STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1961)

Über die mehrfachen Integrale von Distributionen

von

Z. ZIELEŹNY (Wrocław)

J. Mikusiński hat in [1] ein allgemeines Verfahren entwickelt, nach dem in die Distributionentheorie *irreguläre* Operationen eingeführt werden können. Für die entsprechenden Operationen auf Funktionen bedeutet dies eine Verallgemeinerung. Operationen dieser Art sind z. B. der Wert einer Distribution in einem Punkte und das bestimmte Integral. Das Verfahren stützt sich auf dem Begriff der *fundamentalen* und *regulären* Folgen, deren Definition wir hier kurz wiedergeben.

In der vorliegenden Note werden mittels der erwähnten Methode definierte mehrfache Integrale untersucht. Es soll gezeigt werden, wann das mehrfache Integral auch durch hintereinander erfolgte Integration gewonnen werden kann. Wir erhalten somit eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes über die Verwandlung eines mehrfachen Integrals in iterierte Integrale.

Sind $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p)$ Punkte des p-dimensionalen Euklidischen Raumes $\mathscr{E}^p$, so schreiben wir $\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1+\overline{x}_1, x_2+\overline{x}_2, \ldots, x_p+\overline{x}_p)$. Die Ungleichung $\boldsymbol{x} \leqslant \overline{\boldsymbol{x}}$ bedeute $x_1 \leqslant \overline{x}_1, x_2 \leqslant \overline{x}_2, \ldots, x_p \leqslant \overline{x}_p$. Für eine reelle Zahl λ wird $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)$ gesetzt.

$\mathscr{C}^p$ sei die Menge aller Punkte $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_1, \ldots, \eta_p)$ aus $\mathscr{E}^p$ mit $\eta_j = \pm 1$; insbesondere sei $\boldsymbol{e}_p = (1, 1, \ldots, 1)$.

Ferner bezeichne $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_p)$ ein System von p ganzen nichtnegativen Zahlen, $|\boldsymbol{k}| = k_1+k_2+\ldots+k_p$ und $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_p^{k_p}$.

Für die Ableitung k-ter Ordnung einer Distribution $f(\boldsymbol{x})$ wird das Symbol

$$f^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{|\boldsymbol{k}|} f(\boldsymbol{x})}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \ldots \partial^{k_p} x_p}$$

angewandt.

Ist $f(\boldsymbol{x})$ eine örtlich integrierbare Funktion, so bezeichne $\int\limits_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ das p-fache Integral über $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$.

Es ist zweckmäßig auch im Produktraum $\mathscr{E}_{\boldsymbol{x}}^p \times \mathscr{E}_{\boldsymbol{y}}^q$ erklärte Distributionen $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ der Veränderlichen $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_q)$ zu betrachten.

Ist $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ eine örtlich integrierbare Funktion, so sei $\int\limits_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\int\limits_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{d}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}$ das $p+q$-fache Integral, erstreckt über das Rechteck $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{d}$ und $\int\limits_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{x} \int\limits_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{d}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ das iterierte Integral.

1. Reguläre Folgen. Eine Folge $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$ im Intervall $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ erklärter, unendlich oft differenzierbarer Funktionen heißt *fundamental*, wenn zu jedem Intervall $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{\beta}$ $(\boldsymbol{a} < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{b})$ eine Ordnung $\boldsymbol{k}$ und eine Folge $\{\Phi_n(\boldsymbol{x})\}$ existiert derart, daß $\Phi_n^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) = \varphi_n(\boldsymbol{x})$ und $\{\Phi_n(\boldsymbol{x})\}$ in $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{\beta}$ gleichmäßig konvergiert. Insbesondere ist eine Folge konstanter Funktionen $\varphi_n(\boldsymbol{x}) = \mu_n$ fundamental dann und nur dann, wenn $\{\mu_n\}$ konvergiert.

Zwei fundamentale Folgen $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$ und $\{\psi_n(\boldsymbol{x})\}$ sind *äquivalent*, wenn die Folge $\varphi_1(\boldsymbol{x}), \psi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \psi_2(\boldsymbol{x}), \dots$ fundamental ist.

