limit condition $s|\{x(t)\} = \{x(1)\}$. We have

$$T\{x(t)\} = \left\{ \int_1^t \frac{x(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma \right\}, \quad \tau\{x(t)\} = \{x(t)\ln t\},$$

$$e^{R\tau}\{x(t)\} = \{e^{R\ln t}x(t)\} = \{t^R x(t)\}.$$

We can also solve the differential-difference equations with derivation $S\{x(t)\} = \{x'(t+1)\}$ and limit condition

$$s\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} c(t) & \text{for} & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ c(1) & \text{for} & t \geqslant 1 \end{Bmatrix}.$$

References

[1] S. Bellert, *Podstawy rachunku operatorów liczbowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Nr. 5, Elektryka 3 (1954), p. 3-37.

[2] — *On foundations of operational calculus*, Bull. Acad. Pol. Sci. V. 9 (1957), p. 855-858.

[3] R. Bittner, *Certain axiomatics for the operational calculus*, ibidem VII. 1 (1959), p. 1-9.

[4] H. B. Curry, *The Heaviside operational calculus*, American Mathematical Monthly 50 (1943), p. 365-379.

[5] J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1950), p. 41-70.

[6] — *Le calcul opérationnel d'intervalle fini*, ibidem 15 (1956), p. 225-251.

[7] — *Équations différentielles à coefficients constants considérées dans les espaces linéaires généraux*, Bull. Acad. Pol. Sci. IV. 3 (1956), p. 137-139.

[8] — *Extensions de l'espace linéaire avec dérivation*, Studia Math. 16 (1957), p. 156-172.

[9] M. Nicolescu, *Problème de l'analycité par rapport à un opérateur linéaire*, ibidem 16 (1958), p. 353-363.

[10] А. И. Плесснер, *Спектральная теория линейных операторов*, Успехи мат. наук 9 (1941), p. 3-125; I, 1 (11) (1946), p. 71-216.

[11] W. Słowikowski, *A generalisation of Mikusiński's operational calculus*, Bull. Acad. Pol. Sci. IV 10 1956. p, 643-647.

[12] V. Volterra et J. Péres, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*, Paris 1924.

Reçu par la Rédaction le 2. 11. 1959

STUDIA MATHEMATICA, T. XX. (1961)

Спектральная теория некоторых линейных операторов, мероморфно зависящих от параметра

Д. Ф. ХАРАЗОВ (Тбилиси)

Различные вопросы теории линейных операторов, мероморфно зависящих от параметра рассматривались многими математиками. Исследованию спектра линейных интегральных уравнений с ядрами, зависящими мероморфно от параметра посвящены работы К. Миранда [1, 2], Р. Иглиша [3], Б. Манна [4] и автора [5, 6]. Резольвенту таких ядер в классе функций L^2 исследовал Я. Тамаркин [7]. Задача обращения для линейных мероморфно зависящих от параметра операторов в банаховом пространстве изучена автором [8]. Полученный в этой работе результат использован для исследования резольвенты мероморфных ядер интегральных уравнений в классе функций L^p, $p > 1$. В статье автора [9] исследуется спектр линейных мероморфно зависящих от параметра операторов в гильбертовом пространстве, обладающих конечным числом кратных вещественных полюсов.

В работе Х. Мюллера [10] исследованы линейные мероморфно зависящие от параметра операторы с конечным множеством простых вещественных полюсов.

В настоящей работе мы рассмотрим класс линейных мероморфно зависящих от параметра операторов с бесконечным множеством простых вещественных полюсов.

1. Постановка задачи. Пусть $\boldsymbol{X}$ — некоторое гильбертово пространство; A_0 и A_1 — линейные самосопряжённые операторы, действующие в $\boldsymbol{X}$ и имеющие конечные абсолютные нормы [11], кроме того $(A_0 x, x) < (x, x)$ для любого $x \in \boldsymbol{X}$, $x \neq 0$. Положим

$$H_i x = \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{(x, \varphi_k^{(i)})\varphi_k^{(i)}}{\varkappa_k^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\varphi_{(i)}^k\}$ $(k = 1, \ldots, \sigma_i)$ — ортонормированная система элементов из $\boldsymbol{X}$, $\varkappa_k^{(i)}$ — некоторые вещественные числа; пусть абсолютные нормы и следы [11] конечномерных операторов H_i, обозначаемые соответственно через $N(H_i)$ и $S_p(H_i)$ равномерно ограничены: $N(H_i) \leqslant B$, $|S_p(H_i)| \leqslant M$ $(B>0,\ M>0)$ $(i=1,2,\ldots)$. Зададим последовательность вещественных чисел $a_i \neq 0$, удовлетворяющую условиям: $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{-1} < +\infty$, $a_i \varkappa_k^{(i)} < 0$ $(k=1,\ldots,\sigma_i;\ i=1,2,\ldots)$ (из последнего условия вытекает, что $a_i(H_i x, x) \leqslant 0$ для любого $x \in X$). Так как $\|H_i\| \leqslant N(H_i)$ (см. [11]), то перечисленные условия обеспечивают сходимость по норме операторов, при любом $\lambda \neq a_i$ $i=1,2,\ldots$, ряда $\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda-a_i)^{-1}H_i$.

Рассмотрим уравнение

$$A_\lambda x \equiv x - A_0 x - \lambda\Big\{A_1 x + \lambda \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-a_i}H_i x\Big\} = y, \quad x \in \boldsymbol{X},\ y \in \boldsymbol{X}, \tag{1}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$A_\lambda x = 0, \tag{2}$$

где λ — комплексный параметр.

Настоящая работа посвящается построению спектральной теории операторов вида A_λ. В §§ 2, 3 изучаются спектр оператора A_λ и экстремальные свойства его собственных значений. В § 4 строятся спектральные разложения для операторов A_1 и H_i $(i=1,2,\ldots)$ по собственным элементам оператора A_λ, а в § 5 исследуются условия полноты системы собственных элементов. Основные результаты этой статьи были опубликованы без доказательств в заметке [12].

В частном случае, когда $A_0 = 0$, A_1 — интегральный оператор, определяемый ядром с суммируемым квадратом, а H_i $(i=1,2,\ldots)$ — интегральные операторы, определяемые непрерывными ядрами, поставленную задачу изучал К. Миранда [2] при помощи довольно громоздкого аппарата „псевдофункций", введенных им самим. Окончательные результаты, полученные К. Миранда, также формулируются в терминах „псевдофункций", рядов сходящихся к ним в некотором смысле и т. д.

Наш метод исследования поставленной задачи основан на введении в рассмотрение некоторого вспомогательного гильбертова пространства и использовании известной теоремы Л. А. Люстерника [13] об условном экстремуме функционалов в линейном нормированном пространстве.

