STUDIA MATHEMATICA, T. XX. 1961

where

$$\vartheta_n\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \vartheta_{n,m}\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix}. \tag{67}$$

If every one-point subset of Γ has a positive measure, then $\delta(s,t)$ and consequently, also $\vartheta_{n,m}\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix}$, $\vartheta_n\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix}$ are functions, and the series (66) converges pointwise ($n = 1, 2, \ldots$).

References

T. Carleman [1] *Zur Theorie der linearen Integralgleichungen*, Math. Zeitschrift 9 (1921), p. 196-217.

I. Fredholm [1] *Sur une classe d'équations fonctionelles*, Acta Math. 27 (1903), p. 365-390.

A. Grothendieck [1] *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), p. 319-384.

— [2] *Produits tensoriels topologique et espaces nucléaires*, Memoires Amer. Math. Soc. 1955.

B. Fuglede and R. V. Kadison [1] *On determinants and a property of trace in finite factors*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951), p. 425-431.

— [2] *Determinant theory in finite factors*, Annals of Math. 55 (1952), p. 520-530.

D. Hilbert [1] *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen*, Leipzig 1912.

E. Hille and R. S. Phillips [1] *Functional analysis and semi-groups*, Providence 1957.

E. Hille and J. D. Tamarkin [1] *On the characteristic values of linear integral equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. 14 (1928), p. 911-914.

— [2] *On the characteristic values of linear integral equations*, Acta Math. 57 (1931), p. 1-76.

T. Leżański [1] *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 13 (1953), p. 244-276.

— [2] *Sur les fonctionelles multiplicatives*, Studia Math. 14 (1953), p. 13-23.

A. D. Michel and R. S. Martin [1] *Some expansions in vector space*, Journ. Math. Pures et Appl. 13 (1934), p. 69-91.

A. F. Ruston [1] *On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space*, Proc. London Math. Soc. (2) 53 (1951), p. 109-124.

— [2] *Direct products of Banach spaces and linear functional equations*, Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1951), p. 327-384.

R. Sikorski [1] *On Leżański's determinants of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 14 (1953), p. 24-48.

— [2] *On determinants of Leżański and Ruston*, ibidem 16 (1957), p. 99-112.

— [3] *Determinant systems*, ibidem 18 (1959), p. 161-186.

— [4] *Remarks on Leżański's determinants*, ibidem 20 (1961), p. 145-161.

— [5] *The determinant theory in Banach spaces*, Coll. Math. 8 (1961), p. 141-198.

F. Smithies [1] *The Fredholm theory of integral equations*, Duke Math. Journ. 8 (1941), p. 107-130.

— [2] *Integral equations*, Cambridge 1958.

Reçu par la Rédaction le 8. 10. 1960

Réfractions non-hilbertiennes d'une transformation symétrique bornée

par

G. L. KRABBE (Lafayette, Ind.)

1. Introduction. Dans tout ce qui suit, μ est une mesure sur un clan de parties d'un ensemble ω, et L^0 est l'ensemble des fonctions étagées μ-mesurables sur ω. Remarquons que L^0 est partout dense dans l'espace de Banach $\mathfrak{X}_r = \{x\colon \|x\|_{1/r} < 1 < \infty\}$, où

$$\|x\|_{1/r} = \Big(\int_{\omega} |x|^{1/r} d\mu\Big)^r;$$

nous supposerons désormais que $0 < r < 1$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des transformations symétriques bornées de l'espace hilbertien $\mathfrak{X}_{1/2}$. Posons $H \in \mathcal{H}$ et

$$|H|_r = \sup\{\|Hx\|_{1/r}\colon\ x \in L^0 \text{ et } \|x\|_{1/r} \leqslant 1\}.$$

Soit H^0 la restriction de H à L^0, et désignons par H_r le prolongement linéaire continu de H^0 à $\mathfrak{X}_r$; nous dirons que H_r est la „*réfraction*" de H. Précisons: H_r est l'unique prolongement de H^0 appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_r$ des endomorphismes continus de $\mathfrak{X}_r$. Il est clair que H possèdera une réfraction si et seulement si $|H|_r \neq \infty$.

