STUDIA MATHEMATICA, T. XX. (1961)

Sur les équations involutives et leurs applications

par

D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ (Warszawa)

Introduction. Dans le travail présent nous étudions les équations involutives, c'est-à-dire les équations qui contiennent une opération S, dite *involution*, identique à son inversion, vérifiant donc l'égalité suivante:

$$S^2 = I$$

(où I désigne l'identité). Toutes les considérations abstraites ont leur origine dans l'étude des équations intégrales singulières (avec l'intégrale au sens de la valeur principale de Cauchy). Ces équations *linéaires* (qui nous intéressent ici), ont été étudiées par plusieurs mathématiciens, entre autres par Carleman, Vécoua et Muskhelichvili, qui a exposé tous les principaux résultats dans sa belle monographie [8]. On sait que ni la transformation intégrale de Cauchy, ni aucune itération de celle-ci, ne sont des opérations complètement continues. Pourtant, on a obtenu des formules effectives pour la solution des équations singulières: dans un cas particulier à l'aide du problème de Hilbert (pour les valeurs limites d'une fonction holomorphe), dans le cas général en ramenant l'équation singulière à une équation intégrale à singularité *faible*.

Halilov [5] a généralisé cette dernière méthode pour le cas des équations singulières dans les anneaux unitaires en supposant, entre autres, que la transformation singulière est une *involution*. Cette propriété d'une transformation intégrale de Cauchy, bien que connue, n'a pas trouvé d'applications. Nous allons montrer qu'elle est *fondamentale* et que plusieurs des résultats connus peuvent être obtenus par les méthodes simples de *l'algèbre linéaire*.

En général on a étudié l'involution sous des hypothèses particulières (voir les travaux [6], [9]), qui ne sont pas satisfaites dans le cas d'une transformation intégrale quelconque; par exemple, on a supposé que l'involution est *multiplicative*. Mais ces hypothèses ne sont pas nécessaires pour étudier les équations involutives. Les algèbres des opérations singulières ont été étudiées par Calderón et Zygmund [4], mais sans admettre l'hypothèse $S^2 = I$ et sans l'appliquer aux équations intégrales singulières.

Dans les paragraphes de ce travail, marqués d'un astérisque, on ne profite pas de la topologie et des propriétés métriques des espaces et des opérations considérés.

Dans le paragraphe 1 (*) nous étudions l'involution dans les espaces linéaires en établissant le théorème spectral pour l'opération S. Dans le paragraphe 2 nous nous occupons des propriétés de l'involution dans les espaces unitaires. Le paragraphe 3 (*) contient une étude des équations involutives dans les espaces linéaires. Dans le paragraphe 4 (*) nous trouvons les conditions suffisantes d'existence d'une solution de l'équation involutive, qui ne sont pas formulées dans le cas classique. Dans le paragraphe 5 (*) nous établissons une condition nécessaire, qui est aussi suffisante dans le cas classique. Le paragraphe 6 est une extension des résultats de Halilov [5] pour les espaces de Banach et pour une classe d'opérations plus générale.

Remarquons encore que l'application des propriétés d'involution simplifie considérablement les raisonnements et permet de trouver des propriétés nouvelles.

Toutes les notions et notations algébriques adoptées sont celles du travail [9]; pour les espaces unitaires nous renvoyons au travail [7] et enfin, pour les espaces de Banach au travail [1].

1(*). Involution dans les espaces linéaires. Soit l'espace X linéaire (sur le corps des nombres complexes) et une opération linéaire S, qui transforme l'espace X en X et telle que son carré est égal à l'identité:

$$S^2 = I. \tag{1}$$

On appelle une telle opération *involution*.

Désignons par X^+ et X^- les ensembles suivants:

$$X^+ = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x = (S+I)y], \qquad X^- = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x = (S-I)y] \qquad (y \in X). \tag{2}$$

Évidemment nous avons

$$Sx = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in X^+, \\ -x, & \text{si} \quad x \in X^-. \end{cases} \tag{3}$$

Donc, on peut représenter tout élément $x \in X$ d'une manière unique sous la forme suivante:

$$x = x^+ + x^-, \qquad \text{où} \qquad x^+ \in X^+,\ x^- \in X^-, \tag{4}$$

en admettant

$$x^+ = \tfrac{1}{2}(I+S)x, \qquad x^- = \tfrac{1}{2}(I-S)x. \tag{5}$$

Nous allons résoudre une équation, dite *fondamentale*, de la forme suivante:

$$(I+\lambda S)x = x_0, \tag{6}$$

où $x_0 \in X$ est donné, λ désigne un paramètre complexe.

THÉORÈME. 1. *L'équation fondamentale* (6) *admet*

1) *pour* $\lambda = 1$, *une solution*

$$x = \tfrac{1}{2}x_0 + x_1^- \qquad (x_1^- \in X^- \textit{ est arbitraire})$$

sous la condition nécessaire et suffisante $(I-S)x_0 = 0$;

2) *pour* $\lambda = -1$, *une solution*

$$x = \tfrac{1}{2}x_0 + x_1^+ \qquad (x_1^+ \in X^+ \textit{ est arbitraire})$$

sous la condition nécessaire et suffisante $(I+S)x_0 = 0$;

3) *pour* $\lambda \neq \pm 1$, *une solution unique*

$$x = \frac{1}{1-\lambda^2}(I-\lambda S)x_0$$

pour x_0 *arbitraire.*

Démonstration. Il y a trois cas à considérer.

1) $\lambda = 1$. Nous avons l'équation

$$(I+S)x = x_0, \tag{7}$$

d'où $x^+ = \frac{1}{2}x_0$, x^- est arbitraire, si $x_0 \in X^+$, d'où la condition suffisante

$$(I-S)x_0 = 0 \tag{8}$$

pour l'existence d'une solution de l'équation (7):

$$x = \tfrac{1}{2}x_0 + x^- \qquad (x^- \in X^- \text{ est arbitraire}).$$

Inversement, s'il existe une solution x de l'équation (7), alors

$$(I-S)x_0 = (I-S)(I+S)x = (I^2-S^2)x = 0,$$

donc la condition (8) est aussi nécessaire.

2) $\lambda = -1$. Par analogie, nous trouvons que la solution

$$x = \tfrac{1}{2}x_0 + x^+ \qquad (x^+ \in X^+ \text{ est arbitraire}) \tag{9}$$

de l'équation $(I-S)x = x_0$ existe sous la condition nécessaire et suffisante

$$(I+S)x_0 = 0. \tag{10}$$

3) $\lambda \neq \pm 1$. Alors

$$(I-\lambda S)x_0 = (I-\lambda S)(I+\lambda S)x = (1-\lambda^2)x,$$

donc la solution de l'équation (6)

$$x = \frac{1}{1-\lambda^2}(I-\lambda S)x_0$$

existe pour x_0 arbitraire.