Distributionen in $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ sind zueinander fremde Klassen aller äquivalenten fundamentalen Folgen (siehe [1] und [2]). Ist $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$ eine zur Distribution $f(\boldsymbol{x})$ gehörende fundamentale Folge, so schreiben wir $f(\boldsymbol{x}) = [\varphi_n(\boldsymbol{x})]$.

Eine zur δ-Dirac Distribution gehörende fundamentale Folge $\{\delta_n(\boldsymbol{x})\}$ heißt *regulär*, wenn

(1) Träger $\delta_n(\boldsymbol{x}) \subset$ Intervall $-\varepsilon_n \boldsymbol{e}_p < \boldsymbol{x} < \varepsilon_n \boldsymbol{e}_p$, wobei $\varepsilon_n \to 0+$,

und

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1, \qquad \varepsilon_n^{p+|\boldsymbol{k}|} |\delta_n^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| < M_{\boldsymbol{k}}. \tag{2}$$

Ist $f(\boldsymbol{x})$ eine beliebige Distribution, so ist jede ihrer regulären Folgen $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$ definiert durch

$$\varphi_n(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})\, \delta_n(\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{t}, \tag{3}$$

wo die $\delta_n(\boldsymbol{x})$ den Forderungen (1) und (2) genügen.

Bemerkung. Sei $\mathscr{L}$ eine lineare Operation, die jeder Distribution $f(\boldsymbol{x})$ eine ihrer fundamentalen Folgen $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$ zuordnet. Wir setzen folgendes voraus:

$$\mathscr{L} f^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) = \{\varphi_n^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})\} \quad \text{für alle } \boldsymbol{k}. \tag{4}$$

(5) Aus $\mathscr{L} f_m(\boldsymbol{x}) = \{\varphi_{m,n}(\boldsymbol{x})\}$ $(m = 1, 2, \dots)$, $\mathscr{L} f(\boldsymbol{x}) = \{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$ und $f_m(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$ folgt für alle festen n und $\boldsymbol{k}$ die fast gleichmäßige Konvergenz $\varphi_{m,n}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) \rightrightarrows \varphi_n^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})$.

(6) $\mathscr{L}\delta(\boldsymbol{x}) = \{\delta_n(\boldsymbol{x})\}$, wobei $\{\delta_n(\boldsymbol{x})\}$ eine reguläre Folge ist.

Dann gilt (3), d. h. die Operation $\mathscr{L}$ ordnet jeder Distribution $f(\boldsymbol{x})$ die durch (3) definierte reguläre Folge zu.

Obige Bemerkung folgt unmittelbar aus einem Satz von L. Schwartz (vgl. [4], S. 18, théorème X).

Ist $\boldsymbol{a} \in \mathscr{E}^p$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{C}^p$ und ist für jede reguläre Folge $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$ aus $f(\boldsymbol{x})$ die Folge $\{\varphi_n(\boldsymbol{a} + \varepsilon_n \boldsymbol{\eta})\}$ fundamental, so schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\boldsymbol{a} + \varepsilon_n \boldsymbol{\eta}) = f(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\eta}}), \tag{7}$$

wo

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\eta}} = (a_{\boldsymbol{\eta},1}, a_{\boldsymbol{\eta},2}, \dots, a_{\boldsymbol{\eta},p}) \quad \text{und} \quad a_{\boldsymbol{\eta},j} = \begin{cases} a_j+ & \text{falls} \quad \eta_j = 1, \\ a_j- & \text{falls} \quad \eta_j = -1. \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen ε_n und $\varphi_n(\boldsymbol{x})$ ist hier, wie auch im folgenden immer durch (1), (2) und (3) bestimmt.

2. Integrale von Distributionen. Eine im (endlichen) Intervall $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ definierte Distribution $f(\boldsymbol{x})$ heiße *intergrierbar über* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ wenn für jede zu $f(\boldsymbol{x})$ gehörende reguläre Folge $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$, die Folge

$$s_n = \int\limits_{\boldsymbol{a}_n}^{\boldsymbol{b}_n} \varphi_n(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} + \varepsilon_n \boldsymbol{e}_p, \ \boldsymbol{b}_p = \boldsymbol{b} - \varepsilon_n \boldsymbol{e}_p \tag{8}$$

fundamental ist. Den Limes von (8) nennen wir das Integral von $f(\boldsymbol{x})$ über $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int\limits_{\boldsymbol{a}+}^{\boldsymbol{b}-} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

