A Banach space X is weakly complete if and only if every subspace of X with a basis is weakly complete.

THEOREM 2. *Let X be a Banach space. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *X is reflexive,*

(ii) *every subspace of X with a basis is reflexive,*

(iii) *every bounded basic sequence in X weakly converges to 0,*

(iv) *every basic sequence in X is shrinking,*

(v) *every basic sequence in X is boundedly complete.*

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii). This is a trivial consequence of the general fact that every subspace of a reflexive space is reflexive (see e. g. [2], p. 56).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Let (x_n) be a bounded basic sequence in X. By (ii) the space $[x_n]$ spanned on the sequence (x_n) is reflexive. Hence, according to a result of James [2], p. 71, the basis (x_n) is shrinking. Thus $\lim_n g(x_n) = 0$ for any g in $[x_n]^*$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Suppose that (iv) does not hold. Then there is a basic sequence (e_n) which is not shrinking. Thus there are a functional f in $[e_n]^*$ and a sequence (x_n) such that

$$x_n = \sum_{\nu=p_n}^{q_n} t_n^{\nu} e_{\nu}, \quad \text{where} \quad p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{and} \quad \limsup_n |f(x_n)| > 0. \tag{7}$$

It is well known that (x_n) is a bounded basic sequence (as a bounded block sequence of a basic sequence). But by (7) (x_n) does not weakly converge to 0, which contradicts (iii).

(iv) $\Rightarrow$ (i). This implication is an immediate consequence of Theorem 1.

(i) $\Rightarrow$ (v). This implication is an immediate consequence of a result of James [2], p. 71.

(v) $\Rightarrow$ (ii). This implication immediately follows from a result of Singer [3], p. 362.

References

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Berlin 1958.

[3] I. Singer, *Basic sequences and reflexivity of Banach spaces*, Studia Math. 21 (1962), p. 351-369.

[4] R. C. James, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), p. 384 (communique).

Reçu par la Rédaction le 28. 8. 1961

STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1962)

Anerkennung der Priorität.

von

S. HARTMAN und C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław)

Satz 1 aus unserer Arbeit [4] war teilweise früher bekannt. Er wurde nämlich für den Fall der Bohrschen fastperiodischen Funktionen auf der reellen Achse zuerst von Bochner in [1] bewiesen. Der Beweis läßt sich nicht direkt auf beliebige Gruppen oder auf allgemeinere Klassen fastperiodischer Funktionen übertragen. Weiter muß die Arbeit von Jerison und Rabson [5] zitiert werden, die uns leider entgangen ist und die fast alle Resultate aus [4] enthält, obwohl sie sich ihrem allgemeinen Inhalt nach nicht auf fastperiodische Funktionen bezieht. Satz 4.7 aus [5] umfaßt nämlich unsere Sätze 1 und 2 bis auf Formel (5), die nicht explizit angegeben wird.

Gelegentlich bemerken wir, daß der in [3] angegebene und dem zweiten von uns zugeschriebene Begriff von R-fastperiodischen Funktionen bereits von Doss in [2], wenn auch vermittels anderer Definition eingeführt und mit derselben Bezeichnung verwendet wurde.

Zitierte Literatur

[1] S. Bochner, *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, I Teil, Math. Annalen 96 (1926), S. 119-147.

[2] R. Doss, *Sur une nouvelle classe de fonctions presque-périodiques*, C. R. Ac. Paris 238 (1954), S. 317-318.

[3] S. Hartman, *Über Niveaulinien fastperiodischer Funktionen*, Studia Math. 20 (1961), S. 313-325.

[4] S. Hartman und C. Ryll-Nardzewski, *Über die Spaltung von Fourier-reihen fastperiodischer Funktionen*, ibidem 19 (1960), S. 287-295.

[5] M. Jerison and G. Rabson, *Congruence theorems obtained from induced homomorphisms of a group algebra*, Annals of Math. 63 (1956), S. 176-190.

Reçu par la Rédaction le 5. 6. 1962