Remarquons que

(11) $$X = X^+ \oplus X^-$$

(où $Y \oplus Z$ désigne la *somme directe* des espaces Y et Z, c.-à-d. l'ensemble de tous les éléments de la forme $y+z$, où $y \in Y$, $z \in Z$). En outre, d'après le théorème 1, l'opération S admet deux valeurs propres: $+1$ et -1, qui coïncident avec les espaces X^+ et X^-. Donc le théorème 1 joue le rôle de théorème *spectral* pour l'opération S.

2. Involution dans les espaces unitaires. Supposons maintenant que X soit un espace *unitaire* (c.-à-d. un espace linéaire sur le corps des nombres complexes muni du produit scalaire). Soit le produit scalaire (x, y) dans l'espace X. Posons

(12) $$(x, y)_S = (x, y) + (Sx, Sy).$$

La forme bilinéaire $(x, y)_S$ représente un *nouveau* produit scalaire, si l'on observe que, pour x, y, z arbitraires, nous avons

$$(x, y)_S = \overline{(y, x)_S},$$

$$(\lambda x, y)_S = \lambda(x, y)_S,$$

$$(x+z, y)_S = (x, y)_S + (z, y)_S,$$

$$(x, x)_S > 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (x, x)_S = 0 \text{ pour } x = 0$$

($\bar{a}$ désigne le nombre complexe conjugué au nombre a).

Désignons par X_S l'espace X avec le produit scalaire $(x, y)_S$.

THÉORÈME 2. *Les espaces X_S^+ et X_S^- (qui coïncident avec les valeurs propres $+1$ et -1 de l'opérations S) sont orthogonaux dans l'espace X_S.*

Démonstration. Soient $x \in X_S^+$ et $y \in X_S^-$ arbitraires. D'après la définition $Sx = x$ et $Sy = -y$, donc

$$(x, y)_S = (x, y) + (Sx, Sy) = (x, y) + (x, -y) = (x, 0) = 0,$$

c. q. f. d.

Alors nous avons

(13) $$X_S = X_S^+ \oplus X_S^- \qquad \text{et} \qquad X_S^+ \perp X_S^-.$$

L'opération S dans l'espace X_S admet les propriétés suivantes:

PROPRIÉTÉ 1. *S est une opération unitaire.*

En effet, nous avons

(14) $$(Sx, Sy)_S = (Sx, Sy) + (S^2x, S^2y) = (Sx, Sy) + (x, y) = (x, y)_S.$$

PROPRIÉTÉ 2. *S est une opération auto-adjointe.*

D'après la propriété 1, nous avons

(15) $$(Sx, y)_S = (Sx, S^2y)_S = (x, Sy)_S.$$

Réciproquement, nous avons:

THÉORÈME 3. *Si l'opération S, unitaire et auto-adjointe transforme l'espace X en lui-même, elle est une involution.*

Démonstration. Par hypothèse nous avons maintenant $(S^2x, y) = (Sx, Sy) = (x, y)$, d'où résulte l'égalité proposée: $S^2 = I$.

PROPRIÉTÉ 3. *S est une isométrie.*

PROPRIÉTÉ 4. *L'opération S admet une norme $\| \|_S$ égale à l'unité:*

(17) $$\|S\|_S = 1.$$

THÉORÈME 4. *Les espaces X^+ et X^- sont orthogonaux sous la condition nécessaire et suffisante*

(18) $$\|S\| = 1.$$

Démonstration. 1° Soit $X^+ \perp X^-$. Alors pour x arbitraire

$$(x^+, x^-) = (x^-, x^+) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\|Sx\|^2 = (Sx, Sx) &= (Sx^+ + Sx^-, Sx^+ + Sx^-) \\ &= (x^+ - x^-, x^+ - x^-) = (x^+, x^+) + (x^-, x^-) \\ &= (x^+ + x^-, x^+ + x^-) = (x, x) = \|x\|^2,\end{aligned}$$

d'où l'égalité (18).

2° Soit $\|S\| = 1$. Remarquons que $S^2 = I$, donc

$$\|x\| = \|S^2x\| \leqslant \|Sx\| \cdot \|S\| = \|Sx\| \leqslant \|x\| \cdot \|S\| = \|x\|,$$

par conséquent l'opération S est une isométrie: $\|Sx\| = \|x\|$.

Soit un element arbitraire $x = x^+ + x^-$, de projections non nulles:

$$0 \neq x^+ \in X^+; \qquad 0 \neq x^- \in X^-.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}0 = \|Sx\|^2 - \|x\|^2 = (Sx, Sx) - (x, x) &= (x^+ - x^-, x^+ - x^-) - (x^+ + x^-, x^+ + x^-) \\ &= -2[(x^+, x^-) + (x^-, x^+)] = -2[(x^+, x^-) + \overline{(x^+, x^-)}] \\ &= -4\,\mathrm{re}(x^+, x^-).\end{aligned}$$

En posant $(x^+, x^-) = a + ib$, nous avons donc $a = 0$ et $(x^+, x^-) = ib$.

Supposons que $b \neq 0$. L'élément x étant arbitraire, nous pouvons considérer un élément $y = y^+ + y^-$ tel que $y^+ = ix^+$, $y^- = x^-$ et on a aussi nécessairement $\operatorname{re}(y^+, y^-) = 0$. Mais

$$(y^+, y^-) = (ix^+, x^-) = i(x^+, x^-) = i \cdot ib = -b$$

et

$$\operatorname{re}(y^+, y^-) \neq 0,$$

d'où contradiction. Donc $b = 0$ et

$$(x^+, x^-) = (x^-, x^+) = 0 \quad \text{pour } x \text{ arbitraire.} \tag{19}$$

Soient $x^+ \epsilon X^+$, $y^- \epsilon X^-$ arbitraires. Si nous admettons $u = x^+ + y^-$, nous aurons, d'après (19), $(x^+, y^-) = (u^+, u^-) = 0$ et les espaces X^+ et X^- sont orthogonaux, c. q. f. d.

3 (*). Les équations involutives et le problème de décomposition. Étudions maintenant deux formes d'équations avec l'involution S:

$$(A+BS)x = x_0, \tag{20}$$

$$(A-SB)y = y_0, \tag{21}$$

où $x_0, y_0 \epsilon X$ étant données, X est un espace linéaire, A et B sont des opérations linéaires qui transforment X en X.

Les équations (20) et (21) nous appellerons *équations involutives*.