Rappelons qu'il exist une bijection $H \to E^H$ de $\mathcal{H}$ sur l'ensemble des familles spectrales (cf. [13], pp. 174-176). Nous noterons $\mathcal{H}_i$ l'ensemble des transformations H appartenant à $\mathcal{H}$ telles que

$$\text{(i)} \qquad \infty \neq \sup_{\infty < \lambda < \infty} |E^H(\lambda)|_s \quad \textit{lorsque} \quad 0 < s < 1.$$

Nous supposerons désormais que $H \in \mathcal{H}_i$. On verra (au nº. 2.8) que H possède une réfraction H_r; en outre, H_r admet une décomposition spectrale (bien que H_r ne soit pas nécessairement un „spectral operator" dans le sens de N. Dunford: voir nº. 3.4 et § 5). La réfraction hérite de H d'autres propriétés spectrales (1). Par exemple, H_r possède un „calcul

(1) Il serait intéressant de déterminer quelles autres propriétés spectrales de H sont heritées par H_r. A ce propos, voir § 5.

functionnel": il existe une représentation $f \to f(H_r)$ dans l'algèbre $\mathcal{E}_r$, dont l'ensemble de définition $\mathcal{F}(H_r)$ est une algèbre qui contient toute fonction à variation bornée (2). D'ailleurs,

(ii) *si* $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k$ *est un polynôme, alors* $f(H_r) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (H_r)^k$.

Le calcul fonctionnel de H_r se rattache à celui de H:

si $f(H_{1/2}) \in \mathcal{H}_i$, *alors* $f(H_r)$ *est la réfraction de* $f(H_{1/2})$

(pourvu que $f \in \mathcal{F}(H_r)$: cf. n°. 3.2). La transformation $f(H_r)$ peut être représentée sous forme d'intégrale, et cela dans le sens de la convergence uniforme (n°. 2.3).

L'algèbre $\mathcal{F}(H_r)$ s'agrandit à mesure que l'indice r (de „l'espace réfractant" $\mathfrak{X}_r$) se rapproche de „l'indice hilbertien" $\frac{1}{2}$. Il n'est pas étonnant que le calcul fonctionnel $f \to f(H_r)$ s'enrichisse ainsi à mesure qu'on se rapproche du cas hilbertien. Préparons-nous à énoncer cette dernière propriété d'une manière plus précise.

Soit J un sous-intervalle compact de $]-\infty, \infty[$. Soit $W_p(J)$ la famille des fonctions complexes (sur J) telles que $V_p(f) \neq \infty$, où

$$V_p(f) = \sup_z \Big(\sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})|^{1/p} \Big)^p,$$

où z parcourt l'ensemble des partitions de J en un nombre fini d'intervalles. Si $0 < p \leqslant 1$, on vérifie facilement que $W_p(J)$ est une algèbre de Banach munie de la norme

$$W(f)_p = V_p(f) + \sup_{\lambda \in J} |f(\lambda)|.$$

Posons

$$\mathcal{F}_r(J) = \bigcup \{ W_p(J) \colon 2|r - \tfrac{1}{2}| < p \leqslant 1 \}.$$

Soit J^H le plus petit intervalle fermé contenant le spectre de H; nous écrirons $\mathcal{F}(H_r)$ au lieu de $\mathcal{F}_r(J^H)$. Notons que $\mathcal{F}(H_r)$ contient la famille $W_1(J^H)$ des fonctions à variation bornée. Il est facile de vérifier que

$$|r - \tfrac{1}{2}| < |s - \tfrac{1}{2}| \quad \textit{entraîne} \quad \mathcal{F}(H_r) \supsetneqq \mathcal{F}(H_s).$$

Remarquons enfin que, si les indices des espaces réfractants $\mathfrak{X}_r$ et $\mathfrak{X}_s^i$ sont symétriques par rapport à l'indice hilbertien $\frac{1}{2}$, alors $\mathcal{F}(H_r) = \mathcal{F}(H_s)$.

THÉORÈME PRINCIPAL. *Supposons que* $H \in \mathcal{H}_i$: *il existe alors un homomorphisme* $f \to f(H_r)$ *de l'algèbre* $\mathcal{F}(H_r)$ *dans l'algèbre* $\mathcal{E}_r$; *cet homomorphisme satisfait à la condition* (ii). *Si* $2|r - \frac{1}{2}| < p \leqslant 1$, *alors* $f \to f(H_r)$ *est une représentation continue de l'algèbre de Banach* $W_p(J^H)$ *dans* $\mathcal{E}_r$.

(2) On a évidemment $H = H_{1/2}$. Rappelons que H possède un calcul fonctionnel très „riche" (cf. [12], chapitre 9).

1.1. Applications. Soit $\{\Phi_n \colon n \in \omega\}$ un système orthonormal, où ω est une partie du groupe additif ω_0 des entiers rationnels. Prenons pour μ la mesure de Haar dans ω_0. Ainsi, $\mathfrak{X}_r$ est maintenant un espace de suites complexes, qui est couramment noté $l_{1/r}$. Si $x \in L^0$, alors $f_\#(x)$ désignera la suite des coefficients de Fourier de la fonction $f \cdot \hat{x}$, où

$$f \cdot \hat{x}(\lambda) = f(\lambda) \sum_{n \in \omega} x_n \cdot \Phi_n(\lambda).$$

L'application $f_\#$: $x \to f_\#(x)$ s'appele une „multiplier transformation" (cf. [4]). Soit I^1 la fonction identique $I^1(\lambda) = \lambda$; dans certains cas (à examiner dans le § 4), $I^1_\#$ possède un prolongement H de L^0 à $\mathfrak{X}_{1/2}$ tel que

(iii) *si* $f \in \mathcal{F}(H_r)$, *alors* $|f_\#|_r \neq \infty$, *et* $f(H_r)$ *est la réfraction de* $f_\#$.

