité et la norme B. La démonstration du théorème auxiliaire ne se laisse pas transcrire dans ce cas.

Remarquons enfin que le problème suivant, posé par l'auteur encore en 1951 [4], reste toujours ouvert: $f(t)$ étant une fonction de Bohr et l'intégrale indéfinie $\int_0^x f(t)\,dt$ étant bornée en norme B, représente-telle une fonction p. p. B?

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. Admettons, sans restreindre la généralité, que $\alpha = -\beta = -1$. Soit d'abord f une fonction p. p. Bohr. Posons $\varphi(t) = 1$ pour $-1 < t < 1$ et $\varphi(t) = 0$ ailleurs. Pour la transformée de Fourier de φ nous avons

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{\sin t}{\pi t}.$$

Les fonctions

$$h_n(x) = \int_{-n}^{n} f(x-t)\hat{\varphi}(t)\,dt$$

sont évidemment p. p. Bohr. Elles forment une suite uniformément convergente. En effet, en vertu du deuxième théorème sur la moyenne on a

$$\int_{n}^{m} f(x-t)\hat{\varphi}(t)\,dt = \frac{2}{\pi n}\int_{n}^{m'} f(x-t)\sin t\,dt = \frac{2}{\pi n}\int_{x-m'}^{x-n} f(t)\sin(x-t)\,dt, \tag{7}$$

où $n < m' < m$ et la dernière intégrale est, par hypothèse, bornée uniformément par rapport à x, n et m. Ainsi, la fonction

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\hat{\varphi}(t)\,dt$$

est bien déterminée et elle est une fonction de Bohr. Pour évaluer ses coefficients de Fourier évaluons d'abord ceux de h_n:

$$A^{(n)}(\lambda) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} h_n(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dx\int_{-n}^{n} f(x-t)\hat{\varphi}(t)e^{-i\lambda(x-t)}e^{-i\lambda t}\,dt$$

$$= \lim_{T}\int_{-n}^{n}\hat{\varphi}(t)e^{-i\lambda t}\,dt\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}\,dx \tag{8}$$

$$= \int_{-n}^{n}\hat{\varphi}(t)e^{-i\lambda t}\,dt\lim_{T}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}\,dx = a(\lambda)\int_{-n}^{n}\hat{\varphi}(t)e^{-i\lambda t}\,dt,$$

où $a(\lambda)$ désigne la transformée de Fourier-Bohr de f. La quatrième égalité se justifie par ce que l'expression

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}\,dx$$

est uniformément bornée par rapport à T. Les autres égalités sont évidentes ou elles ne sont que des définitions. De (8) et du théorème sur la transformée inverse il résulte que les constantes de Fourier de F sont

$$A(\lambda) = a(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(t)e^{-i\lambda t}\,dt = \varphi(\lambda)a(\lambda)$$

(la fonction $\hat{\varphi}$ étant paire). Par conséquent, on a ou bien $A(\lambda) = a(\lambda)$ ou bien $A(\lambda) = 0$ selon que $-1 < \lambda < 1$ ou $|\lambda| \geqslant 1$. Donc la série $\sum_{-1<\lambda_n<1} a_n e^{i\lambda_n t}$ représente une fonction p. p. Bohr, à savoir la fonction $F(t)$, ce qu'il fallait démontrer.

Si f est p. p. Stepanoff, Weyl ou Besicovitch, la démonstration est tout à fait analogue: grâce à l'hypothèse correspondant à chacun des cas examinés, l'intégrale au troisième membre de (7) est bornée en norme S, W ou B respectivement, donc la suite h_n converge en $\|\ \|_S$, $\|\ \|_W$ ou $\|\ \|$. Ainsi $F(x)$ est en tout cas une fonction presque-périodique du type considéré. Le calcul de $A^{(n)}(\lambda)$ est essentiellement le même chaque fois. Dans le cas des fonctions B la non-uniformité de la limite

$$\lim_{T}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}\,dx$$

par rapport à t $(-\infty < t < \infty)$ n'est pas un obstacle: la quatrième égalité dans (8) reste valable puisque t varie seulement dans l'intervalle fini $(-n, n)$.

Nous avons constaté que le résultat de Doss concernant les morceaux isolés du spectre est valable non seulement pour les fonctions de Bohr, mais aussi pour les fonctions p. p. S et p. p. W (ce dont l'auteur du résultat en question se rendait compte) et que cette généralisation est une conséquence des théorèmes 2 et 3. Nous ne sommes pas capables d'en déduire une conséquence analogue quant aux fonctions p. p. B. Néanmoins, le théorème de Doss reste encore valable ici.