THÉORÈME 5. *Si $B = A$ ou $B = -A$ et si l'opération A admet une opération inverse A^{-1}, les équations* (20), (21) *admettent les solutions*:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}A^{-1}x_0 + x_1^- \\ x = \frac{1}{2}A^{-1}x_0 + x_1^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{sous la condition néces-} \\ \textit{saire et suffisante} \end{array} \left\{\begin{array}{ll} (I-S)A^{-1}x_0 = 0, & \textit{si } B = A \\ (I+S)A^{-1}x_0 = 0, & \textit{si } B = -A \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}A^{-1}(y_0 + y_1^+) \\ y = \frac{1}{2}A^{-1}(y_0 + y_1^-) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{sous la condition néces-} \\ \textit{saire et suffisante} \end{array} \left\{\begin{array}{ll} (I+S)y_0 = 0, & \textit{si } B = A \\ (I-S)y_0 = 0, & \textit{si } B = -A \end{array}\right.$$

$x_1^+, y_1^+ \epsilon X^-$, $x_1^-, y_1^- \epsilon X^-$ *sont arbitraires.*

Démonstration. Nous obtenons la conclusion du théorème 5, en substituant dans l'équation (20) $x_0 = Ax_0'$, dans l'équation (21) $Ay = y'$ et en appliquant le théorème 1.

Soient deux opérations A, B linéaires, commutatives (c'est-à-dire $AB = BA$) et telles que les opérations $(A+B)^{-1}$, $(A-B)^{-1}$ inverses des opérations $(A+B)$, $(A-B)$ existent. Donc nous pouvons écrire pour l'équation (20):

$$(A+BS)x = (A+BS)(x^+ + x^-) = (A+B)x^+ + (A-B)x^-.$$

En substituant $x = Su$, nous avons

$$u = Sx, \quad u^+ = Sx^+ = x^+, \quad u^- = Sx^- = -x^-$$

et nous obtenons une égalité *équivalente* à l'équation (20):

$$(A+B)u^+ - (A-B)u^- = x_0. \tag{22}$$

Nous dirons que l'élément $u \epsilon X$ est une *solution du problème de décomposition*, si u^+, u^- vérifient la condition linéaire

$$Cu^+ - Du^- = u_0, \tag{23}$$

C, D étant des opérations linéaires commutatives données, admettant des opérations inverses, $u_0 \epsilon X$ est donné.

Nous appellerons problème de décomposition *associé* au problème (23), le problème donné par la condition:

$$Du^+ - Cu^- = u_1 \tag{24}$$

u_1 étant donné.

Il est évident que le problème associé au problème associé est le problème *donné*. Ensuite nous démontrerons que l'équation (21) conduit au problème *associé* au problème (22) pour l'équation (20).

Si le problème (22) admet une solution u, alors l'équation (20) admet une solution $x = Su$.

Inversement, si l'équation (20) admet une solution x, alors le problème de la décomposition (22) admet une solution $u = Sx$.

L'équation (21) conduit au problème de décomposition d'une manière plus compliquée. En transformant cette équation à l'aide de l'opération S: $S(A-SB)y = Sy_0$, nous obtenons l'équation

$$(-B+SA)y = Sy_0. \tag{25}$$

En ajoutant et en soustrayant les équations (21) et (25), nous obtenons les équations suivantes:

$$(I+S)(A-B)y = (I+S)y_0, \tag{26}$$

$$(I-S)(A+B)y = (I-S)y_0. \tag{27}$$

D'après le théorème 1, nous avons

$$(A-B)y = \tfrac{1}{2}(I+S)y_0 + w^-, \qquad (A+B)y = \tfrac{1}{2}(I-S)y_0 + w^+$$

($w^+ \epsilon X^+$, $w^- \epsilon X^-$ sont arbitraires) pour y_0 arbitraire, si l'on observe que

$$(I-S)(I+S)y_0 = (I+S)(I-S)y_0 = (I^2 - S^2)y_0 = 0.$$

En posant $w = w^+ + w^-$ nous avons $w^+ = \frac{1}{2}(I+S)w$, $w^- = \frac{1}{2}(I-S)w$, d'où

$$\begin{aligned} (A-B)y &= \tfrac{1}{2}(I+S)y_0 + \tfrac{1}{2}(I-S)w, \\ (A+B)y &= \tfrac{1}{2}(I-S)y_0 + \tfrac{1}{2}(I+S)w. \end{aligned} \tag{28}$$

En transformant ces équations, la première à l'aide de l'opération $(A+B)$, la seconde à l'aide de l'opération $(A-B)$, nous avons

(29)
$$\begin{aligned}(A^2-B^2)y &= \tfrac{1}{2}(A+B)[(I+S)y_0+(I-S)w],\\ (A^2-B^2)y &= \tfrac{1}{2}(A-B)[(I-S)y_0+(I+S)w].\end{aligned}$$

Les seconds membres doivent êtres égaux, nous avons donc

$$\tfrac{1}{2}(A+B)[(I+S)y_0+(I-S)w] = \tfrac{1}{2}(A-B)[(I-S)y_0+(I+S)w],$$

d'où l'égalité

$$[(A+B)(I-S)-(A-B)(I+S)]w = [(A-B)(I-S)-(A+B)(I+S)]y_0$$

ou, en réduisant les termes semblables,

$$(B-AS)w = (-B-AS)y_0.$$

Mais nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}B-AS &= BS^2-AS = (BS-A)S = -(A-BS)S,\\ -B+AS &= -(A+BS)S,\end{aligned}$$

d'où l'équation

(30)
$$(A-BS)Sw = (A+BS)Sy_0.$$

Donc pour que l'équation (21) ait une solution il suffit qu'il existe un élément w, satisfaisant à l'équation (30). Si cette condition est vérifiée, nous obtenons (en ajoutant les équations (29)) la solution

$$\begin{aligned}2(A^2-B^2)y &= \tfrac{1}{2}[(A+B)(I+S)+(A-B)(I-S)]y_0+\\ &\quad+\tfrac{1}{2}[(A+B)(I-S)+(A-B)(I+S)]w\\ &= (A+BS)y_0+(A-BS)w,\end{aligned}$$

d'où finalement

(31)
$$y = \tfrac{1}{2}(A^2-B^2)^{-1}[(A+BS)y_0+(A-BS)w].$$

On peut ramener l'équation (30) au problème de décomposition, en écrivant

$$\begin{aligned}(A-BS)Sw &= (A-BS)S(w^++w^-) = (A-BS)(w^+-w^-)\\ &= (A-B)w^+-(A+B)w^-.\end{aligned}$$

En posant

(32)
$$w_0 = (A+BS)Sy_0$$

nous obtenons le problème suivant

(33)
$$(A-B)w^+-(A+B)w^- = w_0$$

associé au problème (22).