C'est, par exemple, ce qui se passe quand $\{\Phi_n \colon n \in \omega\}$ est le système orthonormal des polynômes de Legendre (cf. n°. 4.2). Il en est de même si $\{\Phi_n \colon n \in \omega\}$ est le système orthonormal trigonométrique sur $J = [0, 1]$ (voir le n°. 4.3).

2. Préliminaires. Dans tout ce qui suit, $0 < r < 1$ et $H \in \mathcal{H}_i$. En vertu de l'hypothèse (i), nous pouvons définir une fonction E_r telle $E_r(\lambda) = E^H(\lambda)_r$ (pour $\lambda \in J^H$), où $E^H(\lambda)_r$ est la réfraction de $E^H(\lambda)$. Le présent paragraphe est, en grande partie, un résumé de certains résultats qui se trouvent dans mon article [8]. Posons

$$V_0(f) = \sup_z \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |f(z_k) - f(z_{k-1})|$$

où z parcourt l'ensemble des partitions de J^H en un nombre fini d'intervalles. Soit T une transformation linéaire de $\mathfrak{X}_{1/2}$; nous pouvons poser

$$T_{x,y} = \int_\omega y \cdot Tx \cdot d\mu \qquad (\text{pour } x \in L^0 \text{ et } y \in L^0). \tag{2.0.1}$$

Notons que

$$|T|_r = \sup\{|T_{x,y}| \colon x \in U_r \text{ et } y \in U_{1-r}\}, \tag{2.0.2}$$

où $U_s = \{x \in L^0 \colon \|x\|_{1/s} \leqslant 1\}$ lorsque $0 < s < 1$. Posons

$$V(p, r) = \sup\{V_p(E^H_{x,y}) \colon x \in U_r \text{ et } y \in U_{1-r}\}, \tag{2.0.3}$$

où $E^H_{x,y}$ est la fonction telle que $E^H_{x,y}(\lambda) = E^H(\lambda)_{x,y}$ (pour $\lambda \in J^H$). Puisque E^H est une famille spectrale, il s'ensuit que $V(1, \frac{1}{2}) \neq \infty$. D'un autre côté, on voit facilement que la fonction $(p, r) \to \log V(p, r)$ est

convexe dans le rectangle $0 \leqslant p, r \leqslant 1$ (voir [8], nº. 5.2). Mais $V(0, s) \neq \infty$ lorsque $0 < s < 1$ (en vertu de (i)). Par conséquent, $V(p, r) \neq \infty$ si le point (p, r) appartient à l'adhérence du segment de droite joignant le point $(0, s)$ au point $(1, \frac{1}{2})$ (voir fig. 1). Nous noterons $\mathfrak{R}$ la réunion de $]0, B[$ avec l'intérieur du triangle OPB (il est entendu que le segment de droite $]0, B[= \{(0, s)\colon 0 < s < 1\}$).

2.1. Remarque. Supposons que $0 \leqslant \alpha < 1$. Il est facile de vérifier que

$$(\alpha, r) \in \mathfrak{R} \quad \textit{si et seulement si} \quad 2|r - \tfrac{1}{2}| < 1 - \alpha.$$

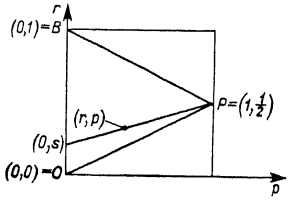

Fig. 1

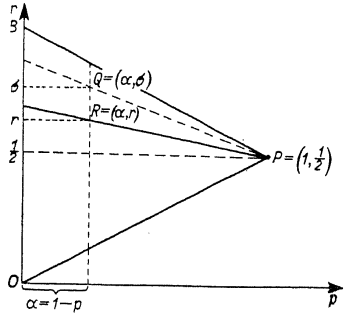

Fig. 2

2.2. Lemme. *On suppose que* $0 < r < 1$ *et que* $r \neq \frac{1}{2}$. *Alors la condition* $2|r - \frac{1}{2}| < p \leqslant 1$ *entraîne l'existence d'un couple numérique* (σ, m) *tel que*:

1º $0 < \sigma < 1$ *et* $0 < m < 1$,

2º $2|\sigma - \frac{1}{2}| < p \leqslant 1$, *et*

3º $r = m \cdot \frac{1}{2} + (1 - m) \cdot \sigma$.