2. Собственные значения и собственные элементы уравнения (2). Значение $\lambda = \lambda_0$ $(\lambda_0 \neq a_i,\ i=1,2,\ldots)$ будем называть собственным значением уравнения (2), если уравнение $A_{\lambda_0}x = 0$ имеет решение $x_0 \neq 0$, называемое собственным элементом уравнения (2). Значение $\lambda = a_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ будем называть собственным значением уравнения (2) в особом смысле, если существуют элементы $\varphi \in \boldsymbol{X}$, $\varphi \neq 0$, $\psi \in \boldsymbol{X}$ такие, что

$$\varphi - A_0\varphi - a_p\Big\{A_1\varphi + a_p\sum_{i=1}^{\infty\ (i\neq p)}\frac{1}{a_p-a_i}H_i\varphi\Big\} + a_p H_p\psi = 0, \quad H_p\varphi = 0. \tag{3}$$

Элемент φ будем называть *собственным* в особом смысле. Нетрудно видеть, что при любом $\lambda \neq a_i$ $(i=1,2,\ldots)$ оператор A_λ вполне непрерывен в $\boldsymbol{X}$, а потому его спектр может содержать лишь собственные значения и каждому собственному значению может соответствовать лишь конечное число собственных элементов. Оператор A_λ удовлетворяет всем условиям, при которых мероморфные операторы исследованы в работе [8], из результатов которой следует

Теорема 1. *Множество собственных значений уравнения* (2) *не сгущается в конечной части плоскости* λ.

Покажем теперь, что каждому собственному значению в особом смысле может соответствовать тоже лишь конечное число собственных элементов в особом смысле. Допустим противное, пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ бесконечная последовательность линейно независимых собственных элементов соответствующих собственному значению в особом смысле $\lambda = a_p$. Эту последовательность можно считать ортонормированной.

Рассмотрим оператор

$$B_p = A_0 + a_p\Big\{A_1 + a_p\sum_{i=1}^{\infty\ (i\neq p)}(a_p-a_i)^{-1}H_i\Big\}.$$

Так как существует число $L_p > 0$ такое, что $|a_p(a_p-a_i)^{-1}| \leqslant |a_i|^{-1}L_p$ $(i=1,2,\ldots)$, и в силу наших условий $\|a_p(a_p-a_i)^{-1}H_i\| \leqslant |a_i|^{-1}L_p\|H_i\| \leqslant |a_i|^{-1}L_p B$, $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{-1} < +\infty$, то на основании известной теоремы о сумме ряда операторов с конечной абсолютной нормой [11]

$$N(B_p) \leqslant |a_p|\Big\{N(A_1) + BL_p\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{-1}\Big\} + N(A_0).$$

В силу определения абсолютной нормы [11],

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}|(B_p\varphi_k, \varphi_s)|^2 \leqslant N^2(B_p) < +\infty.$$

Но, в силу уравнений (3), выполняющихся для φ_s и соответствующих им функций ψ_s, $H_p\varphi_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ и

$$(B_p\varphi_k, \varphi_s) = (\varphi_k + a_p H_p \psi_k, \varphi_s) = (\varphi_k, \varphi_s) = \delta_{ks}.$$

Следовательно ряд $\sum\limits_{k,s=1}^{\infty} |(B_p\varphi_k, \varphi_s)|^2$ расходится, что противоречит конечности абсолютной нормы оператора B_p и доказывает справедливость нашего утверждения.

Теорема 2. *Уравнение* (2) *может иметь только вещественные собственные значения.*

Допустим противное. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ — собственное значение уравнения (2), которому соответствует собственный элемент x_0. Тогда, умножая уравнение $A_{\lambda_0}x_0 = 0$ справа на $\lambda_0 x_0$, переходя в полученном результате к сопряженным величинам и вычитая почленно последнее равенство из первого найдем, что

$$(\bar{\lambda} - \lambda)\Big\{\big((E - A_0)x, x\big) + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda - a_i|^{-2}\big[-a_i(H_i x, x)\big]\Big\} = 0,$$

где E — оператор тождественного преобразования в X. Но, в силу наших условий §1, выражение в фигурных скобках больше нуля, а потому $\bar{\lambda} - \lambda = 0$ и $\beta = 0$, что и доказывает теорему 2.

Пусть теперь λ_1 и λ_2 — собственные значения уравнения (2), $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и x_1 и x_2 — соответствующие им собственные элементы. При помощи аналогичных вычислений найдем, что

$$\big((E - A_0)x_1, x_2\big) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - a_i)^{-1}(\lambda_2 - a_i)^{-1} a_i(H_i x_1, x_2) = 0.$$

Это равенство с помощью обозначений $\psi_{ik} = -\lambda_k(\lambda_k - a_i)^{-1}{}_k$ $(k = 1, 2)$ можно записать в виде

$$\big((E - A_0)x_1, x_2\big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(H_i\psi_{i1}, \psi_{i2}) = 0. \tag{4}$$

Допустим теперь, что λ_1 и x_1 — собственное значение и соответствующий ему собственный элемент уравнения (2), а $\lambda_2 = a_p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ и $x_2 = \varphi_2$ — собственное значение и собственный элемент в особом смысле. Тогда, производя аналогичные вычисления найдем, что

$$\big((E - A_0)x_1, \varphi_2\big) - \sum_{i=1}^{\infty\,(i\neq p)} \lambda_1 a_p(\lambda_1 - a_i)^{-1}(a_p - a_i)^{-1} a_i(H_i x_1, \varphi_2) + \\ + \lambda_1 a_p(\lambda_1 - a_p)^{-1}(H_p x_1, \psi_2) = 0,$$

где ψ_2 — функция соответствующая φ_2 в равенстве (3).

Последнее равенство при помощи обозначений $\psi_{i1} = -\lambda_1(\lambda_1 - a_i)^{-1}x_1$, $\psi_{i2} = -a_p(a_p - a_i)^{-1}\varphi_2$ $(i \neq p)$, $\psi_{p2} = \psi_2$, также принимает вид (4). Для двух собственных значений в особом смысле $\lambda_1 = a_p$ и $\lambda_2 = a_q$, $p \neq q$, получим такое же соотношение вида (4)

$$\big((E - A_0)\varphi_1, \varphi_2\big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(H_i\psi_{i1}, \psi_{i2}) = 0,$$

где $\psi_{i1} = -a_p(a_p - a_i)^{-1}\varphi_1$ $(i \neq p)$, $\psi_{p1} = \psi_1$, $\psi_{i2} = -a_q(a_q - a_i)^{-1}\varphi_2$ $(i \neq q)$, $\psi_{q2} = \psi_2$.

В дальнейшем обыкновенные собственные значения и собственные элементы и таковые в особом смысле будем просто называть собственными значениями и собственными элементами всегда за исключением тех случаев, когда важно будет указать их различие.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность собственных значений уравнения (2), каждое из которых выписано столько раз сколько линейно независимых собственных элементов ему соответствует. Тогда, обобщая соответствующим образом на основании равенств вида (4) известный способ ортогонализации, мы можем считать, что собственные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ удовлетворяют соотношениям

$$\big((E - A_0)\varphi_k, \varphi_n\big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(H_i\psi_{ik}, \psi_{in}) = \delta_{kn}, \qquad k, n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где, если λ_k-собственное значение обыкновенное, то $\psi_{ik} = -\lambda_k(\lambda_k - a_i)^{-1}\varphi_k$, если же $\lambda_k = a_p$ — собственное значение в особом смысле, то $\psi_{ik} = -a_p(a_p - a_i)^{-1}\varphi_k$ $(i \neq p)$, $\psi_{pk} = \psi_k$, где ψ_k соответствует особому собственному элементу φ_k в равенстве (3).