En outre, si y est donné par la formule (31), nous pouvons calculer w. En effet, d'après les formules (30), (31) et (32) nous avons les deux égalités

$$(A-BS)Sw = w_0, \qquad (A-BS)w = w_1,$$

où l'élément w_0 est donnée par la formule (32), l'élément w_1 par la formule suivante:

$$w_1 = 2(A^2-B^2)y-(A+BS)y_0.$$

Nous avons ensuite

(34)
$$(A-BS)(w^+-w^-) = w_0, \qquad (A-BS)(w^++w^-) = w_1.$$

En ajoutant et en soustrayant les équations (34), nous obtenons

$$(A-BS)w^+ = \tfrac{1}{2}(w_1+w_0), \qquad (A-BS)w^- = \tfrac{1}{2}(w_1-w_0)$$

et finalement

(35)
$$\begin{aligned}w &= \tfrac{1}{2}(A-B)^{-1}(w_1+w_0)+\tfrac{1}{2}(A+B)^{-1}(w_1-w_0)\\ &= \tfrac{1}{2}(A^2-B^2)^{-1}[(A+B)(w_1+w_0)+(A-B)(w_1-w_0)]\\ &= (A^2-B^2)^{-1}[Aw_1+Bw_0]\\ &= (A^2-B^2)^{-1}\{A[2(A^2-B^2)y-(A+BS)y_0]+B(A+BS)Sy_0\}\\ &= (A^2-B^2)^{-1}[2A(A^2-B^2)y+(A^2-ABS+BAS+B^2)y_0]\\ &= (A^2-B^2)^{-1}[2A(A^2-B^2)y-(A^2-B^2)y_0]\\ &= 2Ay-y_0,\end{aligned}$$

si l'on observe que $AB = BA$.

Nous pouvons écrire les formules analogues aux formules (31), (30), (35) pour l'équation (20), mais sous l'hypothèse supplémentaire qu'il existe une operation B^{-1} inverse de l'opération B. Dans ce cas nous pouvons écrire l'équation $(A+BS)x = x_0$ de la façon suivante:

$$B(B^{-1}A+S)x = x_0,$$

d'où, en posant

(36)
$$A' = B^{-1}A, \quad B' = -I, \quad x_0' = B^{-1}x_0,$$

l'équation équivalente à l'équation (20) devient:

(37)
$$(A'-SB')x = x_0'.$$

D'après les considérations précédentes, nous obtenons une solution

(38)
$$x = \tfrac{1}{2}(A'^2-B'^2)^{-1}[(A'+B'S)x_0'+(A'-B'S)w']$$

s'il existe un élément w' tel que l'équation suivante soit satisfaite:

(39)
$$(A'-B'S)Sw' = (A'+B'S)Sx_0'.$$

Mais, d'après (36), nous pouvons écrire la solution sous la forme

$$(40)\qquad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(B^{-2}A^2-I^2)^{-1}[(B^{-1}A-S)x_0'+(B^{-1}A+S)w'] \\ &= \tfrac{1}{2}B^2(A^2-B^2)^{-1}[(A-SB)B^{-1}x_0'+(A+SB)B^{-1}w'] \\ &= \tfrac{1}{2}B^2(A^2-B^2)^{-1}[(A-SB)B^{-2}x_0+(A+SB)B^{-2}t], \end{aligned}$$

où

$$(41)\qquad t = Bw'.$$

La condition (39) peut s'écrire sous la forme

$$(B^{-1}A+S)Sw' = (B^{-1}A-S)Sx_0',$$

d'où

$$(42)\qquad (A+SB)B^{-1}SB^{-1}t = (A-SB)B^{-1}SB^{-1}x_0.$$

Nous voyons ainsi que la solution de l'équation (20)

$$(43)\qquad x = \tfrac{1}{2}B^2(A^2-B^2)^{-1}[(A-SB)B^{-2}x_0+(A+SB)B^{-2}t]$$

existe, si t satisfait à l'équation (42).

Inversement, si x est donné par la formule (43), alors nous pouvons exprimer w' sous la forme

$$(44)\qquad w = 2A'x-x_0' = 2B^{-1}Ax-B^{-1}x_0 = B^{-1}(2Ax-x_0),$$

d'où

$$(45)\qquad t = 2Ax-x_0.$$

Donc les formules (42), (43), (45) jouent pour l'équation (20) le même rôle que les formules (30), (31), (35) pour l'équation (21), sous l'hypothèse supplémentaire que l'opération B admette une opération inverse.

On peut facilement résoudre le problème de décomposition (23) dans un cas particulier, notamment pour les opérations C et D qui ont les propriétés suivantes:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} CX^+\subset X^+, \\ DX^-\subset X^-, \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} CX^-\subset X^-, \\ DX^+\subset X^+. \end{cases}$$

Dans le cas (I) l'égalité (23) est équivalente aux deux égalités

$$Cu^+ = u_0^+, \qquad -Du^- = u_0^-,$$

d'où la solution:

$$u = u^+ + u^- = C^{-1}u_0^+ - D^{+1}u_0^- = C^{-1}D^{-1}(Du_0^+ - Cu_0^-).$$

En outre, le problème associé (24) aura la solution suivante (sous la condition (II)):

$$u = C^{-1}D^{-1}(Cu_1^+ - Du_1^-).$$

Par exemple, le problème (22) sous la condition (I), aura la solution suivante:

$$\begin{aligned} u &= (A^2-B^2)^{-1}[(A-B)x_0^+ - (A+B)x_0^-] \\ &= (A^2-B^2)^{-1}(-B+AS)x_0 \\ &= (A^2-B^2)^{-1}(A-BS)Sx_0, \end{aligned}$$

d'où la solution de l'équation (20):

$$x = Su = S(A^2-B^2)^{-1}(A-BS)Sx_0.$$

Le problème (33) aura, sous la condition (II), la solution suivante:

$$\begin{aligned} w &= (A^2-B^2)^{-1}[(A+B)w_0^+ - (A-B)w_0^-] \\ &= (A^2-B^2)^{-1}+\tfrac{1}{2}[(A+B)(I+S)-(A-B)(I-S)](A+BS)Sy_0 \\ &= (A^2-B^2)^{-1}(B+AS)(A+BS)Sy_0 \\ &= (A^2-B^2)^{-1}(A+BS)S(A+BS)Sy_0, \end{aligned}$$

d'où l'on obtient une nouvelle formule pour la solution de l'équation (21):

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}(A^2-B^2)^{-1}\{(A+BS)y_0+(A-BS)(A^2-B^2)^{-1}[(A+BS)S]^2y_0\} \\ &= \tfrac{1}{2}(A^2-B^2)^{-1}\{(A+BS)+(A-BS)(A^2-B^2)^{-1}[(A+BS)S]^2\}y_0. \end{aligned}$$

4(*). Les conditions suffisantes. En s'appuyant sur les considérations précédentes on peut formuler les théorèmes suivants:

THÉORÈME 6. *Si les opérations A, B, linéaires et commutatives, admettent des opérations inverses aux opérations $A+B$, $A-B$, l'équation* (21), $(A-SB)y = y_0$, *admet pour chaque y_0 une solution*

$$(46)\qquad y = \tfrac{1}{2}(A^2-B^2)^{-1}[(A+BS)+(A-BS)S(A-BS)^{-1}(A+BS)S]y_0$$

sous la condition suffisante que l'opération

$$(47)\qquad A-BS$$

admette une opération inverse $(A-BS)^{-1}$.

