[7] I. M. Gelfand, D. A. Raikov, and G. E. Silov, *Commutative normed rings*, Uspehi Matem. Nauk 1 (1946), p. 48-146.

[8] J. L. Kelley, *General Topology*, New York 1955, p. 202-203.

[9] S. Mazur, *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 207 (1938), p. 1025-1027.

[10] M. A. Naĭmark, *Normed Rings*, Groningen 1959.

[11] C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, New York 1960.

[12] W. Słowikowski and W. Zawadowski, *A generalization of the maximal ideals methods of Stone and Gelfand*, Fund. Math. 42 (1955), p. 215-232.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
BERKELEY

Reçu par la Rédaction le 13. 4. 1961

STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1962)

Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung

von

L. BERG (Halle/Saale)

W. A. Ditkin hat in seiner Arbeit [5] gezeigt, daß der Körper der Operatoren von J. Mikusiński [7] einem mit Hilfe von Restklassen und direkten Summen aus analytischen Funktionen gebildeten Körper isomorph ist. Identifiziert man den Operator s von Mikusiński mit einer komplexen Veränderlichen, so wird erreicht, daß man beim Aufbau der Analysis für Operatorfunktionen die klassische Funktionentheorie verwenden kann. Insbesondere bleiben die Laplace-Transformation und die komplexe Umkehrformel für die Rücktransformation als wertvolle Hilfsmittel in der Operatorenrechnung. In dem Vortrag [1] wurde bereits darüber berichtet, daß man die oben erwähnte algebraische Auffassung von Ditkin unter Beachtung von [12] auch durch eine asymptotische Auffassung ersetzen kann. Hierzu sollen jetzt nähere Einzelheiten entwickelt werden, wobei zugleich einige Vereinfachungen und Verbesserungen gegenüber von [1] vorgenommen werden, die man zum Teil auch in dem Buch [2] wiederfinden wird. Verschiedene Anregungen und Hinweise verdankt der Verfasser Herrn J. Mikusiński.

1. Die Grundlagen. Wie in [1] wollen wir hier nicht das Faltungsintegral, sondern in Anlehnung an M. Rajewski [10] (vgl. auch [5a]) das Duhamel-Integral

$$fg = \frac{d}{dt}\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{1}$$

als Grundlage der Operatorenrechnung wählen. Die Menge der für $t \geqslant 0$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen bildet dann mit der gewöhnlichen Addition und der Funktionenmultiplikation (1) einen kommutativen Ring $\mathfrak{F}$. Dabei schreiben wir die Funktionenmultiplikation (1) zur Unterscheidung von der gewöhnlichen Wertemultiplikation $f(t)g(t)$ entweder ohne Argument oder mit Malpunkt

$$fg = f(t)g = fg(t) = f(t)\cdot g(t)$$

und bezeichnen Funktionenpotenzen mit $f^n = f^{\cdot n}(t)$. Jeder Funktion

$f(t)\epsilon\mathfrak{F}$ ordnen wir die endlichen Carson-Laplace-Integrale

$$\varphi_a(p) = \mathfrak{B}_a[f(t)] \equiv p\int_0^a e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

mit $a \geqslant 0$ zu. Interessieren wir uns lediglich für die Funktion $f(t)$ in einem festen endlichen Intervall $[0, T]$, so können wir uns auf den Fall $a = T$ beschränken. Allgemein kann a jedoch eine beliebige endliche positive Zahl sein. Alle $\varphi_a(p)$ sind ganze analytische Funktionen von p, die wegen

$$\varphi_a(p) = \int_0^a e^{-p\tau}f'(\tau)\,d\tau + f(0) - e^{-pa}f(a) \tag{3}$$

in jeder Halbebene $\Re p \geqslant c$ beschränkt sind:

$$\varphi_a(p) = O(1) \quad \text{für} \quad |p| \to \infty \text{ mit } \Re p \geqslant c.$$

Etwas allgemeiner gilt mit $\gamma > \beta$

$$p\int_\beta^\gamma e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau = O(e^{-\beta p}) \quad \text{für} \quad |p| \to \infty \text{ und } \Re p \geqslant c. \tag{4}$$

Wegen

$$p\int_0^a e^{-p\tau}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau f(\tau-\sigma)g(\sigma)\,d\sigma\,d\tau + p\int_a^{2a} e^{-p\tau}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau-a}^a f(\tau-\sigma)g(\sigma)\,d\sigma\,d\tau$$
$$= p^2\int_0^a e^{-p\varrho}f(\varrho)\,d\varrho\int_0^a e^{-p\sigma}g(\sigma)\,d\sigma$$

erhalten wir daher für das Produkt (1)

$$\mathfrak{B}_a[f(t)\cdot g(t)] = \mathfrak{B}_a[f(t)]\mathfrak{B}_a[g(t)] + O(e^{-ap}). \tag{5}$$

Die $\varphi_a(p)$ sind durch $f(t)$ eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt bekannt, daß die $\varphi_a(p)$ eine Darstellung (2) besitzen mit $f(t)\epsilon\mathfrak{F}$ und sind die $\varphi_a(p)$ für unendlich viele a_n mit $a_n \to \infty$ gegeben, so ist $f(t)$ durch die Formel

$$f(t) = \Lambda[\varphi_a(p)] \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt}\varphi_a(q)\frac{dq}{q} \quad \text{für} \quad 0 < t < a \tag{6}$$