3. Экстремальные свойства собственных значений. Перейдем теперь к доказательству существования собственных значений уравнения (2) и к установлению их экстремальных свойств.

Рассмотрим линейное множество G упорядоченных последовательностей $\alpha = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$, $y_i \in X$ $(i = 0, 1, \ldots)$, удовлетворяющих условию

$$N(\alpha) \equiv \big((E - A_0)y_0, y_0\big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(H_i y_i, y_i) < +\infty \tag{6}$$

и определим в G скалярное произведение

$$(\alpha, \alpha^{(1)})_G = \big((E - A_0)y_0, y_0^{(1)}\big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(H_i y_i, y_i^{(1)}),$$

где $a^{(1)} = \{y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}, \ldots\}$. Это произведение превращает G в гильбертово пространство, вообще говоря не полное, с нормой $\|a\|_G = (a, a)_G^{1/2} = N^{1/2}(a)$. На подмножестве $G_1 \subset G$ элементов, удовлетворяющих условию $\|a\|_G \leqslant 1$, рассмотрим функционал

$$\Phi(a) = -(A, y_0, y_0) + \sum_{i=1}^{\infty}(H_i y_0, y_i) + \sum_{i=1}^{\infty}(y_i, H_i y_0) + \sum_{i=1}^{\infty}(H_i y_i, y_i),$$

где ряды сходятся и притом равномерно относительно $a \in G_1$, в силу следующих оценок:

$$|(H_i y_i, y_i)| = \left|\frac{1}{a_i}\right| |a_i (H_i y_i, y_i)| \leqslant \frac{N(a)}{|a_i|} \leqslant \frac{1}{|a_i|},$$

$$|(H_i y_0, y_i)| \leqslant \frac{1}{|a_i|} |a_i (H_i y_0, y_0)|^{1/2} |a_i (H_i y_i, y_i)|^{1/2} \leqslant \frac{\|H_i\|^{1/2}}{|a_i|^{1/2}} \|y_0\| \, |a_i (H_i y_i, y_i)|^{1/2}$$

ибо, в силу (6), если оператор A_0 имеет положительные собственные значения и ν_0 — наименьшее из них, то

$$\|y_0\|^2 \leqslant 1 + (A_0 y_0, y_0) \leqslant 1 + \frac{(y_0, y_0)}{\nu_0} \quad \text{и} \quad \|y_0\|^2 \leqslant \frac{\nu_0}{\nu_0 - 1}$$

($\nu_0 > 1$, в силу условий § 1), если же A_0 не имеет таковых, то $(A_0 y_0, y_0) \leqslant 0$ и $\|y_0\|^2 \leqslant 1$, а потому, т. к. $\|H_i\| \leqslant B$ ($i = 1, 2, \ldots$)

$$|(H_i y_0, y_i)| \leqslant C^{1/2} |a_i|^{-1/2} |a_i (H_i y_i, y_i)|^{1/2}, \qquad C = \frac{B\nu_0}{\nu_0 - 1} \text{ или } B$$

и, в силу (6),

$$\sum |(H_i y_0, y_i)| \leqslant C^{1/2} \Big\{\sum |a_i|^{-1}\Big\}^{1/2}.$$

Введем теперь в G новую метрику по формуле

$$(7) \quad \varrho(a, a^{(1)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|c_k - c_k^{(1)}|}{1 + |C_k - C^{(1)}|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|a_i|} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{1}{2^k} \frac{|d_{ik} - d_{ik}^{(1)}|}{1 + |d_{ik} - d_{ik}^{(1)}|},$$

где $a = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$, $a^{(1)} = \{y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}, \ldots\}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ некоторая полная ортонормированная система элементов в X, $c_k = (y_0, e_k)$, $c_k^{(1)} = (y_0^{(1)}, e_k)$ ($k = 1, 2, \ldots$); $d_{ik} = (y_i, \varphi_k^{(i)})$, $d_{ik}^{(1)} = (y_i^{(1)}, \varphi_k^{(1)})$ ($k = 1, \ldots, \sigma_i$; $i = 1, 2, \ldots$) (легко видеть, что $\varrho(a, a^{(1)}) < +\infty$, в силу того, что $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1} < +\infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$). Нетрудно видеть, что множество G_1 компактно в себе в метрике (7). Покажем теперь,

что функционал $\Phi(a)$ непрерывен на G_1, в метрике (7). На основании (7) мы видим, что если $\varrho(a, a^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)} = c_k \ (k = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} d_{ik}^{(n)} = d_{ik} \ (k = 1, \ldots, \sigma_i;\ i = 1, 2, \ldots)$$

и наоборот. Имеют место равенства

$$V_i(a) = (H_i y_i, y_i) = \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{|d_{ik}|^2}{\varkappa_k^{(i)}},$$

$$W_i(a) = (H_i y_0, y_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma_i} c_k \frac{\bar{d}_{is}}{\varkappa_s^{(i)}} (e_k, \varphi_s^{(i)}).$$

Положим

$$W_{in}(a) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{\sigma_i} c_k \frac{\bar{d}_{is}}{\varkappa_s^{(i)}} (e_k, \varphi_s^{(i)}).$$

В силу вышеуказанного, $V_i(a)$ и $W_{in}(a)$ — непрерывные функционалы на G_1 в метрике (7). Кроме того, имеет место неравенство

$$|W_i(a) - W_{in}(a)| \leqslant \frac{K}{|a_i|^{1/2}} \Big\{\sum_{s=1}^{\sigma_i} |\varkappa_s^{(i)}|^{-1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |(e_k, \varphi_s^{(i)})|^2\Big\}^{1/2}, \ K = \frac{\nu_0}{\nu_0 - 1} \text{ или } 1,$$

откуда следует, что $\lim_{n\to\infty} W_{in}(a) = W_i(a)$ равномерно относительно a в G_1. Следовательно, $W_i(a)$ также непрерывный функционал на G_1 в метрике (7). Более того, вводя обозначения

$$F(a) = -(A_1 y_0, y_0), \qquad F_n(a) = -\sum_{k+s \leqslant n} c_s c_k (A_1 e_k, e_s)$$

найдем, что

$$|F(a) - F_n(a)| \leqslant K \Big\{\sum_{k+s>n} |(A_1 e_k, e_s)|^2\Big\}^{1/2}.$$

Отсюда, в силу конечности абсолютной нормы оператора A_1, также как и выше, следует непрерывность функционала $F(a)$ на G_1 в метрике (7). Из непрерывности рункционалов $V_i(a)$, $W_i(a)$ и $F(a)$ и доказанной выше сходимости рядов $\sum V_i(a)$ и $\sum W_i(a)$ равномерной относительно a на G_1, следует непрерывность функционала $\Phi(a)$ на G_1 в метрике (7). Тогда, как известно, $\Phi(a)$ достигает на G_1 экстремальных значений. Пусть $\Phi(a)$ достигает на элементе $a^{(1)}$ экстремума Φ_1 с наибольшим абсолютным значением. Тогда, как легко показать, $N(a^{(1)}) = 1$. Для того, чтобы применить к функционалу $\Phi(a)$ в гильбертовом пространстве G теорему Люстерника [13] покажем, что $\Phi(a)$ имеет дифференциал Фреше.