Démonstration. Posons $\alpha = 1 - p$. Du nº. 2.1 il découle que $(\alpha, r) \in \mathfrak{R}$; en vertu de la configuration de la région $\mathfrak{R}$ on voit facilement (cf. fig. 2) qu'un point $Q = (\alpha, \sigma) \in \mathfrak{R}$ peut toujours être choisi de telle manière que r se trouve entre σ et $\frac{1}{2}$. La démonstration s'achève en appliquant le nº 2.1 une dernière fois.

2.3. Notations. Soit $\mathfrak{Z}$ (resp. $\overline{\mathfrak{Z}}$) l'ensemble des couples (ζ, θ) de suites $\zeta = (\zeta_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et $\theta = (\theta_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telles que $-\infty < \zeta_{k-1} < \theta_k < \zeta_k < \infty$ (resp. $-\infty < \zeta_{k-1} \leqslant \theta_k \leqslant \zeta_k < \infty$) pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Si $f \in \mathcal{F}(H_{1/2})$ et $z = (\zeta, \theta) \in \overline{\mathfrak{Z}}$, nous poserons

$$S(f, z) = \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\big(E^H(\zeta_k) - E^H(\zeta_{k-1})\big).$$

Si les couples $z = (\zeta, \theta)$ et $z' = (\zeta', \theta')$ appartiennent à $\overline{\mathfrak{Z}}$, nous écrirons $z' \leqslant z$ si $\{\zeta_k\colon 0 \leqslant k \leqslant n\} \subset \{\zeta'_k\colon 0 \leqslant k \leqslant n'\}$. L'ensemble $\mathfrak{Z}$ (resp. $\overline{\mathfrak{Z}}$) est un ensemble ordonné filtrant pour la relation $\leqslant$, et nous noterons A_r (resp. $\overline{A}_r$) la limite (dans l'espace normé $\mathcal{C}_r$) de l'application $z \to S(f, z)$ suivant l'ordonné filtrant $\mathfrak{Z}$ (resp. $\overline{\mathfrak{Z}}$). Remarquons que $\overline{A}_r$ est l'intégrale de Pollard-Stieltjes (cf. p. 261 dans [1], ou bien p. 79 dans [7]), tandis que A_r est ce que T. H. Hildebrandt appelle „l'intégrale modifiée de Pollard-Moore-Stieltjes" (cf. [2], pp. 269-273).

La définition de A_r est équivalente à celle qui distingue (dans [8], § 9) l'intégrale

$$(\mathcal{C}_r) \oint f \cdot dE_r;$$

donc cette intégrale coïncide avec A_r (dans le cas qui nous occupe, bien entendu, $E = E^H$). Posons

$$f(H_r) = (\mathcal{C}_r) \oint f(\lambda) \cdot dE^H(\lambda)_r = A_r = (\mathcal{C}_r) \oint f \cdot dE_r. \tag{2.3.1}$$

2.4. Remarque. Si f est une fonction complexe continue sur J^H, il est facile de vérifier que

$$f(H_r) = \int f(\lambda) \cdot dE^H(\lambda)_r, \tag{2.4.1}$$

où l'intégrale à droite est une intégrale *ordinaire* de Stieltjes (définie comme dans [12], p. 270).

2.5. Lemme. *Supposons que* $f \in \mathcal{F}(H_{1/2})$ *et* $\varepsilon > 0$. *Dans ces conditions, il existe un element* z_0 *de* $\mathfrak{Z}$ *tel que, si* $z_0 \leqslant z \in \mathfrak{Z}$ *et* $z_0 \leqslant z' \in \mathfrak{Z}$, *alors*

$$|S(f, z) - S(f, z')|_{1/2} < \varepsilon \cdot V(1, \tfrac{1}{2}).$$

Démonstration. Voir [8], nº. 8.6.

2.6. Théorème. *La condition* $f \in \mathcal{F}(H_{1/2})$ *entraîne l'existence de* $f(H_{1/2})$.

2.7. Lemme. *Supposons que* $0 < \sigma < 1$ *et* $2|\sigma - \frac{1}{2}| < p \leqslant 1$. *Dans ces conditions, il existe un nombre* $k_{p,\sigma} > 0$ *et un point* $\hat{p} \in [0, 1]$ *tels que*

$$|S(f, z)|_\sigma \leqslant k_{p,\sigma} \cdot V(\hat{p}, \sigma) \cdot W(f)_p < \infty$$

pour chaque $f \in W_p(J^H)$ *et chaque* $z \in \mathfrak{Z}$.

Démonstration. Voir [8], nº. 7.6.

Remarques. La démonstration du nº. 2.7 s'appuie sur une inégalité découverte par L. C. Young [14]. Rappelons que $W(f)_p$ est la norme de l'espace de Banach $W_p(J^H)$. Nous avons déjà noté que $V(1, \frac{1}{2}) \neq \infty$ (puisque E^H est une famille spectrale): le nº. 2.6 découle donc immédiatement du nº 2.5.