mit $a = a_n$ eindeutig bestimmt, wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist (vgl. [6], S. 212). Die Existenz der Funktion $f(t)$ muß allerdings feststehen, da die Beschränktheit der $\varphi_a(p)$ keineswegs ausreicht. Den Beweis von (6) erhält man, indem man in (6) für $\varphi_a(q)$ die rechte Seite von (2) einsetzt und die bekannte Dirichletsche Formel heranzieht, wobei zu beachten ist, daß $f(t)$ sogar differenzierbar ist. Mit Hilfe der Formeln (2) und (6) können wir jetzt stets vom t-Bereich zum p-Bereich übergehen und umgekehrt. Insbesondere folgt aus der Formel (6) für jede in einer rechten Halbebene analytische Funktion $\varphi(p)$ mit $\varphi(p) = O(e^{-ap})$ unter Heranziehung des Jordanschen Lemmas (vgl. [6], S. 224), daß die zugehörige Funktion im t-Bereich für $0 < t < a$ verschwindet und wegen der Stetigkeit auch für $t = 0$ und $t = a$. Dies bedeutet in Verbindung mit (4), daß *eine Funktion im t-Bereich dann und nur dann im Intervall $[0, a]$ verschwindet, wenn die zugehörige Funktion im p-Bereich in einer rechten Halbebene die Ordnung $O(e^{-ap})$ besitzt.* Somit könnten wir zu jeder Funktion $\varphi_a(p)$ eine beliebige in einer rechten Halbebene analytische Funktion der Ordnung $O(e^{-ap})$ hinzufügen, ohne die zugehörige Funktion $f(t)$ im Intervall $(0, a)$ zu verändern.

2. Der Satz von Titchmarsh. *Verschwinden $f(t)$ und $g(t)$ in keinem Intervall $[0, a]$ mit beliebigem $a > 0$ identisch, so besitzt das Produkt (1) dieselbe Eigenschaft.* Nach einer sehr eleganten Schlußkette von J. Mikusiński [9] genügt es, folgende schwächere Fassung zu beweisen: *Aus $f^{\cdot 2}(t) \equiv 0$ in $0 \leqslant t \leqslant a$ folgt $f(t) \equiv 0$ in $0 \leqslant t \leqslant a/2$.*

Dies ist aber leicht einzusehen. Wegen (5) folgt nämlich aus $f^{\cdot 2}(t) \equiv 0$ für die Funktion (2)

$$\varphi_a^2(p) = O(e^{-ap})$$

und hieraus

$$\varphi_a(p) = O(e^{-\frac{a}{2}p}).$$

Somit liefert uns der am Schluß von 1 stehende Satz

$$f(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{a}{2}.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Erwähnt sei, daß wir hier keinen Momentensatz explizit benutzt haben und in dem zweiten Teil dieses Beweises in [9] lediglich noch der Satz über die verschwindenden Momente benötigt wird. Mit diesem Beweis haben wir zugleich ein Beispiel für die Fruchtbarkeit der asymptotischen Methode in der Operatorenrechnung gegeben. Wir stellen uns jedoch keineswegs als Aufgabe, alles im p-Bereich zu entscheiden, denn wenn eine Fragestellung bereits im t-Bereich leicht beantwortet werden kann, so hat man es nicht nötig, sie im p-Bereich zu behandeln.

Der Satz von Titchmarsh läßt sich im p-Bereich folgendermaßen formulieren: *Ist $\varphi_a(p)\psi_a(p) = O(e^{-\gamma p})$, $\varphi_a(p) = O(e^{-\beta p})$ mit $\beta \leqslant \gamma$, aber $\varphi_a(p) \neq O(e^{-(\beta+\varepsilon)p})$ für jedes $\varepsilon > 0$, so ist $\psi_a(p) = O(e^{-(\gamma-\beta)p})$.*

Die Existenz einer solchen Zahl β ist für jede nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi_a(p)$ gesichert. Es sei aber darauf hingewiesen, daß wir diesen Satz nur für Funktionen der Gestalt (2) bewiesen haben. Für beliebige Funktionen ist er falsch, wie das Gegenbeispiel

$$\varphi(p) = \sin^{2p} p, \qquad \psi(p) = \cos^{2p} p$$

für reelle p und $\varphi(p) = \varphi(\Re p)$, $\psi(p) = \psi(\Re p)$ für beliebige komplexe p zeigt. Obwohl nämlich beide Funktionen $\neq O(e^{-\varepsilon p})$ sind für jedes $\varepsilon > 0$, ist

$$\varphi(p)\psi(p) = \frac{1}{2^{2x}} \sin^{2x} 2x = O(4^{-p}) \qquad \text{mit} \qquad x = \Re p.$$

Die Bedeutung des Satzes von Titchmarsh besteht darin, daß bei dem Produkt (1) keine Nullteiler auftreten. Damit ist der Ring $\mathfrak{F}$ sogar ein Integritätsbereich und wir können zum Quotientenkörper $\mathfrak{A}$ übergehen, dessen Elemente *Operatoren* genannt werden. Sofern Verwechslungen mit der Wertedivision zu befürchten sind, für die wir den üblichen Bruchstrich verwenden, schreiben wir die Körperdivision mit einem Doppelpunkt.