Das Integral (9) ist eine Verallgemeinerung des uneigentlichen Lebesgue-Integrals und des uneigentlichen Lebesgue-Stieltjes-Integrals. Wir haben nämlich

Satz 1. *Ist $f(\boldsymbol{x})$ eine in $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ örtlich integrierbare Funktion und existiert das uneigentliche p-fache Integral*

$$\int\limits_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\boldsymbol{\alpha}_n}^{\boldsymbol{\beta}_n} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \tag{10}$$

wo $\boldsymbol{\alpha}_n \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{\alpha}_n$ und $\boldsymbol{\beta}_n \to \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\beta}_n < \boldsymbol{b}$, so existiert das Integral (9) *und es gilt*

$$\int\limits_{\boldsymbol{a}+}^{\boldsymbol{b}-} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{11}$$

Beweis. Für eine beliebige zu $f(\boldsymbol{x})$ gehörende reguläre Folge $\{\varphi_n(\boldsymbol{x})\}$

ist

$$(12)\quad \int\limits_{a_n}^{b_n}[\varphi_n(x)-f(x)]\,dx=\int\limits_{a_n}^{b_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(x-t)-f(x)]\,\delta_n(t)\,dt\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)\Big[\int\limits_{a_n-t}^{b_n-t}f(x)\,dx-\int\limits_{a_n}^{b_n}f(x)\,dx\Big]dt.$$

Wegen (1) genügt es die Integration in (12) bezüglich t über ein Intervall $-\tau_n e_p<t<\tau_n e_p$ mit $\tau_n<\varepsilon_n$ durchzuführen.

Nun ist aber gemäß (2)

$$\int\limits_{-\tau_n e_p}^{\tau_n e_p}|\delta_n(t)|\,dt\leqslant(2\tau_n)^p\frac{M_0}{\varepsilon_n^p}<2^pM_0$$

und aus (10) folgt

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{-\tau_n e_p<t<\tau_n e_p}\Big|\int\limits_{a_n-t}^{b_n-t}f(x)\,dx-\int\limits_{a_n}^{b_n}f(x)\,dx\Big|=0.$$

Unter Anwendung von (12) erhalten wir hieraus

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{a_n}^{b_n}\varphi_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{a_n}^{b_n}f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$$

und das ist die Behauptung.

SATZ 2. *Die Distribution $f(x)$ sei in $a<x<b$ ein Maß $\mu(x)$ und $\gamma(x)$ sei eine in diesem Intervall stetige Funktion. Existiert das uneigentliche Stieltjes-Integral*

$$\int\limits_{a}^{b}\gamma(x)\,d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}\gamma(x)\,d\mu(x),$$

wo $\alpha_n\to a$, $a<\alpha_n$ und $\beta_n\to b$, $\beta_n<b$, so existiert das Integral (9) von $\gamma(x)f(x)$ und es gilt

$$\int\limits_{a+}^{b-}\gamma(x)f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b}\gamma(x)\,d\mu(x).$$

Der Beweis dieses Satzes ist dem von Satz 1 weitgehend analog.

Die Distribution $f(x,y)$ ist im Rechteck $a<x<b$, $c<y<d$ integrierbar bezüglich y, wenn für jede reguläre Folge $\{\varphi_n(x,y)\}$ aus $f(x,y)$ die Folge

$$(13)\quad \psi_n(x)=\int\limits_{c_n}^{d_n}\varphi_n(x,y)\,dy\quad\text{mit}\quad c_n=c+\varepsilon_n e_q,\ d_n=d-\varepsilon_n e_q$$

in $a<x<b$ fundamental ist. Das entsprechende Integral

$$(14)\quad [\psi_n(x)]=\int\limits_{c+}^{d-}f(x,y)\,dy$$

ist eine in $a<x<b$ erklärte Distribution. Falls nochmalige Integration von (14) über $a<x<b$ durchführbar ist, erhalten wir das iterierte Integral

$$(15)\quad \int\limits_{a+}^{b-}dx\int\limits_{c+}^{d-}f(x,y)\,dy.$$

Auf dieselbe Weise definiert man das Integral

$$(16)\quad I_\eta(z)=\int\limits_{u(z)}^{v(z)}\int\limits_{c+}^{d-}f(x,y)\,dx\,dy,$$

wobei $\eta\in\mathscr{C}^p$, $u(z)=(u_1,u_2,\ldots,u_p)$, $v(z)=(v_1,v_2,\ldots,v_p)$ und

$$u_j=\begin{cases}a_j+ & \text{falls}\quad \eta_j=1,\\ z_j & \text{falls}\quad \eta_j=-1,\end{cases}\qquad v_j=\begin{cases}z_j & \text{falls}\quad \eta_j=1,\\ b_j- & \text{falls}\quad \eta_j=-1,\end{cases}$$