2.8. THÉORÈME. *Si* $H \in \mathscr{H}_i$ *et* $0 < \sigma < 1$, *alors* $|H|_\sigma \neq \infty$.

Démonstration. Soient $x \in U_\sigma$ et $y \in U_{1-\sigma}$; il s'ensuit que x et y appartiennent à l'espace hilbertien $\mathfrak{X}_{1/2}$. La notation (2.0.1) nous permet d'exprimer le théorème de la décomposition spectrale (cf. [12], pp. 270-271) comme suit:

$$H_{x,y} = \int \lambda \cdot dE^H(\lambda)_{x,y}. \tag{2.8.1}$$

Posons $f(\lambda) = \lambda$ et $p = 1$ (d'où $f \in W_p(J^H)$). En vertu de (2.8.1), il est immédiat que $H_{x,y}$ est la limite de l'application $z \to S(f,z)_{x,y}$ suivant l'ordonné filtrant $\mathfrak{Z}$. Il découle donc de (2.0.2) que $|H_{x,y}| \leqslant k_{1,\sigma} V(\hat{p},\sigma) W(f)_1$. La démonstration s'achève en appliquant (2.0.2) une seconde fois.

3. Théorèmes principaux. Dans tout ce qui suit, nous supposerons $0 < r < 1$, $r \neq \frac{1}{2}$ et $2|r-\frac{1}{2}| < p \leqslant 1$. On a vu (au n° 2.2) qu'il existe un couple numérique (σ, m) tel que

$$r = \tfrac{1}{2} \cdot m + \sigma \cdot (1-m) \quad \text{et} \quad 0 < \sigma,\ m < 1, \tag{1}$$

$$2|\sigma - \tfrac{1}{2}| < p \leqslant 1. \tag{2}$$

Il sera commode de poser

$$f(\hat{p},\sigma) = k_{p,\sigma} \cdot V(\hat{p},\sigma) \cdot W(f)_p. \tag{3}$$

Le lemme 2.7 exprime donc le fait suivant:

(4) *si* $f \in W_p(J^H)$, *alors* $|S(f,z)|_\sigma \leqslant f(p,\sigma) < \infty$ (*pour* $z \in \mathfrak{Z}$).

Une dernière remarque: en tenant compte de (1), la relation

$$|D|_r \leqslant (|D|_{1/2})^m (|D|_\sigma)^{1-m} \quad (\textit{pour } D \in \mathcal{C}_2), \tag{5}$$

est une conséquence immédiate du théorème de Riesz-Thorin (cf. [15], p. 95).

3.1. THÉORÈME. *L'application* $f \to f(H_r)$ *est une transformation linéaire continue de l'espace de Banach* $W_p(J^H)$ *dans* $\mathcal{C}_r$.

Démonstration. Soit $f \in W_p(J^H)$: il suffira d'établir l'existence de $f(H_r)$. Posons $D = S(f,z) - S(f,z')$. Il ressort de (5) et de (4) que

$$|S(f,z) - S(f,z')|_r \leqslant \big(|S(f,z) - S(f,z')|_{1/2}\big)^m \big(2 \cdot f(p,\sigma)\big)^{1-m},$$

et la conclusion découle de (4) et du n°. 2.5.

3.2. THÉORÈME. *Supposons que* $T \in \mathscr{H}_i$. *Si* $T = f(H_{1/2})$ *et* $f \in \mathscr{T}(H_r)$, *alors* $T_r = f(H_r)$.

Démonstration. Posons $D = T - S(f,z)$; d'après 2.8 et (4), on a

$$|D|_\sigma \leqslant |T|_\sigma + |S(f,z)|_\sigma \leqslant |T|_\sigma + f(p,\sigma) < \infty. \tag{6}$$

En vertu de (5) et (6), il ressort donc que

$$|T - S(f,z)|_r \leqslant (|T - S(f,z)|_{1/2})^m \big(|T|_\sigma + f(p,\sigma)\big)^{1-m},$$

et la conclusion découle ainsi de (6) et de l'hypothèse $T = f(H_{1/2})$.