Théorème 4. *Si $f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ est une fonction p. p. B et si les points α et $\beta > \alpha$ sont à distance positive du spectre de f, alors la série partielle $\sum_{\alpha<\lambda_n<\beta} a_n e^{i\lambda_n t}$ est la série de Fourier d'une fonction p. p. B.*

Pour la démonstration admettons $\alpha = -\beta$ et supposons que les intervalles $(-\beta-\varepsilon, -\beta+\varepsilon)$ et $(\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon)$ soient disjoints du spectre de f. Construisons une fonction paire $\varphi(t)$, continûment dérivable, égale à 1 dans $(-\beta-\varepsilon/2, \beta+\varepsilon/2)$ et égale à 0 pour $|t| > \beta+\varepsilon$. En vertu du théorème 1 la série $\sum_n a_n\varphi(\lambda_n)e^{i\lambda_n t}$ est la série de Fourier d'une fonction p. p. B, vu que $\hat{\varphi}\in L(-\infty, \infty)$. La conclusion résulte immédiatement vu la définition de φ. On voit aussitôt que cette démonstration s'applique aussi aux fonctions Bohr, p. p. S ou p. p. W.

Dans la démonstration du théorème 1 nous avons fait usage du fait que, $\psi(t)$ étant intégrable dans $(-\infty, \infty)$, la convolution

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\psi(t)\,dt$$

est presque-périodique Bohr, S ou W en même temps que f. Cette simple prémisse n'est plus valable pour les fonctions p. p. B, comme le montre l'exemple suivant:

Soient $I_n = (a_n, b_n)$ des intervalles tels que $a_1 = 0$, $b_n - a_n = n$, $a_{n+1} - b_n = n^3$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Soit f la fonction paire égale à n dans I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et nulle ailleurs. Enfin, prenons pour ψ la fonction paire égale à $1/n^3$ dans I_n et nulle ailleurs. On voit aisément que $\|f\|_B = 0$, $\psi \in L(-\infty, \infty)$, mais $\|F\|_B = \infty$.

Cependant, si la fonction ψ est assujettie à des conditions plus restrictives, F est p. p. B en même temps que f. C'est ce que nous nous proposons de préciser.

THÉORÈME 5. *Si $f(t)$ est une fonction p. p. B et $\psi(t)$ une fonction telle que $\psi(t)(1+|t|) \in L(-\infty, \infty)$, alors la fonction*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\psi(t)\,dt$$

est p. p. B. Les constantes de Fourier $A(\lambda)$ de F sont égales à celles de f multipliées par $2\pi\hat{\psi}(\lambda)$, où $\hat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ [2].

Pour démontrer le théorème 5 il sera utile de considérer un espace plus vaste que celui des fonctions p. p. B. Notamment, on supposera que f est une fonction pour laquelle on a

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|\,dt < \infty.$$

L'ensemble de toutes les fonctions de ce genre devient un espace de Banach, si l'on prend pour norme le premier membre de l'inégalité ci-dessus et si l'on identifie les fonctions dont la différence est de norme zéro. Nous désignerons cet espace par $\mathfrak{M}$ (du nom de Marcinkiewicz, voir [1]) et nous prouverons que l'opération $Uf = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\psi(t)\,dt$ est une opération linéaire (continue) définie sur $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Evidemment, on n'a qu'à prouver qu'elle est bornée.

Soit L la norme de f et soit

$$K = \sup_{T\geqslant 1} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|\,dt.$$

Il est évident que $K < \infty$. Dans tout le reste de la démonstration on supposera $T \geqslant 1$. Alors on a

$$\int_{-T}^{T} |f(t)|\,dt \leqslant 2KT. \tag{9}$$

---

[2] L'étude de la transformation $f \to F$ pour les fonctions p. p. B m'a été suggérée par M. M. Burnat qui en avait besoin pour l'étude d'un autre problème.