Пусть $a = \{\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots\} \in G_1$ и $h = \{h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots\} \in G$.

Тогда

$$\Phi(a+h) - \Phi(a) = L(h, a) + \Phi(h),$$

где

$$L(h, a) = 2\,\mathrm{Re}\Big\{-(A_1 h_0, \varphi) + \sum_{i=1}^{\infty}(H_i h_0, \psi_i) + \sum_{i=1}^{\infty}(H_i \varphi, h_i) + \sum_{i=1}^{\infty}(H_i \psi_i, h_i)\Big\}. \tag{8}$$

Но, в силу (6),

$$|(A_1 h_0, h_0)| \leqslant \|A_1\| K N(h),$$

$$|(H_i h_0, h_i)| \leqslant \Big\{|a_i|^{-1} \sum_{k=1}^{\sigma_i} |\varkappa_k^{(i)}|^{-1} \|h_0\|^2\Big\}^{1/2} \Big\{-a_i(H_i h_i, h_i)\Big\}^{1/2} \leqslant \tag{9}$$

$$\leqslant M^{1/2} \|h_0\| \, |a_i|^{-1/2} \Big\{a_i(H_i h_i, h_i)\Big\}^{1/2},$$

ибо

$$\sum_{k=1}^{\sigma_i} |\varkappa_k^{(i)}|^{-1} = |S_p(H_i)| \leqslant M \qquad (\text{см. } \S\, 1).$$

Тогда, в силу (6),

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(H_i h_0, h_i)\Big| \leqslant M^{1/2} K^{1/2} N(h) \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big\}^{1/2} \tag{10}$$

и

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(H_i h_i, h_i)\Big| \leqslant N(h) \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}. \tag{11}$$

На основании (9), (10) и (11), для любого $h \in G$,

$$|\Phi(h)| \leqslant \Big\{\|A_1\| K + 2(MK)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big)^{1/2} + \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big\} N(h)$$

и, так как $N(h) = \|h\|_G^2$, то $|\Phi(h)|\,\|h\|_G^{-1} \to 0$, при $\|h\|_G \to 0$. Кроме того, $L(h, a)$ — однородный и аддитивный функционал от h, непрерывность которого по норме $\|h\|_G$ следует из неравенств

$$|(-A_1 h_0, \varphi)| \leqslant \|A_1\| K \|h\|_G, \quad \Big|\sum_{i=1}^{\infty}(H_i \varphi, h_i)\Big| \leqslant (MK)^{1/2} \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big\}^{1/2} \|h\|_G,$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(H_i h_0, \psi_i)\Big| \leqslant (MK)^{1/2} \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big\}^{1/2} \|h\|_G, \quad \Big|\sum_{i=1}^{\infty}(H_i \psi_i, h_i)\Big| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big) \|h\|_G^2.$$

Следовательно, функционал $\Phi(a)$ имеет дифференциал Фреше и $d_F \Phi(a; h) = L(h, a)$.

Аналогично убедимся в том, что функционал $N(a)$ также имеет дифференциал Фреше равный линейному в G функционалу

$$L_1(h, a) = 2\,\mathrm{Re}\Big\{((E - A_0)\varphi, h_0) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i (H_i \psi_i, h_i)\Big\}, \tag{12}$$

ибо

$$N(a+h) - N(a) = L_1(h, a) + N(h), \qquad N(h)\,\|h\|_G^{-1} = \|h\|_G \to 0.$$

На основании теоремы Люстерника [13] об условном экстремуме функционала, так как $\Phi(a)$ достигает на элементе $a^{(1)} = \{\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots\}$ экстремума и $N(a^{(1)}) = 1$, существует такое вещественное число μ, что при любом $h \in G$

$$L(h, a^{(1)}) + \mu L_1(h, a^{(1)}) = 0. \tag{13}$$

Полагая в (13) $h = \{h_0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$, $h_0 \in \boldsymbol{X}$, в силу (8) и (12) найдем, что

$$\mathrm{Re}\Big(-A_1 \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} H_i \psi_i + \mu(E - A_0)\varphi, h_0\Big) = 0, \tag{14}$$

где ряд сходится в силу неравенств

$$\|H_i \psi_i\| = \sum_{k=1}^{\sigma_i} |\varkappa_k^{(i)}|^{-1} |(\psi_i, \varphi_k^{(i)})| \, \|\varphi_k^{(i)}\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{-a_i \sum_{k=1}^{\sigma_i} \varkappa_k^{(i)-1} |(\psi_i, \varphi_k^{(i)})|^2\Big\}^{1/2} \Big\{|a_i|^{-1} \sum_{k=1}^{\sigma_i} |\varkappa_k^{(i)}|^{-1}\Big\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M^{1/2} |a^{(i)}|^{-1/2} \Big\{-a_i (H_i \psi_i, \psi_i)\Big\}^{1/2} \quad \Big(\text{ибо } (H_i \psi_i, \psi_i) = \sum_{k=1}^{\sigma_i} \varkappa_k^{(i)-1} |(\psi_i, \varphi_k^{(i)})|^2\Big),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|H_i \psi_i\| \leqslant M^{1/2} \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big\}^{1/2} \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} -a_i (H_i \psi_i, \psi_i)\Big\}^{1/2} \leqslant M^{1/2} \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1}\Big\}^{1/2}.$$

В силу произвольности $h_0 \in \boldsymbol{X}$ из равенства (14) получим

$$-A_1\varphi+\sum_{i=1}^{\infty}H_i\psi_i+\mu(E-A_0)\varphi=0. \tag{15}$$

Полагая теперь в (13), $h=\{0,0,\ldots,0,h_k,0,\ldots\}$ $(k=1,2,\ldots)$ аналогично предыдущему найдем, что

$$H_k\varphi+(1-\mu a_k)H_k\psi_k=0 \quad (k=1,2,\ldots). \tag{16}$$

Умножая уравнения (15) и (16) справа соответственно на φ и ψ_i $(i=1,2,\ldots)$ и складывая найдем, что

$$\Phi(a^{(1)})+\mu N(a^{(1)})=0.$$

Отсюда, $\mu=-\Phi(a^{(1)})=-\Phi_1\neq 0$, ибо $N(a^{(1)})=1$.

