[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa-Lwów 1932.

[4] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge 1932.

[5] Z. W. Birnbaum und W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Studia Math. 3 (1931), p. 1-67.

[6] H. Bohnenblust and A. Sobczyk, *Extensions of functionals on complex linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 91-93.

[7] J.-P. Kahane, *Sur les coefficients de Fourier-Bohr*, Studia Math. 21 (1961), p. 103-106.

[8] М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, *О линейных функционалах в пространствах Орлича*, ДАН СССР 97, 4, (1954), p. 581-584.

[9] — *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва 1958.

[10] J. Marcinkiewicz, *Une remarque sur les espaces de M. Besicovitch*, C. R. Acad. Sci., Paris, 208 (1939), p. 157.

[11] S. Mazur, *On the generalized limit of bounded sequences*, Coll. Math. 2 (1951), p. 173-175.

[12] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Acad. Polon. Sci. et Lettres, Série A, (1932), p. 207-220.

[13] Г. А. Сухомлинов, *О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве*, Матем. Сборник, 3 (45) (1938), p. 353-358.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1961

STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1961)

Sur les coefficients de Fourier-Bohr

par

J.-P. KAHANE (Montpellier)

Cette note répond à la question suivante, posée par S. Hartman. Soit f une function localement sommable sur la droite, telle que

$$\int_{-T}^{T} |f(t)|\,dt = O(T) \qquad (T\to\infty). \tag{1}$$

On suppose que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-i\lambda t}dt = a(\lambda) \tag{2}$$

existe pour tout λ réel. Peut-on affirmer que $a(\lambda)=0$ sauf sur un ensemble au plus dénombrable?

Si l'on remplace (1) par

$$\int_{-T}^{T} |f(t)|^p\,dt = O(T) \qquad (T\to\infty) \tag{3}$$

avec $p>1$, la réponse positive résulte d'une récente étude d'Urbanik [1]. Nous allons montrer que la réponse est positive sans même astreindre f à la condition (1).

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction localement sommable sur $[0,\infty)$. On suppose que*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)e^{-i\lambda t}dt = c(\lambda) \tag{4}$$

existe pour un ensemble fermé F de valeurs de λ. Alors, sur F, $c(\lambda)=0$ sauf sur un ensemble au plus dénombrable, et l'ensemble E_ε des $\lambda\in F$ tel que $|c(\lambda)|>\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ donné) est clairsemé [2].

---

[1] K. Urbanik, *Fourier analysis in Marcinkiewicz spaces*, Studia Math. 21 (1961), p. 93-102.

[2] Rappelons qu'un ensemble est dit *clairsemé* s'il ne contient aucun ensemble $\neq\emptyset$ dense en lui-même, c'est-à-dire sans point isolé.

Démonstration. Comme tout ensemble non dénombrable contient un ensemble dense en lui-même (à savoir l'ensemble de ses points de condensation), il suffit de montrer que E_ε n'a pas cette propriété. Supposons le contraire, c'est-à-dire l'existence d'un $F_\varepsilon \subset F$, dense en lui-même, et tel que $|c(\lambda)| > \varepsilon$ pour $\lambda \in F_\varepsilon$.

Pour tout $\lambda \in F$, posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_\lambda(T) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}\,dt, \\[2ex] \varepsilon_\lambda(T) = \mathfrak{M}_\lambda(T) - c(\lambda) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \big(f(t)e^{-i\lambda t} - c(\lambda)\big)\,dt. \end{cases}$$

Ainsi $\varepsilon_\lambda(T)$ tend vers zéro avec $1/T$. Si $\lambda \in F$ et $\lambda+\mu \in F$, on a

$$\mathfrak{M}_{\lambda+\mu}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T c(\lambda)e^{-i\mu t}\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{dt}\big(t\varepsilon_\lambda(t)\big)e^{-i\mu t}\,dt$$

$$= c(\lambda)\frac{e^{-i\mu T}-1}{-i\mu T} + \varepsilon_\lambda(T)e^{-i\mu T} + \frac{i\mu}{T}\int_0^T t\varepsilon_\lambda(t)e^{-i\mu t}\,dt$$

soit

$$(6)\qquad \mathfrak{M}_{\lambda+\mu}(T) = c(\lambda)k(\mu T) + \varepsilon_\lambda(T, \mu T)$$

avec

$$(7)\qquad k(\pm\pi) = \frac{\pm 2}{i\pi} \quad \text{et} \quad k(\pm 2\pi) = 0,$$

(8) $\lim\limits_{T\to\infty} \varepsilon_\lambda(T, s) = 0$ uniformément par rapport à s quand $|s| \leqslant 2\pi$.