Démonstration. D'après la formule (30), (31), l'équation (21) admet une solution, s'il existe un élément w tel que

$$(A-BS)Sw = (A+BS)Sy_0.$$

Mais, d'après l'hypothèse (47), l'opération $(A-BS)$ admet une opération inverse, d'où

$$Sw = (A-BS)^{-1}(A+BS)Sy_0$$

et

$$w = S(A-BS)^{-1}(A+BS)Sy_0.$$

Donc, d'après (31), la solution existe pour tout y_0 et elle a la forme (46), c. q. f. d.

Par analogie nous obtenons, d'après (40), (42):

THÉORÈME 7. *Si les opérations A, B linéaires et commutatives, admettent des opérations inverses aux opérations $A+B$, $A-B$, si en outre l'opération B admet une opération inverse B^{-1}, alors l'équation* (20), $(A+BS)x = x_0$, *admet pour tout x_0 une solution*

$$x = \tfrac{1}{2}B^2(A^2-B^2)^{-1}[(A-SB)B^{-2}+ + (A+SB)B^{-1}SB^{-1}(A+SB)^{-1}(A-SB)B^{-1}SB^{-1}]x_0 \tag{48}$$

sous la condition suffisante que l'opération

$$A+SB \tag{49}$$

admette une opération inverse $(A+SB)^{-1}$.

5(*). Les conditions nécéssaires. Soit dans l'espace X une forme bilinéaire $\langle x, y\rangle$ ayant les propriétés suivantes:

Pour $x, y, z \in X$ arbitraires

$$\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle, \tag{1}$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad (\lambda \text{ est un nombre complexe}), \tag{2}$$

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \tag{3}$$

$$\langle x^+, y^+\rangle = 0;\ \langle x^-, y^-\rangle = 0. \tag{4}$$

Nous appellerons cette forme *pseudo-produit scalaire*. Si $\langle x, y\rangle = 0$, nous dirons que les éléments x, y sont *pseudo-orthogonaux*. Si $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ (pour tout $x, y \in X$), nous dirons que les opérations A et B sont *pseudo-adjointes*.

Remarquons ensuite que (d'après la propriété (4)) la forme $\langle x, y\rangle$ *dépend* de l'involution S.

THÉORÈME 8. *L'opération $-S$ est pseudo-adjointe à l'opération S:*

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, -S\rangle \tag{50}$$

pour $x, y \in X$ arbitraires.

Démonstration. D'après la propriété (4), nous avons

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= \langle Sx^+ + Sx^-, y\rangle = \langle x^+ - x^-, y\rangle = \langle x^+, y\rangle - \langle x^-, y\rangle \\ &= \langle x^+, y^+\rangle + \langle x^+, y^-\rangle - \langle x^-, y^+\rangle - \langle x^-, y^-\rangle = \langle x^+, y^-\rangle - \langle x^-, y^+\rangle \\ &= -[\langle y^+, x^-\rangle - \langle y^-, x^+\rangle] = -\langle Sy, x\rangle = \langle x, -Sy\rangle,\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Soient les opérations A, B *pseudo-autoadjointes*, c'est-à-dire satisfaisant aux égalités:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \qquad \langle Bx, y\rangle = \langle x, By\rangle$$

pour $x, y \in X$ arbitraires.

THÉORÈME 9. *Si les opérations A, B sont pseudo-autoadjointes, les opérations $A+BS$ et $A-BS$ le sont aussi:*

$$\langle (A+BS)x, y\rangle = \langle x, (A-SB)y\rangle$$

pour x, y arbitraires.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\langle (A+BS)x, y\rangle &= \langle Ax, y\rangle + \langle BSx, y\rangle = \langle x, Ay\rangle + \langle Sx, By\rangle \\ &= \langle x, Ay\rangle + \langle x, -SBy\rangle = \langle x, (A-SB)y\rangle.\end{aligned}$$

THÉORÈME 10. *Si les opérations A, B sont pseudo-autoadjointes, la condition nécessaire d'existence d'une solution de l'équation* (20) (*ou* (21))

$$(A+BS)x = x_0 \qquad (ou\ (A-SB)y = y_0)$$

est la pseudo-orthogonalité de l'élément x_0 (ou y_0) à chaque solution d'équation pseudo-adjointe homogène:

$$(A-SB)y = 0 \qquad (ou\ (A+BS)x = 0).$$

Démonstration. Soit y une solution arbitraire de l'équation homogène: $(A-SB)y = 0$.

Si l'équation $(A+BS)x = x_0$ admet une solution x, alors, d'après le théorème 9, nous avons:

$$\langle x_0, y\rangle = \langle (A+BS)x, y\rangle = \langle x, (A-SB)y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0,$$

donc la condition est nécessaire. La deuxième partie de la conclusion s'établit par analogie.

Remarquons que la condition

$$\langle x_0, y\rangle = 0 \tag{53}$$

n'est, en général pas suffisante. Par exemple, si $\langle x, y\rangle \equiv 0$, cette condition est toujours satisfaite, alors que l'équation (20) peut ne pas avoir de solutions.

Considérons encore une fois les opérations:

$$A+BS, \quad A-SB, \quad A+SB, \quad A-BS.$$

Nous avons démontré (dans le théorème 6) que les opérations

$$A-SB, \quad A-BS \tag{54}$$

ou bien admettent toutes deux des opérations inverses, ou bien n'en admettent pas. En substituant $-B$ au lieu de B nous obtenons ce résultat pour les opérations

$$A+BS, \quad A+SB. \tag{55}$$

D'autre part, chaque opération (54) admet une opération pseudoadjointe, respectivement $A+BS$, $A+SB$ donc les opérations (55). En outre, les opérations (54) conduisent au même problème de décomposition (ce qu'on peut facilement constater) et les opérations (55) au problème associé au précédent. Donc, on peut dire que le couple d'opérations $[A+BS, A+$ $+SB]$ est pseudo-adjoint au couple $[A-SB, A-BS]$ et que les composantes d'un couple ne diffèrent pas essentiellement. Evidemment, pour l'opération B commutative avec l'involution S:

$$SB = BS, \tag{56}$$

les composantes d'un couple sont *identiques*. Mais, en général, l'égalité (56) n'est pas vraie et il faut considérer, outre l'opération $A+BS$, aussi l'opération $A+SB$. Remarquons que l'on peut écrire

$$A+BS = A+SB+(BS-SB),$$

où la composante $BS-SB$ n'a pas d'influence sur l'existence d'une solution de l'équation considérée.