3.3. THÉORÈME. *Si* g_0 *et* g_1 *appartiennent à* $W_p(J^H)$, *alors* $g_0 \cdot g_1 \in W_p(J^H)$, *et*

$$(g_0 \cdot g_1)(H_r) = g_0(H_r)\, g_1(H_r). \tag{7}$$

Démonstration. Définissons d'abord la fonction $g_2 = g_0 \cdot g_1$ telle que $g_2(\lambda) = g_0(\lambda) \cdot g_1(\lambda)$ (pour $-\infty < \lambda < \infty$). Il est facile de voir que $W(g_2)_p \leqslant W(g_0)_p \cdot W(g_1)_p$ (d'où notre remarque, dans le § 1, que $W_p(J^H)$ est une algèbre de Banach assujetie à la norme $f \to W(f)_p$). L'égalité (7) se vérifie de la manière suivante. Posons $T_\iota = g_\iota(H_r)$ (pour $\iota = 0, 1, 2$): vu l'existence de $g_\iota(H_r)$, il ressort que

$$|T_\iota|_r \neq \infty \quad \textit{et} \quad |T_\iota - S(g_\iota, z)|_r < \varepsilon \quad (\iota = 0, 1, 2) \tag{8}$$

pour chaque z suffisamment grand (dans l'ensemble ordonné $\mathfrak{Z}$). Ensuite, on voit facilement que

$$S(g_0,z)\, S(g_1,z) = \sum_{k=1}^{n} g_2(\theta_k)\big(E^H(\zeta_k) - E^H(\zeta_{k-1})\big) = S(g_2,z),$$

ce qui entraîne $|g_2(H_r) - T_0 T_1|_r \leqslant |T_2 - S(g_2,z)|_r + N(z)$, où

$$N(z) \leqslant |S(g_0,z)|_r |S(g_1,z) - T_1|_r + |T_1|_r |S(g_0,z) - T_0|_r.$$

La conclusion (7) résulte donc de (8) et de (4).

3.4. Conséquences. Les théorèmes 3.1 et 3.3 montrent que l'application $f \to f(H_r)$ est une représentation continue de l'algèbre topologique $W_p(J^H)$ dans $\mathcal{C}_r$; d'où le „théorème principal" que nous avons énoncé dans le § 1. Si $n \geqslant 0$, soit I^n la fonction telle que $I^n(\lambda) = \lambda^n$ (pour $-\infty < \lambda < \infty$).

En vertu de la remarque 2.4, nous pouvons exprimer le théorème de la décomposition spectrale de la manière suivante: $H = I^1(H_{1/2})$ (voir [12], pp. 270-271). Or, $I^1 \in \mathscr{T}(H_r)$ et $H \in \mathscr{H}_i$; en conséquence, on peut déduire du théorème 3.2 que

$$H_r = I^1(H_r) = \int \lambda\, dE^H(\lambda)_r; \tag{3.4.1}$$

les notations ci-dessus ont été définies par les formules (2.3.1) et (2.4.1). Remarquons que $I^0(H_r)$ est la transformation identique, et $I^n(H_r) = I^{n-1}(H_r) I^1(H_r)$ (pour $n = 1, 2, \ldots$). Donc, on voit facilement que $I^n(H_r) = (H_r)^n$ pour tout entier positif n. La propriété (ii) du § 1 s'ensuit immédiatement.

4. Applications. Dans ce paragraphe, nous allons établir les propriétés annoncées au nº. 1.1. Dans tout ce qui suit, μ est mesure de Haar dans le groupe additif $\omega_0 = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$ des entiers rationnels. Il s'ensuit que L^0 est dorénavant la famille des fonctions (sur ω) à support compact.

Soit J un sous-intervalle compact de $]-\infty, \infty[$. Considérons un système (orthonormal complet) $\{\Phi_n\colon n \in \omega\}$ de fonctions continues sur J; ce système est numéroté de telle manière que $\omega \subset \omega_0$. Si $f \in L^\infty(J)$, alors f donne naissance à l'opérateur $f_\#\colon x \to f_\#(x)$ que nous avons défini au nº. 1.1. Si $x = (x_\nu)_{\nu\in\omega}$, alors $f_\#(x)$ est une suite $(f_\#(x)_n)_{n\in\omega}$ telle que

$$f_\#(x)_n = \sum_{\nu\in\omega} x_\nu \int_J f(\lambda)\cdot\Phi_\nu(\lambda)\cdot\overline{\Phi_n}(\lambda)\,d\lambda \qquad (\textit{pour } n\in\omega).$$

Soit $\lambda \in J$. Désignons par $e(\lambda)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $J \cap]-\infty, \infty[$, c'est-à-dire:

$$e(\lambda)(\theta) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad J \ni \theta \leqslant \lambda, \\ 0 & \textit{pour} \quad J \ni \theta > \lambda. \end{cases}$$

4.1. Théorème. *Soit $H \in \mathcal{H}_i$ tel que $J^H \subset J$, et supposons que, pour tout $\lambda \in J$, la restriction de $E^H(\lambda)$ à L^0 coïncide avec $e(\lambda)_\#$. Pour chaque $f \in \mathcal{F}_r(J)$, il s'ensuit que $f(H_r)$ est la réfraction de $f_\#$.*