Покажем теперь, что для всех $i=1,2,\ldots$, $1-\mu a_i\neq 0$. Допустим противное. Пусть для некоторого числа n, $1-\mu a_n=0$. Тогда число $\Phi_1=-\mu=-a_n^{-1}$ будет экстремальным значением функционала $\Phi(a)$ на G_1 с наибольшей абсолютной величиной. Рассмотрим элемент $a(\vartheta)\in G$, $a(\vartheta)=\{y_0,y_1,\ldots,y_n,\ldots\}$, где $y_0=(\gamma_n^{-1/2}\sin\vartheta)\varphi_1^{(n)}$, $y_1=\ldots=y_{n-1}=0$, $y_n=[(-a_n^{-1}\varkappa_1^{(n)})^{1/2}\cos\vartheta]\varphi_1^{(n)}$, $y_{n+1}=y_{n+2}=\ldots=0$, $\varphi_1^{(n)}=\varkappa_1^{(n)}H_n\varphi_1^{(n)}$, $\gamma_n=\big((E-A_0)\varphi_1^{(n)},\varphi_1^{(n)}\big)$. Тогда $N\big(a(\vartheta)\big)=\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta=1$ и

$$\Phi\big(a(\vartheta)\big)=-\gamma_n^{-1}\sin^2\vartheta(A_1\varphi_1^{(n)},\varphi_1^{(n)})+\gamma_n^{-1/2}\varkappa_1^{(n)-1}(-a_n^{-1}\varkappa_1^{(n)})^{1/2}\sin 2\vartheta-a_n^{-1}\cos^2\vartheta.$$

Следовательно, $a(\vartheta)\in G_1$ при любом ϑ и $\Phi\big(a(0)\big)=-a_n^{-1}$. С другой стороны,

$$\left.\frac{\partial\Phi\big(a(\vartheta)\big)}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=0}=2\gamma_n^{1/2}\varkappa_1^{(n)}(-a_n^{-1}\varkappa_1^{(n)})^{1/2}\neq 0.$$

Таким образом, в окрестности точки $\vartheta=0$ функция $\Phi\big(a(\vartheta)\big)$ принимает значения как больше так и меньше числа $\Phi\big(a(0)\big)=-a_n^{-1}$ и это число не может быть экстремальным значением на G_1 функционала $\Phi(a)$ с наибольшей абсолютной величиной. Полученное противоречие доказывает, что для любых $i=1,2,\ldots$, $1-\mu a_i\neq 0$. Тогда, в силу (16) и (15),

$$\varphi-A_0\varphi-\lambda_1\Big\{A_1\varphi+\lambda_1\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_1-a_i)^{-1}H_i\varphi\Big\}=0, \tag{17}$$

где $\lambda_1=\mu^{-1}=-\Phi_1^{-1}$. Покажем теперь, что $\varphi\neq 0$. Умножая (16) на ψ_k справа получим

$$(H_k\varphi,\psi_k)=-(1-\mu a_k)(H_k\psi_k,\psi_k) \quad (k=1,2,\ldots). \tag{18}$$

С другой стороны, умножая (16) на φ слева найдем, что

$$(H_k\varphi,\psi_k)=-(1-\mu a_k)^{-1}(H_k\varphi,\varphi) \quad (k=1,2,\ldots). \tag{19}$$

В силу (18) и (19),

$$(H_k\psi_k,\psi_k)=(\lambda_1-a_k)^{-2}\lambda_1^2(H_k\varphi,\varphi) \quad (k=1,2,\ldots).$$

Отсюда

$$\big((E-A_0)\varphi,\varphi\big)-\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\lambda_1-a_k)^{-2}\lambda_1^2(H_k\varphi,\varphi)=N(a^{(1)})=1, \tag{20}$$

откуда и следует, что $\varphi\neq 0$.

Следовательно, уравнение (17) показывает, что $\lambda=\lambda_1$ и $x=\varphi$ собственное значение и собственный элемент уравнения (2). На основании (20) следует, что

$$a_1=\{\varphi_1,\,-(\lambda_1-a_1)^{-1}\lambda_1\varphi_1,\,\ldots,\,-(\lambda_1-a_n)^{-1}\lambda_1\varphi_1,\ldots\}\in G_1 \quad (\varphi_1=\varphi)$$

и, как нетрудно вычислить, $\Phi(a_1)=-\lambda_1^{-1}=\Phi_1$.

Легко убедиться в том, что $\lambda=\lambda_1$ — наименьшее по абсолютной величине собственное значение уравнения (2). Действительно, если $\lambda=\lambda_k\neq\lambda_1$ — другое собственное значение и ему соответствует собственный элемент $x=\varphi_k$, удовлетворяющий условию нормировки (20), то элемент

$$a_k=\{\varphi_k,-(\lambda_k-a_1)^{-1}\lambda_k\varphi_k,\ldots,-(\lambda_k-a_n)^{-1}\lambda_k\varphi_k,\ldots\}\in G_1$$

и $\Phi(a_k)=-\lambda_k^{-1}$. Но, тогда $|\lambda_k|^{-1}=|\Phi(a_k)|\leqslant|\Phi_1|\equiv|\lambda_1|^{-1}$ и $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_k|$.

Допустим теперь, что мы нашли $n-1$ собственных значений уравнения (2) $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_{n-1}|$, которым соответствуют $n-1$ собственных функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}$, удовлетворяющих условиям вида (5)

$$\big((E-A_0)\varphi_i,\varphi_k\big)-\sum_{j=1}^{\infty}a_j(H_j\psi_{ji},\psi_{jk})=\delta_{ik}, \qquad \psi_{jk}=-\lambda_k(\lambda_k-a_j)^{-1}\varphi_k \tag{21}$$

$$(i,k=1,\ldots,n-1).$$

Рассмотрим подмножество $G_1^{(n)}\subset G_1$, элементы которого $a=\{y_0,y_1,\ldots,y_n,\ldots\}$ удовлетворяют условиям

$$\Psi_i(a)\equiv\operatorname{Re}\Big\{\big((E-A_0)\varphi_i,y_0\big)-\sum_{j=1}^{\infty}a_j(H_j\psi_{ji},y_j)\Big\}=0 \tag{22}$$

$$(i=1,\ldots,n-1).$$

Также, как и выше в случае функционала $\Phi(a)$, при помощи соответствующих оценок, легко убедиться в том, что функционалы

$\Psi_i(a)$ непрерывны на G_1 в метрике (7). Следовательно, $G_1^{(n)}$ — множество компактное в себе в метрике (7). Поэтому функционал $\Phi(a)$ достигает на $G_1^{(n)}$ экстремальных значений. Существует следовательно точка $a_n^{(0)} = \{\varphi_n^{(0)}, \psi_{1n}^{(0)}, \ldots, \psi_{kn}^{(0)}, \ldots\}$ такая, что $N(a_n^{(0)}) = 1$, $\Psi_i(a_n^{(0)}) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, на которой $\Phi(a)$ достигает экстремального значения Φ_n на множестве $G_1^{(n)}$ наибольшего по абсолютной величине. Если $\Phi(a) \not\equiv 0$ на $G_1^{(n)}$, то $\Phi_n \neq 0$.

Легко видеть, что $\Psi_i(a)$ — линейные непрерывные функционалы в гильбертовом пространстве G, ибо

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(H_j\psi_{ji}, y_j)\Big| \leqslant \|a\|_G, \qquad |((E-A_0)\varphi_i, y_0)| \leqslant \|E-A_0\| K \|a\|_G,$$

$$K = \frac{\nu_0}{\nu_0 - 1} \text{ или } 1.$$

Следовательно дифференциал Фреше $d_F\Psi_i(a; h) = \Psi_i(h)$. Тогда, в силу теоремы Люстерника [13], существуют вещественные постоянные $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ такие, что для любого $h \in G$,

$$L(h, a_n^{(0)}) + \mu L_1(h, a_n^{(0)}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \Psi_k(h) = 0,$$

где функционалы L и L_1 имеют вид (8) и (12).