6. Régularisation d'une équation involutive. Théorèmes fondamentaux. Soit X un espace de Banach (c'est-à-dire un espace linéaire sur le corps des nombres complexes, normé et complet). Soit X^* l'espace adjoint à l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans X. Soit une opération linéaire T qui transforme l'espace X en lui-même. Considérons les équations suivantes:

(1) $\quad (I+T)x = 0, \qquad$ (1*) $\quad (I+T)^*x^* = 0,$

(1') $\quad (I+T)x = x_0, \qquad$ (1'*) $\quad (I+T)^*x^* = x_0^*,$

où $x, x_0 \in X$, $x^*, x_0^* \in X^*$. T^* est une opération linéaire, adjointe à l'opération donnée T.

On appelle T *opération de Fredholm*, si T vérifie les trois théorèmes suivants:

(a) *Le nombre des solutions linéaires indépendantes de l'équation* (1) *est fini.*

(b) *Les équations* (1) *et* (1*) *ont le même nombre de solutions linéaires indépendantes.*

(c) *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1') (*resp.* (1'*)) *ait une solution, est la suivante*:

$$x_i^*(x_0) = 0 \quad (resp.\ x_0^*(x_i)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

où x_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ désignent toutes les fonctionnelles linéaires indépendantes qui sont les solutions de l'équation adjointe homogène (1) (*resp.* x_i *désignent toutes les solutions linéaires indépendantes de l'équation* (1)).

On sait que l'opération adjointe à une opération de Fredholm est aussi une opération de Fredholm.

Soit $\mathfrak{X}$ l'anneau de toutes les opérations linéaires sur l'espace X et $J \subset \mathfrak{X}$ un certain idéal des opérations de Fredholm, c'est-à-dire un ensemble qui satisfait aux deux conditions:

(i) Si $T \in J$, alors T est une opération de Fredholm.

(ii) Si $T_0 \in \mathfrak{X}$, $T_1, T_2 \in J$, alors $\alpha T_1 + \beta T_2 \in J$, $T_1T_2 \in J$, $T_0T_1 \in J$, $T_1T_0 \in J$ $(\alpha, \beta$ désignent des nombres complexes arbitraires).

Nous appellerons T *opération régulière*, s'il existe un idéal $J \subset \mathfrak{X}$ des opérations de Fredholm tel que $T \in J$ [1].

Si T est une opération régulière, l'opération adjointe T^* est aussi régulière. En effet, en désignant par J^* l'ensemble de toutes les opérations T^* qui sont adjointes à $T \in J$, nous avons $(T_0 \in \mathfrak{X}, T_1, T_2 \in J)$

$$\alpha T_1^* + \beta T_2^* = (\bar{\alpha}T_1 + \bar{\beta}T_2)^* \in J^*,$$

$$T_1^*T_2^* = (T_2T_1)^* \in J^*, \quad T_0^*T_1^* = (T_1T_0)^* \in J^*,$$

donc J^* est un idéal des opérations de Fredholm.

Evidemment, toute involution S n'est pas régulière, mais d'après la propriété (ii), pour tout $T \in J$ on a

$$ST \in J, \quad TS \in J.$$

Remarquons ensuite que l'opération S^*, adjointe à l'involution S, est aussi une involution, puisque

$$(S^*)^2 = (S^2)^* = I^* = I.$$

Considérons une opération *involutive*:

$$K = A+BS+T \tag{57}$$

où $T \in I$, A, B satisfont aux conditions suivantes:

$$SA-AS \in J, \quad SB-BS \in J. \tag{58}$$

Il suffit de considérer les opérations de la forme (57) d'après l'égalité suivante:

$$SB = BS+(SB-BS), \tag{59}$$

[1] On ne sait pas si l'ensemble de toutes les opérations de Fredholm est un idéal.

d'où

(60) $$K = A+BS+T = A+SB+T_1,$$

où $T \in J$, $T_1 = T-(SB-BS) \in J$.

Si les opérations $A+B$ et $A-B$ admettent des opérations inverses et les conditions (58) sont satisfaites, nous appellerons l'opération K — *opération normale.*

Dans la suite nous allons considérer seulement les opérations K normales. Remarquons que

(61) $$(SA-AS)^* = A^*S^*-S^*A^* \in J^*$$

si $SA-AS \in J$. Donc, si l'opération K est normale, l'opération adjointe $K^* = A^*+S^*B^*+T^*$ est aussi normale.

Posons:

(62) $$S = A+B, \quad D = A-B.$$

THÉORÈME 11. *Si les opérations* $K_1 = A_1+B_1S+T_1$ *et* $K_2 = A_2+B_2S+T_2$ *sont normales, leur superposition* $K_3 = K_1K_2$ *est aussi normale et*

(63) $$\begin{cases} A_3 = A_1A_2+B_1B_2, \\ B_3 = A_1B_2+B_1B_2, \end{cases}$$

(64) $$\begin{cases} S_3 = S_1S_2, \\ D_3 = D_1D_2 \end{cases} \quad (S_i = A_i+B_i,\ D_i = A_i-B_i;\ i = 1, 2, 3).$$

Démonstration. Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} K_3 = K_1K_2 &= (A_1+B_1S+T_1)(A_2+B_2S+T_2) \\ &= A_1A_2+A_1B_2S+A_1T_2+B_1SA_2+B_1SB_2S+B_1ST_2+T_1A_2+ \\ &\quad +T_1B_2S+T_1T_2 \\ &= A_1A_2+B_1B_2+(A_1B_2+B_1A_2)S-B_1B_2-B_1A_2S+B_1SA_2+ \\ &\quad +B_1SB_2S+B_1ST_2+T_1A_2+A_1T_2+T_1B_2S+T_1T_2 \\ &= A_3+B_3S+T_3, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} T_3 &= B_1(SA_2-A_2S)+B_1(SB_2S-B_2)+B_1ST_2+T_1B_2S+T_1T_2+ \\ &\quad +A_1T_2+T_1A_2 \\ &= B_1(SA_2-A_2S)+B_1(SB_2-B_2S)S+B_1ST_2+T_1B_2S+ \\ &\quad +T_1A_2+A_1T_2+T_1T_2 \end{aligned}$$

et, en vertu des hypothèses et de la propriété (i), $T_3 \in J$.

En outre

$$\begin{aligned} S_3 = A_3+B_3 &= A_1A_2+B_1B_2+A_1B_2+B_1A_2 \\ &= (A_1+B_1)(A_2+B_2) = S_1S_2, \\ D_3 = A_3-B_3 &= A_1A_2+B_1B_2-A_1B_2-B_1A_2 \\ &= (A_1-B_1)(A_2-B_2) = D_1D_2. \end{aligned}$$

Les opérations K_1 et K_2 sont normales, donc les opérations inverses existent:

$$S_i^{-1} = (A_i+B_i)^{-1}, \quad D_i^{-1} = (A_i-B_i)^{-1} \quad (i = 1, 2),$$

d'où résulte l'existence des opérations inverses:

$$S_3^{-1} = S_2^{-1}S_1^{-1}, \quad D_3^{-1} = D_2^{-1}D_1^{-1}$$

et l'opération K_3 est aussi normale.