3. Eine isomorphe Darstellung. Eine Folge von Funktionen $\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots$, die je in einer rechten Halbebene analytisch sind, aber nicht unbedingt eine Darstellung der Form (2) zu besitzen brauchen, heißt eine *Fundamentalfolge* $\{\varphi_n\}$, wenn

$$\varphi_m(p) = \varphi_n(p) + O(e^{-np}) \qquad (\Re p \geqslant c_{m,n},\ |p| \to \infty) \tag{7}$$

gilt für beliebige $m > n \geqslant 0$ mit $\varphi_0(p) = 0$. Für $n = 0$ folgt aus (7), daß jede einzelne *Komponente* $\varphi_m(p)$ in einer rechten Halbebene beschränkt ist. Definieren wir für Fundamentalfolgen Gleichheit, Addition und Multiplikation komponentenweise, d. h.

$$\{\varphi_n\} + \{\psi_n\} = \{\varphi_n + \psi_n\}, \qquad \{\varphi_n\}\{\psi_n\} = \{\varphi_n \psi_n\},$$

so bilden sie offenbar einen Ring. In diesem Ring bilden die durch

$$\varphi_n(p) = O(e^{-np})$$

für alle n erklärten *Nullfolgen* ein Ideal. Wir betrachten den nach diesem Ideal gebildeten Restklassenring $\Re$, in dem zwei Fundamentalfolgen $\{\varphi_n\}$ und $\{\psi_n\}$ als gleich angesehen werden, wenn $\psi_n(p) - \varphi_n(p) = O(e^{-np})$ gilt für alle n. In diesen Restklassenring läßt sich $\mathfrak{F}$ wegen (5) homomorph abbilden, wenn wir der Funktion $f(t)$ diejenige Restklasse zuordnen, die als Vertreter die Fundamentalfolge mit den Komponenten (2) besitzt.

Gibt es speziell in einer Restklasse einen Vertreter $\{\varphi(p)\}$, dessen Komponenten von $n (\geqslant 1)$ unabhängig sind, so ist dieser eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich in dieser Restklasse noch einen solchen Vertreter $\{\psi(p)\}$, so müßte für die Differenz $\varphi(p) - \psi(p) = O(e^{-np})$ gelten für jedes n und somit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt} \bigl(\varphi(q) - \psi(q)\bigr) \frac{dq}{q^3} = 0$$

für alle t, woraus $\varphi(p) \equiv \psi(p)$ folgt. Die Menge aller Restklassen, die einen Vertreter mit konstanten (d. h. von n unabhängigen) Komponenten besitzen, bildet offenbar in $\Re$ einen Teilring, der zu dem Ring aller in einer rechten Halbebene beschränkten analytischen Funktionen isomorph ist. Folglich können wir *in $\Re$ alle Restklassen, die einen Vertreter der Form $\{\varphi(p)\}$ besitzen, durch die Funktionen $\varphi(p)$ ersetzen.* Hierdurch wird erreicht, daß bei dem oben erwähnten Homomorphismus beispielsweise der Integrationsoperator t auf die Funktion $1/p$ und allgemeiner t^n auf $n!/p^n$ abgebildet wird.

Der Ring $\Re$ läßt sich auch umgekehrt in den Quotientenkörper $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{F}$ homomorph abbilden, wobei diese Abbildung zugleich die Umkehrung der vorhergehenden liefert. Ordnen wir nämlich einer beliebigen Restklasse mit dem Vertreter $\{\varphi_n\}$ zunächst die Funktion

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt} \varphi_n(q) \frac{dq}{q^3} \qquad \text{für} \qquad 0 \leqslant t < n \tag{8}$$

zu, so ist sie stetig differenzierbar und nach 1 von n sowie von dem speziellen Vertreter der Restklasse unabhängig. Ordnen wir der betrachteten Restklasse jetzt das Element $f_0(t) : t^2/2$ von $\mathfrak{Q}$ zu, so ist diese Abbildung wegen (6) und $1/p^2 \to t^2/2$ der gesuchte Homomorphismus. Da bei dieser Abbildung eine von Null verschiedene Restklasse niemals auf die identisch verschwindende Funktion abgebildet wird, ist $\Re$ ein Integritätsbereich. Der zugehörige Quotientenkörper muß dann nach den vorhergehenden Ausführungen zu $\mathfrak{Q}$ isomorph sein, wenn wir die betrachteten Abbildungen auf die Quotientenkörper fortsetzen. Im folgenden wollen wir die bei diesem Isomorphismus einander zugeordneten Elemente miteinander *identifizieren*, und somit beispielsweise $t = 1/p$ setzen.

Die Division zweier Restklassen läßt sich für die Vertreter ebenfalls komponentenweise durchführen, wenn man am Anfang notfalls endlich viele Komponenten wegläßt, bei denen der Nenner identisch verschwinden könnte. Auf endlich viele Komponenten kommt es natürlich nicht an (vgl. [1]). Folglich sind die Vertreter $\{\varphi_n\}/\{\psi_n\}$ der Elemente des Quotientenkörpers Folgen der Form

$$\left\{\frac{\varphi_n}{\psi_n}\right\}=\left\{\frac{\varphi_\nu(p)}{\psi_\nu(p)},\ \frac{\varphi_{\nu+1}(p)}{\psi_{\nu+1}(p)},\ \frac{\varphi_{\nu+2}(p)}{\psi_{\nu+2}(p)},\ldots\right\} \tag{9}$$

mit hinreichend großem ν, wobei die Komponenten beschränktartige Funktionen sind, d. h. Quotienten von (in einer rechten Halbebene) beschränkten Funktionen. Die analytischen Funktionen $\varphi_n(p)$ und $\psi_n(p)$ müssen natürlich den *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen (7) genügen (vgl. [1]). Zwei Vertreter $\{\varphi_n/\psi_n\}$ und $\{\varphi_n^*/\psi_n^*\}$ bestimmen offenbar genau dann dasselbe Element des Quotientenkörpers, wenn

$$\varphi_n(p)\psi_n^*(p)-\varphi_n^*(p)\psi_n(p)=O(e^{-np}) \tag{10}$$

gilt für alle natürlichen Zahlen n. Einen solchen Vertreter schreiben wir auch kurz in der Form $\chi=\{\chi_n(p)\}$ mit $\chi_n(p)=\varphi_n(p)/\psi_n(p)$.