Пользуясь произвольностью h, также как в предыдущем случае покажем, что из этого условия вытекают равенства

$$(23) \qquad -A_1\varphi_n^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} H_i\psi_{in}^{(0)} + \mu(\varphi_n^{(0)} - A_0\varphi_n^{(0)}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (E-A_0)\varphi_k = 0,$$

$$(24) \qquad H_j\varphi_n^{(0)} + (1-\mu a_j) H_j\psi_{jn}^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k a_j \lambda_k (\lambda_k - a_j)^{-1} H_j\varphi_k = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots).$$

Покажем сперва, что все $\mu_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Умножим для этого уравнение (23) справо на φ_i, а уравнения (24) на ψ_{ji} и сложим почленно по j воспользовавшись условиями (21); в полученном результате перейдем к сопряженным величинам. Складывая почленно два полученных равенства найдем, что

$$2\mu_i = \lambda_i^{-1} 2\operatorname{Re}\Big\{\big((E-A_0)\varphi_i, \varphi_n^{(0)}\big) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j\psi_{ji}, \psi_{jn}^{(0)})\Big\} \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Отсюда, так как $a_n^{(0)} \in G_1^{(n)}$, в силу (22), $\mu_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Следовательно уравнения (23) и (24) принимают вид уравнений (15) и (16) соответственно, откуда в случае, если $1 - \mu a_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$,

также как и выше заключаем, что $\mu = -\Phi_n \neq 0$ и $\lambda_n = \mu^{-1}$ и $\varphi_n^{(0)}$ — собственное значение и собственный элемент уравнения (2), нормированный условием вида (20).

Допустим теперь, что $\mu = a_p^{-1}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. Тогда, подставляя в уравнения (23) и (24), $\mu_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\mu = a_p^{-1}$ найдем, что

$$(25) \qquad \varphi_n^{(0)} - A_0\varphi_n^{(0)} - a_p\Big\{A_1\varphi_n^{(0)} + a_p \sum_{i=1}^{\infty (i\neq p)} (a_p - a_i)^{-1} H_i\varphi_n^{(0)}\Big\} + a_p H_p \psi_{pn}^{(0)} = 0,$$

$$H_p\varphi_n^{(0)} = 0.$$

Также как и выше найдем, что

$$(26) \qquad \big((E-A_0)\varphi_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)}\big) - \sum_{i=1}^{\infty (i\neq p)} a_i a_p^2 (a_p - a_i)^{-2} (H_i\varphi_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)}) -$$
$$- a_p (H_p\psi_{pn}, \psi_{pn}) = N(a_n^{(0)}) = 1.$$

Допуская, что $\varphi_n^{(0)} = 0$ из (25) получим $H_p\psi_{pn}^{(0)} = 0$, что противоречит равенству (26). Следовательно $\varphi_n^{(0)} \neq 0$ и равенства (25) показывают, что $\lambda_n = \mu^{-1} = a_p$ и $\varphi_n^{(0)}$ — собственное значение и собственный элемент в собом смысле уравнения (2). Итак $\lambda_n = -\Phi_n^{-1}$ и $\varphi_n^{(0)}$ — собственное значение и собственный элемент уравнения (2) (в обыкновенном или особом смысле). Более того, очевидно, что для любого n, $|\Phi_n| \leqslant |\Phi_{n-1}|$, а потому $|\lambda_{n-1}| \leqslant |\lambda_n|$. Кроме того, если $\lambda_n \neq \lambda_{n-1}$, то элемент $\varphi_n^{(0)}$ по отношению к предыдущим собственным элементам $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ удовлетворяет условиям обобщенной ортогональности вида (5). Если же например $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{n-s, s\leqslant n-1}$, то полагая

$$\varphi_n^{(1)} = \varphi_n^{(0)} + \alpha_1 \varphi_{n-1} + \ldots + \alpha_s \varphi_{n-s}, \qquad \psi_{jn}^{(1)} = \psi_{jn}^{(0)} + \alpha_1 \psi_{jn-1} + \ldots + \alpha_s \psi_{jn-s},$$

$$\varphi_n = \gamma_n^{-1/2}\varphi_n^{(1)}, \qquad \psi_{jn}^{(2)} = \gamma_n^{-1/2}\psi_{jn}^{(1)},$$

где

$$\psi_{jk} = -\lambda_k(\lambda_k - a_j)^{-1}\varphi_k, \quad \alpha_i = -\big((E-A_0)\varphi_{n-i}, \varphi_n^{(0)}\big) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j\psi_{jn-1}, \psi_{jn}^{(0)}),$$

$$\gamma_n = \big((E-A_0)\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(1)}\big) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j\psi_{jn}^{(1)}, \psi_{jn}^{(1)})$$

найдем, что элемент φ_n нормирован условием вида (20) или (26) и

$$\big((E-A_0)\varphi_{n-i}, \varphi_n\big) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j\psi_{jn-i}, \psi_{jn}^{(2)}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s).$$

Кроме того, можно подсчитать, что для $a_n = \{\varphi_n, \psi_{1n}, \ldots, \psi_{kn}, \ldots\}$, где $\psi_{jn} = -\lambda_n(\lambda_n - a_j)^{-1}\varphi_n$ (или $\psi_{jn} = -a_p(a_p - a_j)^{-1}\varphi_n$, $j \neq p$, $\psi_{pn} = \psi_{pn}^{(2)}$), в силу условий вида (20) или (26), $N(a_n) = 1$ и $\Phi(a_n) = -\lambda_n^{-1}$.

Таким образом, если $\Phi_n \neq 0$ для любого n, то мы получим счетное множество собственных значений уравнения (2), если же для какого нибудь n, $\Phi_n = 0$, то уравнение (2) имеет конечное число собственных значений. Указанный нами вариационный способ нахождения собственных значений уравнения (2) исчерпывает весь его спектр. Ниже мы убедимся, что если A_1 — неконечномерный оператор, то уравнение (2) имеет бесконечный спектр.

В результате вышепроведенных рассуждений доказана

Теорема 3. *Уравнение* (2) *имеет не более чем счетное множество собственных значений* $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$, *которым соответствуют собственные элементы* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, *нормированные условиями* (5), *обладающие следующими экстремальными свойствами: на множестве элементов* $a \in G$, *удовлетворяющих условиям*

$$\|a\|_G = 1, \qquad (a, a_k)_G = 0, \qquad a_k = \{\varphi_k, \psi_{1k}, \ldots, \psi_{sk}, \ldots\} \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

абсолютное значение функционала $\Phi(a)$ *достигает максимума равного* $|\lambda_n|^{-1}$, *которое достигается на элементе* $a_n = \{\varphi_n, \psi_{1n}, \ldots, \psi_{sn}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Заметим, что условия (5) показывают ортонормированность системы элементов $\{a_k\}$ в пространстве G

$$(a_i, a_k)_G = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Из полученных выше результатов непосредственно вытекает следующее предложение, которым мы воспользуемся ниже:

Лемма 1. *Если элемент* $a = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \in G$ *удовлетворяет условиям*

$$(27)\quad (a_i, a)_G = \big((E-A_0)\varphi_i, y_0\big) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j \psi_{ji}, y_j) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

то $|\Phi(a)| \leqslant |\lambda_n|^{-1} N(a)$.