Nous appellerons l'opération normale

$$K_g = A_g+B_gS+T_g$$

régularisateur gauche de l'opération normale K, si pour leur superposition $K'_g = K_gK = A'_g+B'_gS+T'_g$ on a

(65) $$B'_g = B_gA+A_gB = 0.$$

Par analogie, l'opération normale $K_d = A_d+B_dS+T_d$ est un *régularisateur droit* de l'opération K, si pour $K'_d = KK_d = A'_d+B'_dS+T'_d$ on a

(66) $$B'_d = AB_d+BA_d = 0.$$

Si les opérations A, B sont commutatives, nous obtenons évidemment les régularisateurs en substituant:

(67) $$B_d = B_g = -B, \quad A_d = A_g = A,$$

d'où

(68) $$K_d = K_g = A-BS+T_1, \quad T_1 \in J,$$

ou bien

(68') $$K_d = K_g = A-SB+T_2,$$

où $T_2 = T_1+SB-BS \in J$.

Alors l'opération

(69) $$K_r = A-SB$$

(où A et B sont commutatives) sera dite *régularisateur simple* de l'opération normale K.

Corollaire 1. *Si pour les opérations A, B, on a $AB = BA$, l'opération normale $K = A+BS+T$ admet toujours un régularisateur simple $K_r = A-SB$.*

Théorème 12. *Le nombre k des solutions linéaires indépendantes de l'équation normale homogène*

$$Kx = 0 \tag{70}$$

est fini, si l'opération $K = A+BS+T$ est normale ($AB = BA$).

Démonstration. Soit K_r le régularisateur simple de l'opération K. Alors $K_rK = K_r' = (A^2-B^2)(I+T')$ où $T' \in J$ et l'équation homogène $K_r'x = 0$ admet un nombre fini k_r' des solutions linéaires indépendantes. Mais, si k désigne le nombre des solutions linéaires indépendantes de l'équation $Kx = 0$, nous avons évidemment $k \leqslant k_r'$, d'où la conclusion.

Théorème 13. *Sous les conditions du théorème 12, l'équation*

$$Kx = x_0 \tag{71}$$

($x_0 \in X$ est donné) admet une solution, si la condition nécessaire et suffisante suivante est satisfaite:

$$y_i^*(x_0) = 0, \tag{72}$$

où y_i^* ($i = 1, 2, \ldots, k^*$) désignent toutes les solutions linéaires indépendantes de l'équation homogène adjointe

$$K^*y^* = 0. \tag{73}$$

Démonstration. En régularisant l'équation (71), nous obtenons l'équation

$$K_r'x = K_rx_0, \tag{74}$$

où $K_r' = K_rK$. L'équation (74) admet une solution sous la condition nécessaire et suffisante que

$$z^*(K_rx_0) = 0, \tag{75}$$

où z^* est une solution arbitraire de l'équation $(K_r')^*z^* = 0$ adjointe à l'équation (74). Mais on a $(K_r')^* = (K_rK)^* = K^*K_r^*$, d'où, en posant $K_r^*z^* = y^*$, nous obtenons, d'après (75), la condition suivante:

$$0 = z^*(K_rx_0) = K_r^*z(x_0) = y^*(x_0),$$

où y^* désigne une solution arbitraire de l'équation (73). Il en résulte la conclusion du théorème, si nous désignons par k^* le nombre des solutions linéaires indépendantes de l'équation (73).

Théorème 14. *Sous les conditions du théorème 12, la différence $\varkappa = k-k^*$ du nombre k des solutions linéaires indépendantes de l'équation homogène*

$$Kx = 0 \tag{76}$$

et du nombre k^* des solutions linéaires indépendantes de l'équation homogène adjointe

$$K^*y^* = 0 \tag{77}$$

ne dépend que de A, B et S.

Démonstration. En régularisant les équations (76) et (77), nous obtenons les équations suivantes:

$$K_rKx = 0, \tag{78}$$

$$K^*K_r^*z^* = 0 \quad (y = K_r^*z^*), \tag{78'}$$

où $K_r = A-SB$ désigne un régularisateur simple. En désignant le nombre des solutions linéaires indépendantes de l'équation (78) par k_r' et de l'équation (78') par k_r'', nous avons évidemment

$$k_r' = k_r'' \tag{79}$$

($K_rK \in J$, $K_r^*K^* \in J^*$). Mais, d'après le théorème 12, nous avons

$$k_r' = k+a \quad (a \geqslant 0), \qquad k_r'' = k^*+b \quad (b \geqslant 0),$$

d'où, d'après (79), $k-k^* = b-a$.

Les nombres a, b sont déterminés par le régularisateur simple K_r, qui ne dépend que des opérations A, B et S. Il en résulte la conclusion du théorème 14.

7. Exemples des applications. I. Soit X l'espace des fonctions $f(t)$ bornées dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Soit une involution S déterminée par l'égalité:

$$Sf(t) = f(-t). \tag{80}$$

Nous aurons

$$f^+(t) = \frac{1}{2}(I+S)f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2},$$

$$f^-(t) = \frac{1}{2}(I-S)f(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

et la fonction $f^+(t)$ est *paire*: $f^+(t) = f^+(-t)$, la fonction $f^-(t)$ est impaire $f^-(-t) = -f^-(t)$. Donc l'espace X^+ se compose de toutes fonctions paires, l'espace X^+ — de toutes fonctions impaires et la décomposition connue d'une fonction $f(t)$ en une somme de fonctions, paire et impaire, correspond à la décomposition de l'espace X par l'involution (80).

II. Soit X l'espace des matrices carrées (a_{ik}) de rang n. Soit l'involution S suivante:

$$S(a_{ik}) = (a_{ki}),$$

c.-à-d. S est une *transposition* de la matrice (a_{ik}). Alors

$$(a_{ik})^+ = \tfrac{1}{2}(I+S)(a_{ik}) = \tfrac{1}{2}(a_{ik}+a_{ki}),$$
$$(a_{ik})^- = \tfrac{1}{2}(I-S)(a_{ik}) = \tfrac{1}{2}(a_{ik}-a_{ki}).$$

La matrice $(a_{ik})^+$ est *symétrique*, car $a_{ik}+a_{ki} = a_{ki}+a_{ik}$, la matrice $(a_{ik})^-$ est *antisymétrique*, car $a_{ki}-a_{ik} = -(a_{ik}-a_{ki})$. Donc la décomposition connue d'une matrice en somme de matrices symétrique et antisymétrique correspond à la décomposition de l'espace X par la transposition S.