4. Der Konvergenzbegriff. Eine Folge von differenzierbaren Funktionen $f_k(t)$ nennen wir *konvergent in $\mathfrak{F}$ gegen die Grenzfunktion* $f(t)$, wenn die Folgen $f_k(t)$ und $f_k'(t)$ in jedem endlichen Intervall $[0,T]$ gleichmäßig gegen $f(t)$ bzw. $f'(t)$ streben. Die Grenzfunktion gehört dann offenbar wieder zu $\mathfrak{F}$ und es gelten für zwei konvergente Folgen $f_k(t)\to f(t)$, $g_k(t)\to g(t)$ die Beziehungen

$$f_k(t)+g_k(t)\to f(t)+g(t),\qquad f_k(t)\cdot g_k(t)\to f(t)\cdot g(t),$$

wie aus bekannten Sätzen der Analysis unmittelbar hervorgeht. Dieser Konvergenzbegriff in $\mathfrak{F}$ wurde in [1] folgendermaßen auf $\mathfrak{Q}$ übertragen (vgl. auch [11]):

Eine Folge von Operatoren Q_k heißt *konvergent in $\mathfrak{Q}$ gegen* $Q=f(t):g(t)$, wenn es ein Darstellung $Q_k=f_k(t):g_k(t)$ gibt mit $f_k(t)\to f(t)$ und $g_k(t)\to g(t)\not\equiv 0$ nach der vorhergehenden Konvergenzdefinition. Der Grenzwert Q hängt offenbar nicht von der Wahl von $f_k(t)$ und $g_k(t)$ ab, da aus $Q_k=a_k(t):b_k(t)$ mit $a_k(t)\to a(t)$, $b_k(t)\to b(t)$ wegen $f_k(t)\cdot b_k(t)=a_k(t)\cdot g_k(t)$ sofort $f(t)\cdot b(t)=a(t)\cdot g(t)$ oder $f(t):g(t)=a(t):b(t)$ folgt. Ebenso leicht kann man auch beweisen, daß dieser Konvergenzbegriff mit den Rechenoperationen in $\mathfrak{A}$ verträglich ist, also beispielsweise aus $P_k\to P$ und $Q_k\to Q$ mit $Q\not\equiv 0$ auch $P_k:Q_k\to P:Q$ folgt, was bekanntlich bei der in [7] getroffenen Konvergenzdefinition falsch ist. Nach unserer zweiten Definition können natürlich Folgen konvergent sein, die es nach unserer ersten nicht sind, beispielsweise ist jetzt die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitung überflüssig.

Der Konvergenzbegriff in $\mathfrak{Q}$ lautet im zugehörigen p-Bereich: Eine Folge von Elementen χ_k heißt *gegen ein Element χ mit dem Vertreter* $\chi=\{\varphi_n/\psi_n\}$ *konvergent*, wenn es eine Folge von Vertretern $\chi_k=\{\varphi_{n,k}/\psi_{n,k}\}$ gibt, bei denen die Funktionen $\varphi_{n,k}(p)$, $\psi_{n,k}(p)$ für jedes feste k den Bedingungen (7) genügen und für jedes feste n in einer rechten Halbebene $\Re p\geqslant c_n>0$ gegen $\varphi_n(p)$ bzw. $\psi_n(p)$ gleichmäßig konvergieren. Dabei muß natürlich $\psi_n(p)\not\equiv 0$ sein für hinreichend große n.

Zum Beweis beachten wir einerseits für $\Re p\geqslant 0$ die Ungleichung

$$\left|\int_0^n e^{-p\tau}(f'(\tau)-f_k'(\tau))\,d\tau\right|\leqslant n\,|f'(\tau_k)-f_k'(\tau_k)|$$

mit passendem Zwischenwert τ_k. Hieraus ist wegen (3) ersichtlich, daß aus $Q_k\to Q$ stets $\chi_k\to\chi$ folgt. Die durch (2) definierten Funktionen $\varphi_n(p)$, $\psi_n(p)$ genügen dann automatisch den Nebenbedingungen (7). Andererseits können wir nach Erweiterung der Komponenten von χ_k mit $1/p^2$ (vgl. (8)) in

$$f_{0,k}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}e^{qt}\varphi_{n,k}(q)\frac{dq}{q^3}$$

für $0\leqslant t\leqslant n$ bei festem n den Grenzübergang $k\to\infty$ unter dem Integralzeichen vornehmen, da die $\varphi_{n,k}(p)$ gleichmäßig beschränkt sind und $M\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}|dq/q^3|$ für $c_n>0$ mit passendem M eine integrierbare Majorante ist. Da die Konvergenz insbesondere in bezug auf t gleichmäßig ist und wir eine analoge Überlegung in bezug auf die $\psi_{n,k}$ durchführen können, folgt aus $\chi_k\to\chi$ auch umgekehrt $Q_k\to Q$.

Üblicherweise heißt eine Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}P_\varkappa$ mit $P_\varkappa\in\mathfrak{Q}$ konvergent, wenn die Folge der zugehörigen Partialsummen $Q_k=\sum_{\varkappa=1}^{k}P_\varkappa$ konvergiert. Dies bedeutet, daß es *bei einer in $\mathfrak{Q}$ konvergenten Reihe eine in $\mathfrak{F}$ konvergente Folge $g_k(t)\to g(t)\not\equiv 0$ gibt, so daß $f_k(t)=\sum_{\varkappa=1}^{k}g_k(t)P_\varkappa$ ebenfalls in $\mathfrak{F}$ konvergiert.* Um dies einzusehen, brauchen wir nämlich nur auf die Darstellung $Q_k=f_k(t):g_k(t)$ zurückzugreifen und die Konvergenzdefinition in $\mathfrak{Q}$ anzuwenden. Entsprechend heißt eine Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\omega_\varkappa$ *mit den Vertretern $\omega_\varkappa=\{\omega_{n,\varkappa}(p)\}$ im p-Bereich konvergent*, wenn es in einer rechten Halbebene für $k\to\infty$ gleichmäßig konvergente Folgen von analytischen Funktionen $\psi_{n,k}(p)$ mit Formel (7) gibt, so daß $\varphi_{n,k}(p)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\psi_{n,k}(p)\,\omega_{n,\varkappa}(p)$ dieselben Eigenschaften besitzt. Dabei kann man notfalls zu jedem Summanden eine Funktion der Ordnung $O(e^{-np})$ hinzufügen, so daß unser Konvergenzbegriff mit der asymptotischen Konvergenz aus [4] verwandt ist. Die Reihe