Nous allons construire une suite d'intervalles ouverts I_j emboités décroissants, coupant F_ε, par le procédé suivant. On convient que I_0 est la droite entière. Etant donné un I_{j-1} coupant F_ε, choisissons arbitrairement $\lambda_j \in I_{j-1} \cap F_\varepsilon$, puis choisissons T_j assez grand pour que

$$(9)\qquad \sup_{T>T_j,\, |s|\leqslant 2\pi} |\varepsilon_{\lambda_j}(T, s)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

ce qui est possible d'après (8). Comme F_ε est supposé dense en lui-même, il en est de même de $I_{j-1} \cap F_\varepsilon$. Il existe donc un intervalle ouvert I_j inclus dans I_{j-1}, de longueur $\eta_j < \pi/2T_j$ et situé à la distance η_j de λ_j, non disjoint de F_ε; ainsi

$$(10)\qquad \lambda_j + \mu \in I_j \cap F_\varepsilon \Rightarrow \eta_j < |\mu| < 2\eta_j \qquad \text{avec} \qquad \eta_j < \frac{\pi}{2T_j}.$$

Lorsque $\lambda_j + \mu \in I_j \cap F$, on a, d'après (6), (7), (9) et (10)

$$\sup_{\frac{\pi}{2\eta_j} < T < \frac{2\pi}{\eta_j}} |\mathfrak{M}_{\lambda_j+\mu}(T)| \geqslant \left|\mathfrak{M}_{\lambda_j+\mu}\left(\frac{\pi}{|\mu|}\right)\right| > \frac{3\varepsilon}{2\pi},$$

$$\inf_{\frac{\pi}{2\eta_j} < T < \frac{2\pi}{\eta_j}} |\mathfrak{M}_{\lambda_j+\mu}(T)| \leqslant \left|\mathfrak{M}_{\lambda_j+\mu}\left(\frac{2\pi}{|\mu|}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Autrement dit, quel que soit $\lambda \in I_j \cap F$, on a

$$(11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sup_{\frac{\pi}{2\eta_j} < T < \frac{2\pi}{\eta_j}} |\mathfrak{M}_\lambda(T)| > \frac{3\varepsilon}{2\pi}, \\[2ex] \displaystyle\inf_{\frac{\pi}{2\eta_j} < T < \frac{2\pi}{\eta_j}} |\mathfrak{M}_\lambda(T)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}. \end{cases}$$

Il est immédiat que $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_j = 0$. Au point λ intersection des I_j, qui appartient à F puisque F est fermé, on a, d'après (11),

$$\varliminf_{T\to\infty} |\mathfrak{M}_\lambda(T)| < \varlimsup_{T\to\infty} |\mathfrak{M}_\lambda(T)|$$

contrairement à l'hypothèse (4) à savoir, que $\mathfrak{M}_\lambda(T)$ admet une limite. La contradiction établit le théorème 1.

Remarques. 1. Dans les hypothèses du théorème 1, il est faux que E_ε soit nécessairement fini, comme le montre l'exemple $f(t) = \sum\limits_1^\infty \sin \varepsilon_n t$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n < \infty$. Il est facile de voir que $c(\lambda)$ existe pour tout λ, et que $c(\varepsilon_n) = -i/2$.

2. L'hypothèse que F est fermé est essentielle, et la situation est très différente si l'on impose seulement l'existence de $c(\lambda)$ sur un ensemble non fermé. C'est ainsi que l'on peut construire une $f \geqslant 0$, telle que $c(2\pi\lambda)$ existe et soit égale à 1 pour tous les rationnels. Voici le principe d'une telle construction.