Remarques. Nous allons montrer que le nº. 4.1 découle directement d'un théorème établi dans un travail antérieur ([8], nº. 10.4). Rappelons d'abord que J^H est le plus petit intervalle fermé contant le spectre de H. Posons $E = E^H$; il s'ensuit que E est une fonction constante au dehors de J^H, et que

$$\infty \neq \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |E(\lambda)|_s \qquad \textit{lorsque} \qquad 0 < s < 1$$

(puisque $H \in \mathcal{H}_i$, ce qui implique que E^H vérifie la relation (i)). Supposons que $f \in \mathcal{F}_r(J)$. Il exists donc un espace $W_p(J)$ tel que $f \in W_p(J)$ et $2|r-\frac{1}{2}| < p \leqslant 1$. En vertu du théorème mentionné ci-dessus ([8], nº 10.4), il 'en suit que $f_\#$ possède une réfraction $f_{\#r}$ telle que

$$f_{\#r} = (\mathcal{E}_r) \oint f\cdot dE_r.$$

Rappelons enfin que $\mathcal{F}(H_r)$ est une abréviation de $\mathcal{F}_r(J)$. Puisque $f \in \mathcal{F}(H_r)$, la conclusion $f_{\#r} = f(H_r)$ résulte donc de (2.3.1) et du théorème 3.1. Ainsi, nous avons établi la propriété (iii) du § 1, c'est-à-dire:

(4.1.1) $\qquad$ *si* $f \in \mathcal{F}_r(J)$, *alors* $f_{\#r} = f(H_r) \in \mathcal{E}_r$.

D'ailleurs, puisque notre système $\{\Phi_n\colon n \in \omega\}$ est complèt, on voit facilement que l'application $f \to f_{\#r}$ est biunivoque; il en résulte que *l'application $f \to f_{\#r}$ est un isomorphisme topologique de l'algèbre $W_p(J^H)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{E}_r$.*

4.2. Première application. Soit $\{\Phi_n\colon n \in \omega\}$ le système orthonormal des polynômes de Legendre (en tant que fonctions sur $J = [-1, 1]$); posons $\omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dans ces conditions on peut définir une transformation Δ (voir la formule (2) dans [5]), et la formule $\Gamma_\lambda = e(\lambda)_{\#1/2}$ définit (pour chaque $\lambda \in J$; cf. formule (5) dans [5]) une famille spectrale correspondante; c'est-à-dire, E^Δ est la fonction $\lambda \to \Gamma_\lambda$. I. Hirschman [5] note que Δ est une transformation symétrique bornée dont le spectre coïncide avec J; l'article [5] a comme but de montrer que la relation (i) est verifiée pour $E^H = E^\Delta$. Il en résulte que $\Delta \in \mathcal{H}_i$ et $J^\Delta = J$; le théorème 4.1 montre donc que

$$f \in \mathcal{F}_r(J) \qquad \textit{entraîne} \qquad |f_\#|_r \neq \infty \qquad \textit{et} \qquad f_{\#r} = f(\Delta_r) \in \mathcal{E}_r.$$

4.3. Seconde application. Dorénavant, $\omega = \omega_0$ et $\Phi_n(\lambda) = \exp(2\pi i n\lambda)$ pour $\lambda \in J = [0, 1]$ et $n \in \omega$. I. Hirschman a découvert la relation suivante: $|f_\#|_r \neq \infty$ lorsque $f \in \mathcal{F}_r(J)$. Nous allons en dire plus [3]. Si $x \in l_2$, alors $H^{(\lambda)}x$ sera la suite $(H^{(\lambda)}x_n)_{n\in\omega}$ telle que

$$H^{(\lambda)}x_n = \Phi(-\lambda n) \sum_{\nu\in\omega} \Phi(\lambda\nu)x_\nu \frac{i}{2\pi(n-\nu)} \tag{4.3.1}$$

où $\nu \neq n$. Posons $H = H^{(0)}$. On vérifie facilement que H est une transformation symétrique bornée dont le spectre coïncide avec J, et $E^H(\lambda) = e(\lambda)_{\#1/2}$ (pour $\lambda \in J$). Posons $x \in L^0$; il est également facile de vérifier que $E^H(\lambda)x = H^{(\lambda)}x - H^{(0)}x + \lambda x$. Il en résulte que $|E^H(\lambda)|_r \leqslant |H^{(\tau)}|_r + |H^{(0)}|_r + |\lambda| \leqslant 1 + 2|H^{(0)}|_r < \infty$ (cette derniere inégalité a été prouvée par M. Riesz [11]). Donc, la propriété (4.1.1) découle du théorème 4.1.