$$p=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa}\{(1-e^{-2p})^{\varkappa}-(1-e^{-p})^{\varkappa}\},$$

bei der alle Partialsummen gleich $O(e^{-p})$ sind, ist hierzu kein Gegenbeispiel, da sie nicht in einer rechten Halbebene konvergiert.

5. Absolute Konvergenz. Der zuvor eingeführte Konvergenzbegriff erweist sich bei gewissen Problemstellungen als zu allgemein. Deshalb wollen wir jetzt unter den konvergenten Reihen eine spezielle Klasse aussondern. Führen wir unsere Betrachtung zunächst im p-Bereich durch, so ist es naheliegend, die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\omega_{\varkappa}$ als absolut konvergent zu bezeichnen, wenn

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty}|\psi_{n,k}(p)\,\omega_{n,\varkappa}(p)|=|\psi_{n,k}(p)|\sum_{\varkappa=1}^{\infty}|\omega_{n,\varkappa}(p)|$$

für jedes p mit $\Re p\geqslant c_n$ konvergiert. Ist dies der Fall, so ist

$$|\psi_{n,l}(p)|\sum_{\varkappa=1}^{k}|\omega_{n,\varkappa}(p)|\leqslant|\psi_{n,l}(p)|\sum_{\varkappa=1}^{l}|\omega_{n,\varkappa}(p)|\leqslant M$$

bei festem n und p für alle $l\geqslant k$ beschränkt. Folglich liefert uns der Grenzübergang $l\to\infty$, daß dann auch

$$|\psi_n(p)|\sum_{\varkappa=1}^{k}|\omega_{n,\varkappa}(p)|$$

als monotone beschränkte Folge für $k\to\infty$ konvergiert. Da wir es jedoch in der Operatorenrechnung stets mit gleichmäßiger Konvergenz zu tun haben, wollen wir jetzt folgende Definition aufstellen:

Die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\omega_{\varkappa}$ heißt *absolut konvergent*, wenn es von k unabhängige Funktionen $\psi_n(p)$ gibt, die für $\Re p\geqslant c_n>0$ analytisch sind und die Eigenschaft (7) besitzen, so daß $\varphi_{n,k}(p)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\psi_n(p)\,\omega_{n,\varkappa}(p)$ dieselben Eigenschaften besitzt und außerdem $|\psi_n(p)|\sum_{\varkappa=1}^{k}|\omega_{n,\varkappa}(p)|$ für $\Re p\geqslant c_n$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist die Reihe natürlich erst recht im gewöhnlichen Sinne konvergent.

Mit dieser Definition im p-Bereich ist die folgende Definition im t-Bereich völlig gleichbedeutend:

Die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}P_{\varkappa}$ heißt *absolut konvergent*, wenn es eine von k unabhängige Funktion $g(t)$ gibt, so daß $g(t)P_{\varkappa}\in\mathfrak{F}$ ist für jedes $\varkappa$ und $\sum_{\varkappa=1}^{k}|g(t)P_{\varkappa}|$ für $k\to\infty$ in jedem endlichen Intervall $[0,T]$ gleichmäßig konvergiert. Dies geht in der üblichen Weise aus den Abschätzungen

$$\sum_{\varkappa=k}^{l}|g_0(t)P_{\varkappa}|=\sum_{\varkappa=k}^{l}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}e^{qt}\psi_n(q)\,\omega_{n,\varkappa}(q)\frac{dq}{q^3}\right|$$
$$\leqslant\frac{e^{c_nt}}{2\pi}\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}|\psi_n(q)|\sum_{\varkappa=k}^{l}|\omega_{n,\varkappa}(q)|\left|\frac{dq}{q^3}\right|$$

mit $g_0(t)=\frac{1}{p^2}g(t)$ und $0\leqslant t\leqslant n$ sowie

$$\sum_{\varkappa=k}^{l}\left|\frac{1}{p}\psi_n(p)\omega_{n,\varkappa}(p)\right|=\sum_{\varkappa=k}^{l}\left|\int_0^n e^{-p\tau}f_{\varkappa}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\int_0^n e^{-c_n\tau}\sum_{\varkappa=k}^{l}|f_{\varkappa}(\tau)|\,d\tau$$

mit $f_{\varkappa}=gP_{\varkappa}$ und $\Re p\geqslant c_n$ hervor.

Die absolut konvergenten Reihen konvergieren auch im Sinne von [7], was bei den einfach konvergenten Reihen nicht der Fall ist. Sind speziell alle $P_{\varkappa}$ Funktionen, so braucht jedoch absolute Konvergenz keineswegs dann vorhanden zu sein, wenn $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}P_{\varkappa}(t)$ konvergiert und alle $P_{\varkappa}(t)$ positiv sind, wie das Gegenbeispiel $P_{\varkappa}(t)=\varkappa e^{\varkappa t}-(\varkappa-1)e^{(\varkappa-1)}$ mit

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}P_{\varkappa}(t)=ke^{kt}=\frac{kp}{p-k} \tag{11}$$

zeigt. Diese Reihe kann nicht absolut konvergent sein, da ke^{kt} nicht im Sinne von [7] konvergent ist (vgl. [7], S. 135-136).

