$$\int_{V_s} |f(x+k)-f(x)|^p dV \leqslant C \|f\|_m^p |k|^\gamma$$

where γ is a positive constant.

If the angle between k and the tangent plane to V_s is less than $\delta/2$ then we can find another vector k_1 of length $|k_1| = |k|$ and such that the angles between $k-k_1$ and the tangent to V_s+k, and between k_1, and the tangent to V_s, are not less than $\delta/2$ (if V_s has the properties described in II then V_s+k has these properties also provided that k is short enough).

We get the vector k_1

$$\Big(\int_{V_s} |f(x+k)-f(x)|^p dV\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_{V_s} |f(x+k)-f(x+k_1)|^p dV\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant \Big(\int_{V_s} |f(x+k_1)-f(x)|^p dV\Big)^{1/p}$$

$$= \Big(\int_{V_{s+k}} |f(x)-f(x+k-k_1)|^p dV\Big)^{1/p} + \Big(\int_{V_s} |f(x)-f(x+k_1)|^p dV\Big)^{1/p}$$

each of two above integrals can be estimated by means of Lemma 3. Thus in both cases the integral under consideration tends uniformly to 0 and the proof is completed; the estimate of lemma 3 can obviously be extended by continuity to the whole of $W_m^p(\Omega)$.

References

[1] E. Ehrling, *On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators*, Mathematica Scandinavica 2 (1954), p. 267-287.

[2] K. K. Golovkin, DAN SSSR 134, No. 1 (1960), p. 19-22.

[3] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics 8 (1955), p. 649-675.

[4] S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics* (in Russian), Moscov 1950.

[5] P. Szeptycki, *A simple proof of an embedding theorem of the Kondrashev type*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série des Sci. math., astr. et phys., VI, No. 9 (1958), p. 561-564.

Reçu par la Rédaction le 14. 12. 1960

icm©

STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1961)

Approximation des opérateurs de J. Mikusiński par des fonctions continues

par

C. FOIAŞ (Bucureşti)

Soit $C[0,\infty)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,\infty)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $[0,\infty)$. Par rapport à la convolution, $C[0,\infty)$ devient un domaine d'intégrité dont le corps $\mathfrak{M}$ des quotients formels $\frac{f}{g}$, $f, g \in C[0,\infty)$, est l'espace des opérateurs de J. Mikusiński (1). Une suite $\left\{\frac{f_n}{g_n}\right\}$ converge vers $\frac{f}{g}$ (dans $\mathfrak{M}$), s'il existe des représentations $\frac{f_n}{g_n} = \frac{f_n'}{g_n'}$, $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$ telles que $f_n' \to f'$ (dans $C[0,\infty)$) (2).

Un problème naturel est de savoir si tout opérateur $\frac{f}{g} \in \mathfrak{M}$ peut être approché par une suite $\{k_n\}$, $k_n \in C[0,\infty)$. Il est évident que si g est nulle dans un voisinage de l'origine, alors cela n'est pas toujours vrai. Dans cette note nous montrons que la propriété ci-dessus a lieu dès que g n'est pas identiquement nulle au voisinage de l'origine.

Je tiens à remercier M. J. Mikusiński qui a bien voulu me proposer ce problème (au cours du Colloque d'Analyse Numérique tenu à Cluj, décembre 1960).

Nous commençons par établir une proposition préliminaire dont notre résultat sera une conséquence immédiate.

LEMME. *Soient f, g des fonctions sommables dans $[0,T]$, g non nulle presque partout au voisinage de 0; alors il existe une suite de fonctions k_n continues dans $[0,T]$ telle que $\{g*k_n\}$ converge en moyenne vers f.*

Démonstration. Dans le cas contraire, en vertu du théorème de Banach et de Hahn et du théorème sur la représentation des fonctionnelles linéaires continues sur l'espace des fonctions sommables sur $[0,T]$,

(1) Voir J. Mikusiński, *Operational calculus* 1959.