Pour un $\varepsilon > 0$ donné soit $T_0 > 0$ un nombre tel que

$$\int_{-\infty}^{-T_0} |\psi(t)|\,dt + \int_{T_0}^{\infty} |\psi(t)|\,dt < \varepsilon.$$

On voit facilement qu'on peut trouver un nombre m_0 tel que pour $m \geqslant m_0$ et pour $|t| \leqslant T_0$ on ait

$$\frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} |f(x-t)|\,dx < L+\varepsilon. \tag{10}$$

En vertu de (9) et (10) on a, pour $m \geqslant m_0$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dt\,|\psi(t)| \frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} |f(x-t)|\,dx &= \int_{-T_0}^{T_0} dt\,|\psi(t)| \frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} |f(x-t)|\,dx + \\
&+ \int_{-\infty}^{-T_0} dt\,|\psi(t)| \frac{1}{2m} \int_{-m-t}^{m-t} |f(x)|\,dx + \int_{T_0}^{\infty} dt\,|\psi(t)| \frac{1}{2m} \int_{-m-t}^{m-t} |f(x)|\,dx \\
&< (L+\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\,dt + K \int_{-\infty}^{-T_0} \frac{m+|t|}{m} |\psi(t)|\,dt + K \int_{T_0}^{\infty} \frac{m+|t|}{m} |\psi(t)|\,dt \\
&< (L+\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\,dt + 2K\varepsilon + \frac{K}{m} \int_{-\infty}^{\infty} |t\psi(t)|\,dt.
\end{aligned} \tag{11}$$

Comme la dernière intégrale est finie d'après l'hypothèse, on trouve

$$\varlimsup_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt\,|\psi(t)| \frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} |f(x-t)|\,dx = \varlimsup_{m} \frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)\psi(t)|\,dt \leqslant L \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\,dt,$$

donc, à plus forte raison,

$$\varlimsup_{m} \frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\psi(t)\,dt \right| dx \leqslant L \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\,dt,$$

d'où $\|U\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\,dt$.

Les fonctions p. p. B forment un sous-espace fermé de $\mathfrak{M}$. Les fonctions de Bohr y constituent un ensemble dense. Comme Uf est une fonction de Bohr, si f l'est, nous concluons de la continuité de U que Uf est p. p.

B, si f est p. p. B. Ainsi, la première partie du théorème 5 se trouve démontrée. Quant à la seconde, remarquons que, pour $f(t) = e^{i\lambda t}$ on a

$$A(\lambda) = \lim_{T} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dx\, e^{-i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} \psi(t)\, dt$$
$$= \lim_{T} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\lambda t} dt = 2\pi \hat{\psi}(\lambda).$$

Reste à appliquer le théorème sur l'approximation des fonctions p. p. B par des polynômes trigonométriques.

Remarque 1. Comme pour $f(t) \equiv 1$ on a $Uf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt$, on trouve, pour $\psi \geqslant 0$, $\|U\| = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt$.

Remarque 2. On voit bien que l'estimation (11) se simplifie lorsque la fonction f est bornée et que la condition $\psi \in L(-\infty, \infty)$ est suffisante dans ce cas pour que F soit p. p. B. C'est le cas qui sera utilisé dans la démonstration du théorème 6.

Remarque 3. Le problème suivant reste ouvert: si $\psi \in L(-\infty, \infty)$ et si f est p. p. B, est-il vrai qu'il existe une fonction f^* telle que $\|f - f^*\|_B = 0$ et que la convolution $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \psi(t)\, dt$ soit p. p. B?

Maintenant nous allons présenter, avec la permission de l'auteur, un théorème de M. J.-P. Kahane sur la régularité des fonctions presque-périodiques à spectre borné:

THÉORÈME 6. *Une fonction p. p. S^2 à spectre borné est presque partout égale à une fonction analytique de Bohr du type exponentiel. Une fonction p. p. W (p. p. B) bornée à spectre borné est équivalente en norme W (B) à une fonction analytique du type exponentiel.*

Remarque. Il a été démontre par Levitan ([5], p. 88) qu'une fonction p. p. Bohr à spectre borné est analytique.

La démonstration du théorème 6 sera basée sur le lemme que voici:

LEMME (Kahane). *Si la fonction φ à support dans l'intervalle fini $(-a, a)$ est deux fois continûment dérivable, alors la transformée $\hat{\varphi}$ est indéfiniment dérivable et l'on a 1° $\hat{\varphi}^{(n)}(u) = O(1/u^2)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ pour $u \to \infty$, 2° $|\hat{\varphi}^{(n)}(u)| < Ca^{n+1}(-\infty < u < \infty)$ et 3° $|u^2 \hat{\varphi}^{(n)}(u)| < C_1 n^2 a^{n+1}$ $(-\infty < u < \infty)$, C et C_1 étant indépendants de u et de n.*