$j=1,2,\ldots,p$; $I_\eta(z)$ ist eine in $a<z<b$ erklärte Distribution.

3. Der Verwandlungssatz. Zunächst sei bemerkt, daß der Satz über die Verwandlung der oben definierten mehrfachen Integrale in iterierte Integrale falsch ist, wenn sogar Existenz beider Integrale vorausgesetzt wird. Dies zeigt folgendes

Gegenbeispiel. Wir setzen $p=q=1$ und bezeichnen mit $\sigma(x)$ eine in $\mathscr{E}^1$ stetige Funktion dergestalt, daß

$$\tau(0)=0\quad\text{und}\quad \tau(x)>|x|^\alpha,\quad 0<\alpha<1.$$

Die Distribution

$$f(x,y)=\big[\delta\big(y+\tau(x)\big)-\delta\big(y-\tau(x)\big)\big]^{(k_0)}$$

mit $k_0=(1,0)$, ist das passende Gegenbeispiel, denn es ist

$$\int\limits_{0+}^{1-}\int\limits_{0+}^{1-}f(x,y)\,dx\,dy=1\quad\text{und}\quad\int\limits_{0+}^{1-}dy\int\limits_{0+}^{1-}f(x,y)\,dx=0.$$

Wir beweisen nun

SATZ 3. *Existiert $I_\eta(z)$ für alle $\eta\in\mathscr{C}^p$ und gibt es ein $\zeta\in\mathscr{C}^p$, so daß*

$$(17)\quad I_\eta(z_\zeta)=0\quad \textit{für alle}\quad \eta\neq-\zeta$$

und

$$(18)\quad I_{-\zeta}(z_\eta)=0\quad \textit{für alle}\quad \eta\neq\zeta,$$

wobei für $\xi \in \mathscr{C}^p$, $z_\xi = (z_{\xi,1}, z_{\xi,2}, \ldots, z_{\xi,p})$ *und*

$$z_{\xi,j} = \begin{cases} a_j + & \textit{falls} \quad \xi_j = 1, \\ b_j - & \textit{falls} \quad \xi_j = -1, \end{cases}$$

so existiert sowohl das $p+q$*-fache Integral über* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{d}$, *wie auch das iterierte Integral* (15) *und beide sind gleich.*

Beweis. Wir stellen fest, daß

$$\sum_{\eta \in \mathscr{C}^p} I_\eta(\boldsymbol{z}) = \int\limits_{\boldsymbol{a}+}^{\boldsymbol{b}-} \int\limits_{\boldsymbol{c}+}^{\boldsymbol{d}-} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y} \tag{19}$$

und

$$I_\eta^{(e_p)}(\boldsymbol{z}) = \eta^{e_p} \int\limits_{\boldsymbol{c}+}^{\boldsymbol{d}-} f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}. \tag{20}$$

Um das einzusehen genügt es die entsprechenden Beziehungen für die Funktionen $\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ der zu $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ gehörenden regulären Folgen nachzuprüfen.

Aus (19) folgert man, im Hinblick auf (17), daß

$$I_{-\zeta}(\boldsymbol{z}_\zeta) = \int\limits_{\boldsymbol{a}+}^{\boldsymbol{b}-} \int\limits_{\boldsymbol{c}+}^{\boldsymbol{d}-} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}. \tag{21}$$

Da aber, gemäß (18), für alle $\eta \neq \zeta$,

$$I_{-\zeta}(\boldsymbol{z}_\eta) = 0,$$

so haben wir

$$(-\zeta)^{e_p} I_{-\zeta}(\boldsymbol{z}_\zeta) = \sum_{\eta \in \mathscr{C}^p} \eta^{e_p} I_{-\zeta}(\boldsymbol{z}_\eta) = \int\limits_{\boldsymbol{a}+}^{\boldsymbol{b}-} I_{-\zeta}^{(e_p)}(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z}. \tag{22}$$