(2) Op. cit., p. 144.

il existerait une fonction $\Phi(t)$ mesurable et essentiellement bornée telle que

$$\int_0^T f(t)\Phi(t)\,dt \neq 0 \tag{1}$$

et

$$\int_0^T (g*k)(t)\,\Phi(t)\,dt = 0, \tag{2}$$

quelle que soit la fonction continue k. En posant $\Psi(t) = \Phi(T-t)$,
$\int_0^T k(t)(g*\Psi)(T-t)\,dt = k*(g*\Psi)(T) = \big((k*g)*\Psi\big)(T) = \int_0^T (g*k)(t)\,\Phi(t)\,dt = 0,$
d'ou l'on déduit que $g*\Psi = 0$ presque partout. En vertu du théorème de Titchmarsh et de l'hypothèse faite sur g on a $\Psi = 0$ presque partout, ce qui contredit (1).

Nous pouvons maintenant démontrer notre

THÉORÈME. *Pour tout opérateur* $\frac{f}{g}\in\mathfrak{M}$ *tel que* g *n'est pas identiquement nulle au voisinage de l'origine, il existe une suite* $\{k_n\}$, $k_n\in C[0,\infty)$, *telle que* $k_n\to\frac{f}{g}$ *dans* $\mathfrak{M}$.

Démonstration. D'après le Lemme, il existe des fonctions k_n continues sur $[0,n]$ telles que

$$\int_0^n |(g*k_n)(t)-f(t)|\,dt < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Ceci entraîne $|1*g*k_n - 1*f| \leqslant 1/n$ pour $0\leqslant t\leqslant n$. On peut supposer que $k_n\in C[0,\infty)$, ce qui ne restreint pas la généralité. Cela étant, on a $1*g*k_n \to 1*f$ dans $C[0,\infty)$, donc

$$k_n = \frac{1*g*k_n}{1*g} \to \frac{1*f}{1*g} = \frac{f}{g} \quad \text{dans} \quad \mathfrak{M},$$

la division étant ici entendue comme l'opération inverse de la convolution.

Ajouté pendant la correction. Le résultat ci-dessus a été implicitement obtenu par M. I. Fenyő (qui nous a obligeamment attiré l'attention) dans son ouvrage *Á Mikusiński-féle operátorfogalom és disztribúció fogalma közti kapcsolatról,* Á Magyar Tud. Akad. Mat. és Fiz. Tud. Osztályának Közleményei 8 (1958), p. 385-392.

Reçu par la Rédaction le 24. 12. 1960

STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1961)

Weak* bases in conjugate Banach spaces

by

I. SINGER (Bucharest)

Introduction. The notion of a basis introduced by J. Schauder [8] has a natural extension to topological linear spaces [2]. A basis in a topological linear space U is such a sequence $\{x_n\}\subset U$ that to every x in U there corresponds a unique sequence $\{a_n\}$ of scalars for which the following equation holds:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n. \tag{1}$$

Convergence of the series is that of the topology on U. Here the coefficients are obviously additive and homogeneous functionals on U:

$$a_n = \varphi_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

When all these coefficient functionals are continuous on U, the basis $\{x_n\}$ is called [2] a *Schauder basis*.

In the present paper we shall examine the particular case when U is the conjugate space E^* of a Banach space E (over the real or complex field), endowed with its weak topology $\sigma(E^*, E)$; this space is locally convex. In this case we shall use for the bases and the Schauder bases of U, the terms: weak* basis and weak* Schauder basis of E^*, respectively. We shall also use the notation $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}^{*}$ for the series in the weak topology $\sigma(E^*, E)$; thus,

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} g_n = g \qquad (g_n, g\in E^*)$$

means that

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{for all} \quad x\in E.$$

In § 1 we show an example of a weak* basis which is not a weak* Schauder basis. § 2 contains our main result which is the construction of a $\sigma(E^*, E)$-separable conjugate Banach space E^* in which there exists