4. Спектральные разложения по собственным элементам уравнения (2). Возьмем произвольные элементы $f, g_1, \ldots, g_k, \ldots \in \boldsymbol{X}$ такие, что $a_0 = \{f, g_1, \ldots, g_k, \ldots\} \in G$ и положим

$$f_k = \big((E-A_0)\varphi_k, f\big), \qquad g_{ik} = (H_i \psi_{ik}, g_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$\gamma_k = f_k - \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$u_n = f - \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\gamma}_k \gamma \varphi_k, \qquad v_{ni} = g_i - \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\gamma}_k \psi_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$a^{(n)} = \{u_n, v_{n1}, \ldots, v_{nk}, \ldots\}.$$

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i g_{ik}$ сходится в силу оценки

$$\sum_{i=p+1}^{p+m} |a_i g_{ik}| \leqslant \Big\{\sum_{i=p+1}^{p+m} -a_i (H_i g_i, g_i)\Big\}^{1/2} \Big\{\sum_{i=p+1}^{p+m} -a_i (H_i \psi_{ik}, \psi_{ik})\Big\}^{1/2}.$$

Покажем теперь, что $a^{(n)} \in G$. Для этого надо убедиться в том, что

$$N(a^{(n)}) = \big((E-A_0)u_n, u_n\big) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j v_{nj}, v_{nj}) < +\infty.$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j v_{nj}, v_{nj}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j g_j, g_j) - 2\,\mathrm{Re}\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n-1} \gamma_s a_j (H_j g_j, \psi_{js})\Big\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k,s=1}^{n-1} a_j \bar{\gamma}_k \gamma_s (H_j \psi_{jk}, \psi_{js})$$

и абсолютная сходимость рядов справа, в силу того, что $a_k = \{\varphi_k, \psi_{1k}, \ldots, \psi_{nk}, \ldots\} \in G$, следует из оценок

$$\sum_{j=p+1}^{p+m} \sum_{s=1}^{n-1} |\gamma_s a_j | H_j g_j, \psi_{js})| \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} |\gamma_s| \Big\{\sum_{j=p+1}^{p+m} -a_j (H_j g_j, g_j)\Big\}^{1/2},$$

$$\sum_{j=p+1}^{p+m} \sum_{k,s=1}^{n-1} |\bar{\gamma}_k \gamma_s a_j (H_j \psi_{jk}, \psi_{js})| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |\gamma_k|^2 \sum_{k=1}^{n-1} \Big\{\sum_{j=p+1}^{p+m} -a_j (H_j \psi_{jk}, \psi_{jk})\Big\}.$$

С другой стороны, в силу условий (5), для любого $i = 1, \ldots, n-1$

$$(a_i, a^{(n)})_G = f_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_{ji} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \Big\{\big((E-A_0)\varphi_i, \varphi_k\big) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j (H_j \psi_{ji}, \psi_{jk})\Big\} =$$

$$= \gamma_i - \gamma_i = 0.$$

Поэтому, в силу леммы 1, $|\Phi(a^{(n)})| \leqslant |\lambda_n|^{-1} N(a^{(n)})$. Как нетрудно вычислить

$$N(a^{(n)}) = \big((E-A_0)f, f\big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i (H_i g_i, g_i) - \sum_{k=1}^{n-1} |\gamma_k|^2 = N(a_0) - \sum_{k=1}^{n-1} |\gamma_k|^2.$$

Следовательно,

$$(28) \qquad |\Phi(a^{(n)})| \leqslant |\lambda_n|^{-1} N(a_0).$$

Вычисляя $\Phi(a^{(n)})$ найдем, что

$$\Phi(a^{(n)}) = -\Big(A_1 f - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1}\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big)(E-A_0)\varphi_k, f\Big) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re}\Big(H_i f - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_i\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big) H_i\psi_{ik}, g_i\Big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\Big(H_i g_i + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_i a_j (g_j, H_j\psi_{jk}) H_i\psi_{ik}, g_i\Big).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$ (если уравнение (2) имеет конечное число, например $n-1$, собственных значений, то как мы видели выше $\Phi(a^{(n)}) = 0$), в силу (28) и произвольности элементов $f \in \boldsymbol{X}$, $g_i \in \boldsymbol{X}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, найдем, что для любых элементов f, $g_i \in \boldsymbol{X}$

(29) $$\lim_{n\to\infty}\Big(A_1 f - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1}\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big)(E-A_0)\varphi_k, f\Big) = 0,$$

(30) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\Big(H_i g_i + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_i a_j (g_j, H_j\psi_{jk}) H_j\psi_{ik}, g_i\Big) = 0,$$

(31) $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\Big(H_i f - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_i\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big) H_i\psi_{ik}, g_i\Big) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

При помощи обычного способа, записывая равенство (29) для элемента $f^* = f + \varepsilon g$, где f и g произвольные элементы из $\boldsymbol{X}$, а ε — произвольное вещественное число найдем, что для любых f и $g \in \boldsymbol{X}$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(A_1 f - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1}\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big)(E-A_0)\varphi_k, g\Big) = 0.$$

Следовательно ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big)(E-A_0)\varphi_k$ слабо сходится в $\boldsymbol{X}$ к элементу $A_1 f$.

Записывая равенство (31) для элемента $f^* = if$ (где i — мнимая единица) найдем, что для любых f и $g \in \boldsymbol{X}$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(H_i f - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_i\big((f, (E-A_0)\varphi_k\big) H_i\psi_{ik}, g\Big) = 0,$$

а потому и

$$\lim_{n\to\infty}\Big(H_i g - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_i (g, H_i\psi_{ik})(E-A_0)\varphi_k, f\Big) = 0.$$

Последние два равенства показывают, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big) H_i\psi_{ik}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i (g, H_i\psi_{ik})(E-A_0)\varphi_k$$

сходятся слабо в $\boldsymbol{X}$ соответственно к элементам $H_i f$ и $H_i g$ для любых f и $g \in \boldsymbol{X}$ и $i = 1, 2, \ldots$

Выбирая произвольно два натуральных числа p и s и два элемента f и $g \in X$ и полагая в равенстве (30) $g_i = 0$, когда $i \neq p$, $i \neq s$, $g_p = f$, $g_s = g$ найдем, что

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\Big(H_p f + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_p^2 (f, H_p\psi_{pk}) H_p\psi_{pk}, f\Big) +$$

$$+\Big(H_s g + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_s^2 (g, H_s\psi_{sk}) H_s\psi_{sk}, g\Big) +$$

$$+2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_p a_s (f, H_p\psi_{pk})(H_s\psi_{sk}, g)\Big\} = 0.$$

Отсюда, для любых f и $g \in \boldsymbol{X}$

(32) $$\lim_{n\to\infty}\Big(H_i f + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-1} a_i^2 (f, H_i\psi_{ik}) H_i\psi_{ik}, f\Big) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

(33) $$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i a_j (f, H_i\psi_{ik})(H_i\psi_{jk}, g) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Из равенства (32), аналогично предыдущему, следует, что