III. Soit L un arc régulier et fermé de Jordan. Soit X l'espace des fonctions $f(t)$ complexes, vérifiant sur L la condition de Hölder:

(81) $$|f(t)-f(t_1)| \leqslant c|t-t_1|^\mu,$$

$0<\mu<1$ est fixé. Soit la transformation intégrale de Cauchy:

(82) $$Sf = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L-l_\varepsilon}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

où l_ε désigne la partie de l'arc L située à l'intérieur du cercle $|z-t|\leqslant\varepsilon$. On sait que cette transformation est une involution [8]. On peut facilement constater que X^+ est l'espace de toutes valeurs limites *intérieures* des fonctions holomorphes dans le plan de la variable complexe (sans l'arc L) et bornées à l'infini; X^- est l'espace de toutes valeurs limites *extérieures*. En effet, la fonction $f(t)$ est une fonction limite intérieure d'une fonction holomorphe sous la condition nécessaire et suffisante:

$$f(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = 0.$$

En écrivant cette condition sous la forme $(I-S)f=0$, nous obtenons

$$f^- = \tfrac{1}{2}(I-S)f = 0,\quad f^+ = \tfrac{1}{2}(I+S)f.$$

Par analogie nous obtenons pour les valeurs limites extérieures

$$f^+ = \tfrac{1}{2}(I+S)f = 0,\quad f^- = \tfrac{1}{2}(I-S)f.$$

Donc toute fonction $f(t)$ satisfaisant à la condition (81) peut être représentée sous la forme suivante:

(83) $$f(t) = f^+(t)+f^-(t)$$

où $f^+(t)$ est la valeur limite intérieure d'une fonction holomorphe, $f^-(t)$ la valeur limite extérieure. Dans ce cas le pseudo-produit scalaire a la forme

(84) $$\langle f,g\rangle = \int_L f(t)g(t)\,dt,$$

le produit scalaire est

(85) $$(f,g) = \int_L f(t)g(t)\,ds,$$

où ds désigne l'élément de longueur de l'arc L. Si les opérations A et B désignent une multiplication par les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ (qui vérifient la condition (81)), alors nous obtenons la théorie bien connue des équations intégrales singulières (voir [8] et [5]). Le problème de décomposition est alors le problème de Hilbert aux limites pour les fonctions holomorphes.

IV. Si L désigne l'ensemble de p arcs réguliers et fermés de Jordan, qui sont disjoints, et X l'espace des fonctions complexes qui satisfont à la condition (81), toutes les considérations de l'exemple III sont vraies.

V. Si L désigne un arc de Jordan, régulier et fermé à l'infini (voir [11]) et X est l'espace des fonctions complexes satisfaisant sur L aux conditions suivantes:

(86) $$|\lim_{t\to\infty} f(t)| < +\infty,$$

(87) $$|f(t)-f(t_1)| < c\left|\frac{1}{t-z_0}-\frac{1}{t_1-z_0}\right|^\mu$$

$(0<\mu<1$ est fixé, z_0 n'appartenant pas à L, est arbitraire), alors toutes les considérations de l'exemple III sont vraies.

VI. Si l'arc L n'admet pas de tangente continue aux points $c_1, c_2, \ldots, c_p$, ou aux points $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les fonctions données ne sont pas continues (par exemple, si en ces points $A^2-B^2=0$) on peut aussi appliquer considérations précédentes. W. Pogorzelski ([10], p. 598) a notamment démontré le théorème suivant:

Si L est une ligne fermée Jordan, composée d'arcs réguliers l_j, orientés d'accord avec l'orientation positive sur L et $c_1,\ldots,c_p$ désignent leurs points communs, si X désigne un espace $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les fonctions complexes $f(t)$ déterminées pour $t\neq c_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,p;\ t\in L)$, satisfaisant aux inégalités suivantes:

(88) $$|f(t)| \leqslant \frac{C_1}{\left[\prod_{\nu=1}^{p}|t-c_{2\nu-1}|\cdot|t-c_{2\nu}|\right]^\alpha},$$

(89) $$|f(t)-f(t_1)| \leqslant \frac{C_2|t-t_1|^\mu}{\left[\prod_{\nu=1}^{p}|t-c_{2\nu-1}|\cdot|t_1-c_{2\nu}|\right]^{\alpha+\mu}}$$

(où le point t_1 vient après t; $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$; $0<\mu<1-\alpha$; $\widehat{c_{2\nu-1}c_{2\nu}} = l_\nu$; C_1, C_2

sont des constantes positives), alors la transformation intégrale (82) est une involution ($t \neq c_\nu$).

Évidemment, dans ce cas, on peut appliquer toutes les considérations de l'exemple III. La supposition $\alpha < \frac{1}{2}$ n'est nécessaire que pour la détermination du produit scalaire (85) (et évidemment du produit (84)). Le théorème cité est vrai pour $\alpha < 1$.

VII. Soit X l'espace de toutes fonctions continues dans l'intervalle $[0, \infty]$ et satisfaisant à l'inégalité suivante:

$$\int_0^\infty f(t)t^{k-1}dt < +\infty \tag{90}$$

(le nombre naturel k est fixé). Soit une transformation intégrale:

$$Sf = \int_0^\infty f(t)t^{k-1}V_{(k-1)/2}(st)\,dt, \tag{91}$$

où $V_k(x) = J_k(x)/x^k$, $J_k(x)$ est une fonction de Bessel (de premier genre) de rang k. S. Bochner et Chandrasekharan ([2], p. 75) ont démontré que $Sf \epsilon X$ et $S(Sf) = f$, donc $S^2 = I$. En outre, si E_k désigne l'espace euclidien à k dimensions, Tf désigne la transformation de Fourier dans cet espace, si f est une fonction radiale, c'est-à-dire, pour $x = (x_1, \ldots, x_k)$,

$$f(x) = f(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}),$$

alors la transformation (91) est aussi une involution et nous avons, entre cette involution et la transformation de Fourier la relation:

$$S = (2\pi)^{-k/2}T.$$

Tous ces exemples se généralisent facilement pour les systèmes de fonctions et d'équations.

Travaux cités

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, New York 1932.

[2] S. Bochner and K. Chandrasekharan, *Fourier transforms*, Princeton 1949.

[3] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On singular integrals*, Amer. Jour. of Math. 78. 2 (1956), p. 289-309.

[4] — *Algebras on certain singular operators*, ibidem 78.2 (1956), p. 310-320.

[5] З. Н. Халилов, *Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце*, Мат. сборник 25 (67), 2 (1949), p. 169-188.

[6] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, Toronto-New York-London 1953; édition russe, Moscou 1956.

[7] K. Maurin, *Metody przestrzeni Hilberta*, Warszawa 1959.

[8] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen 1953.

[9] M. A. Наймарк, *Нормированные кольца*, Москва 1959.

[10] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinues dans la théorie des fonctions analytiques*, Journ. Math. Mech. (1960), p. 583-606.

[11] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur l'intégrale de Cauchy pour un arc fermé à l'infini*, Annales Pol. Math. 8 (1960), p. 155-171.

[12] Ю. И. Черский, *Общее сингулярное уравнение и уравнения типа свертки*, Мат. сборних 41. 3 (1957), p. 277-296.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Reçu par la Rédaction le 1. 4. 1960