Für absolut konvergente Reihen gilt beispielsweise der folgende wichtige Satz: *Ist $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}P_{\varkappa}$ absolut konvergent und $\overline{P}_k$ eine Folge mit $|\overline{g}(t)\overline{P}_k|\leqslant\leqslant|\overline{f}(t)|$ für alle k* (¹), *so ist auch $\sum_{\varkappa=1}^{\infty}P_{\varkappa}\overline{P}_{\varkappa}$ absolut konvergent.* Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung

$$\sum_{\varkappa=k}^{l}|t\cdot g(t)\cdot\overline{g}(t)\cdot P_{\varkappa}\cdot\overline{P}_{\varkappa}|\leqslant t\cdot|\overline{f}(t)|\cdot\sum_{\varkappa=k}^{l}|g(t)P_{\varkappa}|.$$

(¹) D. h., gibt es eine Funktion $\overline{g}(t)$ (aus $\mathfrak{F}$ oder aus $p^2\mathfrak{F}$), so daß $\overline{g}(t)P_k$ für alle k ebenfalls eine Funktion ist und dem Betrag nach kleiner als eine gewisse Funktion $f(t)$ ist.

Dieser Satz gilt nicht für beliebige einfach konvergente Reihen mit positiven Gliedern, wie das Gegenbeispiel

$$P_\varkappa(t) = \varkappa e^{\varkappa t} - (\varkappa-1)e^{(\varkappa-1)t}, \quad \overline{P}_\varkappa(t) = \frac{1}{\varkappa}$$

wegen (11) und

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} P_\varkappa \overline{P}_\varkappa = e^{kt} + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \frac{1}{\varkappa+1} e^{\varkappa t} = \frac{p}{p-k} + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \frac{p}{(\varkappa+1)(p-\varkappa)}$$

zeigt, da die Grenzfunktion für $k \to \infty$ in den natürlichen Zahlen der komplexen p-Ebene Pole besitzt, was nach dem Momentensatz (vgl. [8]) im p-Bereich nicht möglich ist.

6. Ableitungen nach einem Parameter. Hängt die Funktion $f(t)$ noch von einem Parameter λ ab, so können wir nach Stetigkeit und Differenzierbarkeit in bezug auf λ fragen und entsprechende Begriffe für die Elemente von Ω einführen. Wir nennen einen Operator für $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ *stetig*, wenn er als Quotient zweier Funktionen darstellbar ist, die für $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ und $t \geqslant 0$ (zweidimensional) stetig sind. Wegen (2) und (8) bedeutet dies im p-Bereich, daß es *im Falle der Stetigkeit mindestens einen Vertreter gibt, dessen Komponenten aus Quotienten φ_n/ψ_n bestehen, bei denen φ_n und ψ_n für $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ und $\Re p \geqslant c_n$ stetig sind und umgekehrt.*

Bezeichnen wir Ableitungen nach λ mit einem Strich und setzen wir Ableitungen $f'(t, \lambda)$ von Funktionen stets als (zweidimensional) stetig voraus, so können wir die *Ableitung eines Operators* $f(t,\lambda):g(t,\lambda)$ durch die Formel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2}$$

definieren. Im p-Bereich gibt es wegen (2) und (8) im Falle der *Differenzierbarkeit mindestens einen Vertreter, dessen Komponenten stetig differenzierbar sind und bei dem die Ableitung komponentenweise gebildet werden kann*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\varphi_n}{\psi_n}\right\} = \left\{\frac{\psi_n\varphi_n' - \varphi_n\psi_n'}{\psi^2}\right\}$$

und umgekehrt. Diese Definition ist von dem speziell gewählten Vertreter unabhängig.

Sind zwei Funktionen $\varphi_n(p, \lambda)$ und $\varphi_n^*(p, \lambda)$ stetig differenzierbar, so folgt aus

$$\varphi_n(p,\lambda) - \varphi_n^*(p,\lambda) = O(e^{-np})$$

auch

$$\varphi_n'(p,\lambda) - \varphi_n^{*\prime}(p,\lambda) = O(e^{-np}),$$

wie aus der Gleichung

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt}\varphi_n(q,\lambda)\frac{dq}{q^3} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt}\varphi_n^*(q,\lambda)\frac{dq}{q^3}$$

für hinreichend große c und $0 \leqslant t \leqslant n$ durch Differentiation nach λ sofort ersichtlich ist. Hier bleibt also die *Abschätzung $O(e^{-np})$ bei der Differentiation unverändert* (was sonst im allgemeinen nicht der Fall ist).

Die Umkehrung der Differentialrechnung macht allerdings gewisse Schwierigkeiten, da es bisher noch nicht gelungen ist, den grundlegenden Satz, *aus* $\left(\frac{f}{g}\right)' = 0$ *folgt* $\frac{f}{g} = \mathrm{const}$ (in bezug auf λ), zu beweisen. Wir können hier lediglich drei Spezialfälle anführen, bei denen jedesmal eine Zusatzvoraussetzung auftritt.

I. *f und g sowie f' und g' sind transformierbar.* Dann folgt aus $gf'-fg' = 0$ sofort $\psi\varphi'-\varphi\psi' = 0$ und daher $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' = 0$, da ψ nicht identisch verschwindet. Hieraus ergibt sich

$$\frac{\varphi(p,\lambda)}{\psi(p,\lambda)} = \frac{\varphi(p,\lambda_1)}{\psi(p,\lambda_1)},$$

d. h. $\varphi(p,\lambda)\psi(p,\lambda_1) = \varphi(p,\lambda_1)\psi(p,\lambda)$ und somit $f(t,\lambda)\cdot g(t,\lambda_1) = f(t,\lambda_1)\cdot g(t,\lambda)$.