On construit d'abord une mesure $d\mu \geqslant 0$, portée par les entiers positifs, telle que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T d\mu(t) = c_\mu(0) = 1$$

et telle que, pour tout n, le support de $d\mu$, à l'exception d'un nombre fini de points, soit formé de multiples de n; alors on aura, pour tous les entiers p et n,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{-2ip\pi/n}d\mu(t) = c_\mu\left(\frac{2\pi p}{n}\right) = 1.$$

Cela est facile: en désignant par δ_m la masse unité au point m, on prend

$$d\mu = \sum_{j=1}^{\infty}(n_{j+1}-n_j)\,\delta_{n_j}$$

la suite $\{n_j\}$ étant choisie de telle façon que 1° $n_{j+1}-n_j = \sigma(n_j)$, 2° n_j est multiple de $n!$ quand j est assez grand ($j > j_n$). Ensuite on „régularise" $d\mu$ en remplaçant chaque δ_{n_j} par une fonction $\geqslant 0$, d'intégrale égale à 1, et de support $[n_j-\varepsilon_j, n_j+\varepsilon_j]$ avec $\lim\limits_{j\to\infty}\varepsilon_j = 0$.

Comme me l'a signalé S. Hartman, le théorème 1 admet le corollaire suivant:

THÉORÈME 2. *Soit f une fonction localement sommable sur* $[0, \infty)$. *Alors $c(\lambda)$, définie par* (4), *ne peut exister et être différent de zéro sur un ensemble non dénombrable.*

Démonstration. Le premier membre de (4) ne change pas si l'on astreint T à ne prendre que des valeurs entières. Ainsi l'ensemble E des valeurs des λ pour lesquelles $c(\lambda)$ existe est l'ensemble de convergence d'une suite de fonctions continues; c'est donc un ensemble borélien. Il en est encore de même de l'ensemble $E_0\subset E$ où $c(\lambda)\neq 0$. Si E_0 n'était pas dénombrable, il existerait un parfait $F\subset E_0$, et l'application du théorème 1 à F aboutirait à une contradiction.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1961

STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1961)

A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions

by

W. MATUSZEWSKA and W. ORLICZ (Poznań)

1.1. In this paper, a function nondecreasing and continuous for $u\geqslant 0$, vanishing only at $u=0$ and tending to ∞ as $u\to\infty$ will be called a *φ-function*. Two φ-functions φ, ψ are called *equivalent for large u*, in symbols $\varphi\overset{l}{\sim}\psi$, if

$$(+)\qquad a\varphi(k_1u)\leqslant\psi(u)\leqslant b\varphi(k_2u)$$

for $u\geqslant u_0\geqslant 0$ and for some constants $a, b, k_1, k_2 > 0$.

If $(+)$ holds for $u\geqslant u_0 = 0$, then φ, ψ are called *equivalent for all u*, in symbols $\varphi\overset{a}{\sim}\psi$; if $(+)$ holds for $0\leqslant u\leqslant u_0$, then φ, ψ are called *equivalent for small u*, in symbols $\varphi\overset{s}{\sim}\psi$ (cf. [2], [3]).

1.2. The following conditions are of importance in our considerations:

$$(0_s)\quad \lim_{u\to 0+}\varphi(u)u^{-s} = 0,\qquad (\infty_s)\quad \lim_{u\to\infty}\varphi(u)u^{-s} = \infty,$$

$$(0_s^b)\quad \overline{\lim_{u\to 0+}}\,\varphi(u)u^{-s} < \infty,\qquad (\infty_s^b)\quad \overline{\lim_{u\to\infty}}\,\varphi(u)u^{-s} < \infty,$$

where $0 < s\leqslant 1$.

Easy calculation shows, (0_s) is an invariant of the relation $\overset{s}{\sim}$, and (∞_s) of the relation $\overset{l}{\sim}$ and both these properties are invariants of the relation $\overset{a}{\sim}$. The same holds for (0_s^b) and (∞_s^b).

1.3. Let φ be a φ-function satisfying (0_1) and (∞_1). The function

$$\varphi^*(v) = \sup_{u\geqslant 0}\big(uv-\varphi(u)\big)\quad\text{ for }\quad v\geqslant 0$$

is called the *function complementary to* φ. It is proved easily that φ^* is a convex φ-function satisfying (0_1), (∞_1) and $(\varphi^*)^* = \varphi$ if and only if φ is convex. For arbitrary φ-functions satisfying (0_1), (∞_1) there holds $\big(\varphi^*(u)\big)^*\leqslant\varphi(u)$ for $u\geqslant 0$. We shall call $\bar\varphi(u) = \big(\varphi^*(u)\big)^*$ the *function associated with* φ.