Die zweite Beziehung in (22) zeigt man genau so wie (19) und (20). Unter Heranziehung von (20) erhält man hieraus

$$I_{-\zeta}(\boldsymbol{z}_\zeta) = \int\limits_{\boldsymbol{a}+}^{\boldsymbol{b}-} d\boldsymbol{x} \int\limits_{\boldsymbol{c}+}^{\boldsymbol{d}-} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

und wegen (21) die Behauptung des Satzes.

Ist $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ eine in $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{d}$ örtlich integrierbare Funktion und existiert das über dieses Rechteck erstreckte uneigentliche Integral, so existiert $I_\eta(\boldsymbol{z})$ für alle $\eta \in \mathscr{C}^p$ und für $\eta \neq -\zeta$ ist $I_\eta(\boldsymbol{z}_\zeta) = 0$. Ähnliches gilt für das uneigentliche Stieltjes-Integral.

4. Semiregularität und Y-Integrierbarkeit. Es sei eine fundamentale Folge von der Gestalt

$$\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})\, \tau_n(\boldsymbol{u})\, \tau_n(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{v} \tag{23}$$

gegeben, wobei $\{\tau_n(\boldsymbol{x})\}$, $\{\tau_n(\boldsymbol{y})\}$ regulär sind und $[\sigma_n(\boldsymbol{x})] = \delta(\boldsymbol{x})$, $[\tau_n(\boldsymbol{y})] = \delta(\boldsymbol{y})$. Wir bezeichnen die $\{\tau_n(\boldsymbol{x})\}$, $\{\tau_n(\boldsymbol{y})\}$ durch (1) und (2) zugeordneten Zahlenfolgen mit $\{\varepsilon_n'\}$, $\{\varepsilon_n''\}$.

Die Folge (23) ist regulär dann und nur dann, wenn $\varepsilon_n' = O(\varepsilon_n'')$ und $\varepsilon_n'' = O(\varepsilon_n')$.

Ist nur $\varepsilon_n' = O(\varepsilon_n'')$ (bzw. $\varepsilon_n'' = O(\varepsilon_n')$), so nennen wir die Folge (23) *X-semiregulär* (bzw. *Y-semiregulär*).

Für semireguläre Folgen gilt der

Hilfssatz. *Ist* $\{\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$ *Y-semiregulär und ist* $\{\delta_n(\boldsymbol{x})\}$ *regulär mit* $[\delta_n(\boldsymbol{x})] = \delta(\boldsymbol{x})$, *so ist die Folge*

$$\tilde{\varphi}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})\, \delta_n(\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{t}$$

Y-semiregulär.

Beweis. Wegen (23) ist

$$\tilde{\varphi}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})\, \tilde{\tau}_n(\boldsymbol{u})\, \tau_n(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{v},$$

wobei

$$\tilde{\tau}_n(\boldsymbol{u}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_n(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{t})\, \delta_n(\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{t}.$$

Es sei nun $\{\varepsilon_n\}$ die mit $\{\delta_n(\boldsymbol{x})\}$ verbundene Zahlenfolge. Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß für $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + \varepsilon_n'$ gilt

$$\text{Träger } \tilde{\tau}_n(\boldsymbol{x}) \subset \text{Intervall } -\tilde{\varepsilon}_n \boldsymbol{e}_p < \boldsymbol{x} < \tilde{\varepsilon}_n \boldsymbol{e}_p,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tau}_n(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{\varepsilon}_n^{p+|\boldsymbol{k}|} |\tilde{\tau}_n^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| < \tilde{M}_{\boldsymbol{k}}.$$

Dies folgt unmittelbar aus (1) und (2).

Die Distribution $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ heiße *Y-integrierbar über* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{d}$, wenn für jede zu $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ gehörende Y-semireguläre Folge $\{\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$ die Folge

$$s_n = \int\limits_{\boldsymbol{a}_n}^{\boldsymbol{b}_n} \int\limits_{\boldsymbol{c}_n}^{\boldsymbol{d}_n} \varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}$$

mit $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} + \varepsilon_n' \boldsymbol{e}_p$, $\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{b} - \varepsilon_n' \boldsymbol{e}_p$, $\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{c} + \varepsilon_n'' \boldsymbol{e}_q$, $\boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{d} - \varepsilon_n'' \boldsymbol{e}_q$, fundamental ist.