II. *f und g sind in λ analytisch.* In diesem Fall folgt aus $gf'-fg' = 0$ durch vollständige Induktion $gf^{(n)} - fg^{(n)} = 0$. Die letzte Gleichung liefert nämlich nach einer Differentiation $g'f^{(n)} - f'g^{(n)} + gf^{(n+1)} - fg^{(n+1)} = 0$. Weiterhin ergibt die Multiplikation von $fg' = gf'$ mit $gf^{(n)} = fg^{(n)}$ die Gleichung $fg(g'f^{(n)} - f'g^{(n)}) = 0$, aus der wir nach Division durch fg (der Fall $f = 0$ ist trivial) $g'f^{(n)} - f'g^{(n)} = 0$ und somit $gf^{(n+1)} - fg^{(n+1)} = 0$ erhalten. Die Behauptung folgt jetzt unmittelbar aus der Reihenentwicklung

$$g(t,\lambda_0)\cdot f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\cdot g(t,\lambda)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(g(t,\lambda_0)\cdot f^{(n)}(t,\lambda_0) - f(t,\lambda_0)\cdot g^{(n)}(t,\lambda_0)\right)\frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{n!} = 0.$$

III. *f und g sind bei festem λ Treppenfunktionen von t mit konstanter Stufenbreite.* Setzen wir die Stufenbreite gleich 1 und

$$f(t,\lambda) = a_n(\lambda), \quad g(t,\lambda) = b_n(\lambda)$$

mit $n = [t]$, so gilt nach [3]

$$f(t,\lambda)\cdot g(t,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(\lambda)\big(b_{n-\nu}(\lambda) - b_{n-1-\nu}(\lambda)\big) + a_n(\lambda)\, b_0(\lambda).$$

Indem wir g notfalls mit einer passenden negativen Potenz des Verschiebungsoperators multiplizieren, können wir erreichen, daß $b_0(\lambda)$ an einer Stelle λ_0 von Null verschieden ist. Für $n = 0$ folgt aus $a_0(\lambda)b_0'(\lambda) - a_0'(\lambda)b_0(\lambda) = 0$ ähnlich wie im Fall I unmittelbar $a_0(\lambda)b_0(\lambda_0) = a_0(\lambda_0)b_0(\lambda)$ und somit $a_0(\lambda) = c_0 b_0(\lambda)$. Unsere Behauptung lautet

$$a_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu\big(b_{n-\nu}(\lambda) - b_{n-1-\nu}(\lambda)\big) + c_n b_0(\lambda), \tag{12}$$

wobei die c_ν von λ unabhängig sind. Nehmen wir an, daß diese Behauptung bereits bis zu einem Index $n-1$ bewiesen ist, so folgt aus

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(\lambda)\big(b_{n-\nu}'(\lambda) - b_{n-1-\nu}'(\lambda)\big) + a_n(\lambda)\, b_0'(\lambda)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu'(\lambda)\big(b_{n-\nu}(\lambda) - b_{n-1-\nu}(\lambda)\big) + a_n'(\lambda)\, b_0(\lambda),$$

indem wir für $a_\nu(\lambda)$ und $a_\nu'(\lambda)$ die Gleichung (12) benutzen,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu b_0(\lambda)\big(b_{n-\nu}'(\lambda) - b_{n-1-\nu}'(\lambda)\big) + a_n(\lambda)\, b_0'(\lambda) \tag{13}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu b_0'(\lambda)\big(b_{n-\nu}(\lambda) - b_{n-1-\nu}(\lambda)\big) + a_n'(\lambda)\, b_0(\lambda).$$

Wegen

$$\sum_{\nu=\mu+1}^{n-1} d_{\nu-\mu}\, d_{n-\nu}' = \sum_{\nu=\mu+1}^{n-1} d_{\nu-\mu}'\, d_{n-\nu}$$

gilt nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} c_\mu d_{\nu-\mu} d_{n-\nu}' = \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} c_\mu d_{\nu-\mu}' d_{n-\nu},$$

so daß sich für $d_\mu = b_\mu - b_{\mu-1}$ alle übrigen Summanden wegheben. Dividieren wir jetzt die Gleichung (13) durch die Funktion $b_0^2(\lambda)$, die in einer Umgebung von λ_0 von Null verschieden ist, so ergibt sich durch Integration und anschließende Multiplikation mit $b_0(\lambda)$ gerade die Behauptung (12).

Damit haben wir ein erneutes Beispiel dafür, daß sich schwierige Sätze der Operatorenrechnung bei dem in [3] betrachteten Spezialfall der Operatorenrechnung für Funktionen einer diskreten Veränderlichen leicht beweisen lassen.

7. Unabhängigkeit von n. Bisher hatten wir im p-Bereich zwei Fundamentalfolgen $\{\varphi_n(p)\}$ und $\{\psi_n(p)\}$ als gleich angesehen, wenn die n-te Komponente ihrer Differenz in einer rechten Halbebene die Ordnung $O(e^{-np})$ besitzt $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Es genügt jedoch, wenn diese Ordnungsbeziehungen lediglich für reelle $p \to \infty$ erfüllt sind. Dann gilt nämlich mit $ph(t) = \varphi_n(p) - \psi_n(p)$

$$\int_0^n e^{-p\tau} h(\tau)\, d\tau = O(e^{-np})$$

oder

$$\int_0^n e^{p\sigma} h(n-\sigma)\, d\sigma = O(1)$$

für $p \to \infty$. Hieraus folgt aber nach dem Satz über die beschränkten Momente (vgl. [7], S. 12) $h(t) \equiv 0$ für $0 \leqslant t \leqslant n$. Jetzt können wir also die Veränderliche p auf die reelle Achse beschränken und auch die Voraussetzung fallen lassen, daß die Funktionen $\varphi_n(p)$ in einer rechten Halbebene analytisch sind. Es muß lediglich zu einer gegebenen Funktion $\varphi_n(p)$ eine in einer rechten Halbebene analytische und dort beschränkte Funktion $\psi_n(p)$ existieren, so daß für reelle $p \to \infty$ die Darstellung $\psi_n(p) = \varphi_n(p) + O(e^{-np})$ gilt. Es dürfte aber wohl kaum leicht sein, allgemein bei einer gegebenen Funktion $\varphi_n(p)$ zu entscheiden, ob dies der Fall ist oder nicht. Somit entsteht die Frage, ob diese Verallgemeinerung der p-Funktionen überhaupt zweckmäßig ist.