On trouve en intégrant par parties

$$2\pi \hat{\varphi}(u) = \int_{-a}^{a} \varphi'(t) \frac{e^{-iut}}{iu}\, dt = \int_{-a}^{a} \varphi''(t) \frac{e^{-iut}}{(iu)^2}\, dt,$$

d'où la première partie de la conclusion pour $n = 0$. Comme

$$(12) \qquad \hat{\varphi}^{(n)}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \varphi(t)(-it)^n e^{-iut}\, dt,$$

on obtient par la même méthode

$$(13) \qquad 2\pi \hat{\varphi}^{(n)}(u) = \int_{-a}^{a} \frac{d^2}{dt^2} \big(\varphi(t)(-i)^n t^n\big) \frac{e^{-iut}}{(iu)^2}\, dt,$$

donc $\hat{\varphi}^{(n)}(u) = O(1/u^2)$ et, d'après (12), $|\hat{\varphi}^{(n)}(u)| < Ca^{n+1}(-\infty < u < \infty)$. Comme

$$\left| \frac{d^2}{dt^2} (\hat{\varphi}(t) t^n) \right| < C_1 n^2 t^n,$$

on déduit de (13) la dernière partie de la conclusion.

Soit maintenant f une fonction p. p. B bornée, dont le spectre est contenu dans $(-a, a)$ et dont la transformée de Fourier-Bohr est $a(\lambda)$. Construisons une fonction paire φ, deux fois continûment dérivable à support dans $(-a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, égale à 1 dans $(-a, a)$. D'après le lemme on a $\hat{\varphi} \in L(-\infty, \infty)$, donc en vertu du théorème 5 et de la remarque 2 qui le suit, la fonction

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \hat{\varphi}(t)\, dt$$

est p. p. B et ses constantes de Fourier sont $\varphi(\lambda) a(\lambda)$. Ainsi, F est équivalente en norme B à f. Nous allons prouver que F est analytique du type exponentiel. Comme f est bornée, nous avons en vertu de la première conclusion du lemme

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\varphi}'(x-t)\, dt,$$

$$F''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\varphi}''(x-t)\, dt$$

et ainsi de suite, donc, d'après la troisième conclusion du lemme,

$$F^{(n)}(x) < Cn^2 a^{n+1} < Cb^{n+1},$$

où b est un nombre quelconque supérieur à a. Par conséquent,

$$F(z) = \frac{z^n}{n!} F^{(n)}(0)$$

est une fonction entière et l'on a

$$|F(z)| < Ce^{b|z|}.$$

La démonstration pour les fonctions p. p. W est essentiellement la même. On n'a qu'à tenir compte du fait que F est alors une fonction p. p. W et que deux fonctions p. p. W ayant les mêmes constantes de Fourier diffèrent au plus d'une fonction, dont la norme est égale à 0. Evidemment, le même raisonnement s'applique aussi aux fonctions p. p. Bohr. Cela étant, on n'a plus qu'à prouver qu'une fonction f, p. p. S^2 à spectre contenu dans $(-a, a)$, est presque partout égale à une fonction de Bohr. Voici la démonstration:

La fonction φ étant définie comme ci-dessus, on a

$$A = \sum_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{n}^{n+1} |\hat{\varphi}(t)|^2 dt\Big]^{1/2} < \infty.$$

Considérons l'application

$$f \to F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\hat{\varphi}(t)\,dt,$$

de l'espace S^2 des fonctions telles que

$$\|f\|_{S^2} = \sup_x \Big[\int_{x}^{x+1} |f(t)|^2 dt\Big]^{1/2} < \infty,$$

dans l'espace L^∞ des fonctions bornées. Cette application est continue, puisque, pour tout x,

$$|F(x)| \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{n}^{n+1} |f(x-t)|^2 dt\Big]^{1/2} \Big[\int_{n}^{n+1} |\hat{\varphi}(t)|^2 dt\Big]^{1/2} \leqslant A\,\|f\|_{S^2}.$$

Comme les polynômes trigonométriques à spectre dans $(-a, a)$ sont invariants dans l'application, leurs limites dans S^2 et dans L^∞ coïncident presque partout, c. q. f. d.

Travaux cités

[1] J. Albrycht, *Some remarks on the Marcinkiewicz-Orlicz space*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 1-3.

[2] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Dover 1954.

[3] R. Doss, *Contribution to the theory of almost periodic functions*, Ann. of Math. 46 (1945), p. 196-219.

[4] S. Hartman, *P 84*, Coll. Math. 2 (1951), p. 154.

[5] Д. М. Левитан, *Почти периодические функции*, Москва 1953.

Reçu par la Rédaction le 9. 2. 1962