Die Y-Integrierbarkeit zieht die im P. 2 definierte Integrierbarkeit nach sich, aber nicht umgekehrt.

Aus dem Beweis von Satz 1 ist zu ersehen, daß von einer Funktion $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, die in $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{d}$ den Voraussetzungen des Satzes genügt, die Y-Integrierbarkeit über $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{d}$ behauptet werden kann. Auf ähnliche Weise kann Satz 2 verschärft werden.

Wir beweisen

Satz 4. *Ist $f(x,y)$ Υ-integrierbar über $a<x<b$, $c<y<d$ und existiert das Integral*

$$g(x)=\int_{c+}^{d-}f(x,y)\,dy, \tag{24}$$

so existiert das iterierte Integral (15) *und*

$$\int_{a+}^{b-}\int_{c+}^{d-}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{a+}^{b-}dx\int_{c+}^{d-}f(x,y)\,dy.$$

Beweis. Sei $\{\varphi_n(x,y)\}$ eine reguläre Folge von der Gestalt (23) und $\{\varepsilon_n'\}$, $\{\varepsilon_n''\}$ die entsprechenden Zahlenfolgen. Nach der Voraussetzung konvergiert

$$g_n(x)=\int_{c_n}^{d_n}\varphi_n(x,y)\,dy-g(x),\quad \text{wo}\quad c_n=c+\varepsilon_n''e_q,\ d_n=d-\varepsilon_n''e_q, \tag{25}$$

in $a<x<b$ im Sinn der Distributionentheorie gegen Null. Ist $\{\delta_n(x)\}$ regulär mit $[\delta_n(x)]=\delta(x)$ und der Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$, so folgt hieraus für jedes feste m die in $a+\varepsilon_m e_p\leqslant x\leqslant b-\varepsilon_m e_p$ gleichmäßige Konvergenz

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_n(x-t)\,\delta_m(t)\,dt\rightrightarrows 0.$$

Es gibt also eine Teilfolge $\{g_{n_m}(x)\}$ derart, daß

$$\int_{a_m}^{b_m}\int_{-\infty}^{\infty}g_{n_m}(x-t)\,\delta_m(t)\,dt\,dx\to 0 \tag{26}$$

$$\text{mit}\quad a_m=a+\varepsilon_m e_p,\ b_m=b-\varepsilon_m e_p.$$

Nach dem Hilfssatz ist die Folge

$$\tilde\varphi_{n_m}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n_m}(x-t,y)\,\delta_m(t)\,dt$$

Υ-semiregulär und wegen der Υ-Integrierbarkeit von $f(x,y)$ ist

$$\int_{\tilde a_m}^{\tilde b_m}\int_{c_{n_m}}^{d_{n_m}}\tilde\varphi_{n_m}(x,y)\,dx\,dy\to\int_{a+}^{b-}\int_{c+}^{d-}f(x,y)\,dx\,dy, \tag{27}$$

wobei $\tilde a_m=a+(\varepsilon_m+\varepsilon_{n_m}')e_p$, $\tilde b_m=b-(\varepsilon_m+\varepsilon_{n_m}')e_p$.

Nun kann aber die Teilfolge $\{g_{n_m}(x)\}$ so gewählt werden, daß in (27) a_m, b_m statt $\tilde a_m$, $\tilde b_m$ gesetzt werden kann. Dann erhalten wir aus (25), (26) und (27)

$$\int_{a_m}^{b_m}\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)\,\delta_m(t)\,dt\,dx\to\int_{a+}^{b-}\int_{c+}^{d-}f(x,y)\,dx\,dy.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Die Υ-Integrierbarkeit von $f(x,y)$ über $a<x<b$, $c<y<d$ zieht nicht die Existenz des Integrals (24) nach sich. Setzen wir nämlich $p=q=1$, so ist

$$f(x,y)=(1-2x)y^{-1}\cos(\ln y)$$

Υ-integrierbar über $0<x<1$, $0<y<1$ trotzdem das Integral bezüglich y nicht existiert.