Die neue Betrachtungsweise bietet jedoch den Vorteil, daß jetzt zu jeder Funktion $f(t) \in \mathfrak{F}$ eine von n unabhängige Funktion $\varphi(p)$ mit

$$\varphi(p) = p\int_0^n e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau + O(e^{-np})$$

für reelle $p \to \infty$ und beliebige $n \geqslant 0$ existiert. Wir brauchen nämlich nur

$$\varphi(p) = p\int_0^{x(p)} e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau$$

zu wählen, wobei $x(p)$ eine Funktion ist, die für $p \to \infty$ gegen Unendlich strebt, aber so schwach, daß

$$p\int_n^{x(p)} e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau = O(e^{-np})$$

ist für jedes feste n. Dies leistet beispielsweise die Funktion $x(p) = \operatorname{Max} x_0$ mit

$$|f(t)| \leqslant e^{p} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant x_0,$$

wie die Abschätzungen

$$\left|p\int_n^{n+1} e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau\right| \leqslant Me^{-np}, \qquad \left|p\int_{n+1}^{x(p)} e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau\right| \leqslant e^{-np}$$

zeigen. Natürlich gibt es auch noch andere Möglichkeiten, $x(p)$ festzulegen, wie etwa bei dem Beispiel (vgl. [9a], (11))

$$\varphi(p) = p\int_0^{\frac{p}{2}} e^{-p\tau+\tau^2}\,d\tau,$$

so daß $\varphi(p)$ nicht eindeutig bestimmt ist. Insbesondere kann man zu $\varphi(p)$ eine beliebige Funktion $\psi(p)$ hinzufügen, für die $\psi(p) = O(e^{-np})$ für jedes n gilt wie bei den Funktionen

$$e^{-p\ln p}, \quad e^{-p^2}, \quad e^{-e^p}, \quad \frac{1}{\Gamma(p)},$$

zu denen im t-Bereich die Funktion $f(t) \equiv 0$ gehört. Nebenbei ergibt sich, daß die hierzu reziproken Funktionen wie e^{p^2} nicht existieren.

8. Nachtrag bei der Korrektur. Wie Fenyö [6a] bewiesen hat, kan jeder Operator $f(t):g(t)$ als Grenzwert im Sinne von [7] von Funktionen $\varphi_k(t)$ aufgefaßt werden. Dieser Satz gilt erst recht bei unserer Konvergenzdefinition, wobei der Beweis unmittelbar aus $\frac{1}{k}\varphi_k(t)+g(t)\cdot\varphi_k(t) = f(t)$ für $k\to\infty$ hervorgeht. Während in [3] auch ein entsprechender Satz für diskrete Operatoren bewiesen wurde (vgl. 6e), kann $a_n:b_n$ im Falle $a_0 \neq 0$, $b_0 = 0$ kein Grenzwert von $c_n^{(k)}$ im Sinne von [7] sein, da sonst $b_0c_0^{(k)} \to a_0$ streben müßte.

Literatur

[1] L. Berg, *Moderne Operatorenrechnung*, ZAMM 39 (1959), S. 342-346.

[2] — *Einführung in die Operatorenrechnung* (im Druck).

[3] — *Zur Operatorenrechnung für Funktionen einer diskreten Veränderlichen*, Studia Mathematica 20 (1961), S. 227-243.

[4] J. G. van der Corput, *Asymptotics I*, Indagationes Mathematicae 16 (1954), S. 206-217.

[5] W. A. Ditkin, *Zur Theorie der Operatorenrechnung* (russ.), Доклады Академии Наук 123 (1958), S. 395-396.

[5a] — *Zur Theorie der Operatorenrechnung* (russ.), ibidem 116 (1957), S. 15-17.

[6] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation I*, Basel 1950.

[6a] F. Fenyö, *Über einen Satz der Operatorenrechnung*, Vortrag vom 21.9.1961 auf der Tagung der Deutschen Math.-Ver. in Halle.

[7] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, Berlin 1957.

[8] — und C. Ryll-Nardzewski, *A theorem on bounded moments*, Studia Mathematica 13 (1953), S. 51-55.

[9] — und C. Ryll-Nardzewski, *Une simple démonstration du théorème de Titchmarsh sur la convolution*, Bull. Ac. Pol. Sci. 7 (1959), S. 715-717.

[9a] — *Remarks on the algebraic derivative in the operational calculus*, Studia Math. 19 (1960), S. 187-192.

[10] M. Rajewski, *Berechnung der Einschaltvorgänge in linearen Schaltungen mittels "abgeschnittener" Funktionen*, Wiss. Z. Hochschule Ilmenau 4 (1958), S. 143-165.

[11] K. Urbanik, *Sur la structure non topologique du corps des opérateurs*, Studia Mathematica 14 (1954), S. 243-246.

[12] J. C. Vignaux, *Sugli integrali di Laplace asintotici*, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. nat. (6) 29 (1939), S. 396-402.

Reçu par la Rédaction le 14. 4. 1961