5. Autres propriétés spectrales. Dans ce paragraphe, nous retiendrons les hypothèses du nº 4.3: $\omega = \omega_0$, $J = [0, 1]$, et H sera encore la transformation de Hilbert $H^{(0)}$ (définie en mettant $\lambda = 0$, dans (4.3.1)). Puisque $H \in \mathcal{H}_i$, il s'ensuit de (3.4.1) que

$$H_r = \int \lambda\cdot dE^H(\lambda)_r.$$

On tire de [9] qu'il n'existe aucune mesure spectrale M telle que

$$H_r = \int \lambda\cdot M(d\lambda).$$

En fait, nous avons établi (cf. [9], p. 461) que E^H n'est pas à variation bornée (autrement dit, il se montre que $V(1, r) = \infty$, où $V(1, r)$ est l'expression définie par (2.0.3)). Soit T_r la transformation telle que

[3] La découverte de Hirschman est à l'origine du présent travail.

$T_r x = (x_{n+1})_{n\in\omega}$ (pour tout $x\in\mathfrak{X}_r$); donc $T_r\in\mathcal{C}_r$. Un des résultats de l'article [9] aide à montrer facilement que

$$T_r = \int e^{-2\pi i\lambda} dE^H(\lambda)_r = \Phi_{-1}(H_r)$$

(voir [9], p. 461); ici, nous avons fait usage des notations (2.4.1); la fonction Φ_n est définie au nº. 4.3. Enfin, en ce qui touche les catégories de N. Dunford, notons que H_r et T_r ne sont pas des „spectral operators" (cf. [9], p. 462, la remarque de Ciprian Foias).

Notations. Si $R_r\in\mathcal{C}_r$, notons $\sigma(R_r)$ le spectre de R_r (en tant qu'élément de l'algèbre $\mathcal{C}_r$). Si K est un ensemble quelconque, notons $f[K]$ l'adhérence de l'image de K par f.

Soit $f\in\mathcal{F}(H_r)$. Il découle d'un article de Devinatz-Hirschman (cf. [6], théorème 3.2) que $\sigma(f_{\#r}) = f[J]$; on a donc $\sigma\big(f(H_r)\big) = f[J]$ (en vertu de (4.1.1)). Puisque $H_r = I^1(H_r)$ (voir (3.4.1)), il en découle que $\sigma(H_r) = I^1[J] = J$, d'où

(iv) $$si \quad f\in\mathcal{F}(H_r), \quad alors \quad \sigma\big(f(H_r)\big) = f[\sigma(H_r)].$$

Remarquons que (iv) est une généralisation naturelle du „spectral mapping theorem" de N. Dunford (cf. [12], p. 426).

6. Problème non-résolu. En vue de la remarque ci-dessus, il serait intéressant de connaître la réponse à la question suivante: *La propriété* (iv) *est-elle vérifiée, en général, quand* $H\in\mathcal{H}_i$? En particulier, (iv) est-elle vérifiée quand $H = \Delta$?

Bibliographie

[1] L. M. Graves, *The theory of functions of real variables*, New York 1956

[2] T. H. Hildebrandt, *Definitions of Stieltjes integrals of the Riemann type* Amer. Math. Monthly 45 (1938), p. 265-278.

[3] E. Hille et R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 31, 1957.

[4] I. I. Hirschman, Jr., *On multiplier transformations*, Duke Math. Journ. 26 (1959), p. 221-242.

[5] — *Projections associated with Jacobi Polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), p. 286-290.

[6] — et A. Devinatz, *The spectra of multiplier transforms on* l^p, Amer. Journ. Math. 80 (1958), p. 829-842.

[7] J. L. Kelley, *General topology*, New York 1955.

[8] G. L. Krabbe, *Integration with respect to operator-valued functions*, Acta Scient. Math. Szeged (à paraître).

[9] — *Convolution operators that satisfy the spectral theorem*, Math. Zeitschr. 70 (1959), p. 446-462.

[10] B. Sz. Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen der Hilbertschen Raumes*, Berlin 1942.

[11] M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeitschr. 27 (1928), p. 218-244. Particulièrement, 241-242.

[12] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionelle*, 3ème édition, Paris 1955.

[13] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 15, 1932.

[14] L. C. Young, *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration*, Acta Math. 67 (1936), p. 251-282.

[15] A. Zygmund, *Trigonometric series*, t. 2, Cambridge 1959.

Reçu par la Rédaction le 7. 11. 1960

Ajouté pendant la correction des épreuves. L'espace-base $\mathfrak{X}_r$ n'est pas nécessairement un espace d'intégration et l'opérateur H n'est pas nécessairement borné; dans un article à paraître je vais généraliser les résultats de ce travail au cas où $\mathfrak{X}_r$ est un „espace intermédiaire" au sens de Gagliardo (*Interpolation d'espaces de Banach* (II), Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, 248 (1959), p. 3388-3390) et Calderón (*Intermediate spaces and interpolation*, Varsovie, septembre 1960). Une note du Bulletin Amer. Math. Soc. (67 (1961), p. 214-218) contient le résumé des principaux résultats établis dans ce travail.