5. Bemerkungen. Der Begriff der Integrierbarkeit bzw. Υ-Integrierbarkeit steht mit dem des Limes bzw. Limes in Richtung x einer Distribution in einem Punkte, definiert durch S. Łojasiewicz in [1], in enger Beziehung.

Ist $f(x)$ eine in $a<x<b$ erklärte Distribution, so ist in diesem Intervall

$$F(x)=\int_{a+x}^{b-x}f(t)\,dt$$

eindeutig definiert (vgl. z. B. [5], S. 122). Die Integrierbarkeit von $f(x)$ über $a<x<b$ ist der Existenz eines konstanten Limes

$$\lim_{\lambda\to 0+}F(\lambda x)=F(0+)$$

auf $x>0$ gleichwertig; dabei gilt

$$F(0+)=\int_{a+}^{b-}f(x)\,dx.$$

Sei nun $f(x,y)$ eine in $a<x<b$, $c<y<d$ erklärte Distribution und sei

$$F(x,y)=\int_{a+x}^{b-x}\int_{c+y}^{d-y}f(s,t)\,ds\,dt.$$

Die Υ-Integrierbarkeit von $f(x,y)$ über $a<x<b$, $c<y<d$ ist der Existenz eines konstanten Limes in Richtung x,

$$\lim_{0<\mu\leqslant\lambda\to 0}F(\lambda x,\mu y)=F(0+,0+)$$

auf $x>0$, $y>0$, gleichwertig.

Literaturnachweis

[1] S. Łojasiewicz, *Sur la fixation des variables dans une distribution*, Studia Mathematica 17 (1958), S. 1-64.

[2] J. Mikusiński, *Irregular operations on distributions*, Studia Mathematica 20 (1961), S. 163-169.

[3] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions (I)*, Rozprawy Matematyczne 12 (1957).

[4] L. Schwartz, *Théorie des distributions II*, Paris 1951.

[5] R. Sikorski, *Integrals of distributions*, Studia Mathematica 20 (1960), S. 119-139.

Reçu par la Rédaction le 6. 2. 1961

STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1961)

Fourier analysis in Marcinkiewicz spaces

by

K. URBANIK (Wrocław)

The *Marcinkiewicz space* $\mathscr{M}^p$ $(p \geqslant 1)$ consists of all complex-valued Lebesgue measurable and locally integrable functions f on the real line such that

$$\|f\|_p = \overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty.$$

J. Marcinkiewicz [10] proved that the quotient space $\mathscr{M}^p/Q^p$, where Q^p denotes the set of all elements f belonging to $\mathscr{M}^p$, with $\|f\|_p = 0$, is a Banach space having $\|\ \|_p$ as its norm. It is easy to verify that for any $p \geqslant 1$ the inclusion $\mathscr{M}^p \subset \mathscr{M}^1$ holds. The closure in the norm $\|\ \|_p$ of the set of all trigonometric polynomials $\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$ with arbitrary real exponents $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ and complex coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ is the well known Besicovitch space $\mathscr{B}^p$, whose elements are so-called *$\mathscr{B}^p$-almost periodic functions* ([4], Chapter II, § 7).

Every Besicovitch almost periodic function g has the mean value $m(g)$, which is defined by the limit

$$m(g) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)\,dt.$$

The Fourier coefficients $\{a_g(\lambda)\}$ are defined by the formula

$$a_g(\lambda) = m(ge^{-i\lambda t}) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

The Fundamental Uniqueness Theorem says that two almost periodic functions from $\mathscr{B}^p$ having the same Fourier coefficients are identical in the sense of the norm $\|\ \|_p$. Moreover, there exists at most an enumerably infinite set of values λ for which $a_g(\lambda)$ differs from nought.

The mean value m on $\mathscr{B}^1$ is a continuous linear functional and $|m(g)| \leqslant \|g\|_1$ for $g \in \mathscr{B}^1$. Every extension m of the functional m from $\mathscr{B}^1$ to $\mathscr{M}^1$ satisfying the inequality $|m(f)| < \|f\|_1$ $(f \in \mathscr{M}^1)$ will be called a *generalized mean value* on $\mathscr{M}^1$. The well-known Hahn-Banach extension