(34) $$(H_i f, g) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i^2 (f, H_i\psi_{ik})(H_i\psi_{ik}, g) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Докажем теперь сильную сходимость в $\boldsymbol{X}$ рассмотренных выше рядов. Для этого нам надо будет доказать ряд вспомогательных предложений. Возьмем произвольное число p и положим

$$\gamma_n = \big((E-A_0)\varphi_n, f\big) - a_p(H_p\psi_{pn}, g) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$u = f - \sum_{n=1}^{k} \bar\gamma_n \varphi_n, \qquad u_i = \begin{cases} \sum_{n=1}^{k} \bar\gamma_n \psi_{in} \text{ при } i \neq p, \\ g + \sum_{n=1}^{k} \bar\gamma_n \psi_{pn} \text{ при } i = p, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$a = \{u, u_1, \ldots, u_n, \ldots\}.$$

Тогда, также как и выше убедимся в том, что $N(\alpha) < +\infty$. Поэтому, имеет место неравенство

$$0 \leqslant N(\alpha) = \big((E-A_0)u, u\big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(H_i u_i, u_i) =$$

$$= \big((E-A_0)f, f\big) - a_p(H_p g, g) - 2\sum_{n=1}^{k}|\gamma_n|^2 + \sum_{n=1}^{k}|\gamma_n|^2.$$

Отсюда,

$$\sum_{n=1}^{k}|\gamma_n|^2 \leqslant \big((E-A_0)f, f\big) - a_p(H_p g, g).$$

В силу последнего неравенства и произвольности f и g убеждаемся в справедливости следующих предложений:

Лемма 2. *Для любого* $f \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty}\big|\big((E-A_0)\varphi_n, f\big)\big|^2 \leqslant \big((E-A_0)f, f\big)$.

Лемма 3. *Для любого* $g \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_i(H_i\psi_{in}, g)|^2 \leqslant -a_i(H_i g, g)$, $i = 1, 2, \ldots$

Из лемм 2 и 3 непосредственно следуют:

Лемма 4. *Для любого* $f \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}\big|\big((E-A_0)\varphi_n, f\big)\big|^2 < +\infty$.

Лемма 5. *Для любого* $f \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}|a_i(H_i\psi_{in}, f)|^2 < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Как известно, имеет место (см. [14], а также [15])

Лемма 6. *Если* H — *линейный, ограниченный положительный оператор, действующий в* X, *то*

$$|(Hx, Hx)| \leqslant \|H\|(Hx).$$

Теорема 4. *Для любого* $f \in X$

$$A_1 f = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big)(E-A_0)\varphi_k,$$

где ряд сходится по норме в X.

Рассмотрим последовательность

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(E-A_0)\varphi_k, \quad \alpha_k = \lambda_k^{-1}\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу леммы 4, $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 < +\infty$. Если $m > n$, то в силу леммы 6 и условий (5),

$$\|u_m - u_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(E-A_0)\varphi_k\Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|E-A_0\|\Big(\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(E-A_0)\varphi_k, \sum_{s=n+1}^{m}\alpha_s\varphi_s\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \|E-A_0\|\Big\{\Big(\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(E-A_0)\varphi_k, \sum_{s=n+1}^{m}\alpha_s\varphi_s\Big) -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty}a_j\Big(H_j\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k\psi_{jk}, \sum_{s=n+1}^{m}\alpha_s\psi_{js}\Big)\Big\} =$$

$$= \|E-A_0\|\Big\{\sum_{k=n+1}^{m}|\alpha_k|^2\Big[\big((E-A_0)\varphi_k, \varphi_k\big) - \sum_{j=1}^{\infty}a_j(H_j\psi_{jk}, \psi_{jk})\Big] +$$

$$+ \sum_{k,s=n+1}^{m}{}^{(k\neq s)}\alpha_k\bar{\alpha}_s\Big[\big((E-A_0)\varphi_k, \varphi_s\big) - \sum_{j=1}^{\infty}a_j(H_j\psi_{jk}, \psi_{js})\Big]\Big\} =$$

$$= \|E-A_0\|\sum_{k=n+1}^{m}|\alpha_k|^2.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в X и элемент $A_1 f$, являясь ее слабым пределом, является также и сильным пределом.

Аналогично, при помощи леммы 4 и леммы 5 соответственно, доказываются следующие предложения:

Теорема 5. *Для любого* $f \in X$

$$H_i f = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}a_i\big(f, (E-A_0)\varphi_k\big)H_i\psi_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где ряды сходятся по норме в X.

Теорема 6. *Для любого* $g \in X$

$$H_i g = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}a_i(g, H_i\psi_{ik})(E-A_0)\varphi_k \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где ряды сходятся по норме в X.

Как следствие из теоремы 4 вытекает

Теорема 7. *Если A_1 — неконечномерный оператор, то уравнение* (2) *имеет счетное множество собственных значений, сгущающихся на бесконечности.*

Теорема 8. *Если* $a = \{x, y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \in G$, *то*

$$A_1 x - \sum_{i=1}^{\infty} H_i y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} (a, a_k)_G (E - A_0) \varphi_k, \tag{35}$$

$$H_i x + H_i y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} (a, a_k)_G H_i \psi_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{36}$$

где $a_k = \{\varphi_k, \psi_{1k}, \ldots, \psi_{nk}, \ldots\}$ *и ряды справа сходятся по норме в* $\boldsymbol{X}$.

Напомним, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} H_i y_i$ доказана в § 3. В силу теорем 4 и 6, для любого $g \in \boldsymbol{X}$

$$\Big(A_1 x - \sum_{i=1}^{\infty} H_i y_i, g\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \big(x, (E - A_0)\varphi_k\big)\big((E - A_0)\varphi_k, g\big) - \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i (y_i, H_i \psi_{ik}) \big((E - A_0)\varphi_k, g\big). \tag{37}$$

Покажем, что в полученном двойном ряде можно поменять порядок суммирования. Имеют место следующие оценки:

$$\Big|\sum_{i=p+1}^{p+m} - \lambda_k^{-1} a_i (H_i y_i, \psi_{ik}) \big((E - A_0)\varphi_k, g\big)\Big| \leqslant |\alpha_k| \Big\{\sum_{i=p+1}^{p+m} - a_i (H_i y_i, y_i)\Big\}^{1/2},$$

$$\Big|\sum_{i=p+1}^{p+m} \sum_{k=1}^{n} - \lambda_k^{-1} a_i (H_i y_i, \psi_{ik}) \big((E - A_0)\varphi_k, g\big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\sum_{i=p+1}^{p+m} - a_i (H_i y_i, y_i)\Big\}^{1/2} \Big\{\Big((E - A_0) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \varphi_s\Big) - \\ - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Big(H_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_{ik}, \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \psi_{is}\Big)\Big\}^{1/2} =$$

$$= \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2\Big\}^{1/2} \Big\{\sum_{i=p+1}^{p+m} - a_i (H_i y_i, y_i)\Big\}^{1/2},$$

$$\alpha_k = \lambda_k^{-1} \big((E - A_0)\varphi_k, g\big) \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ сходится в силу леммы 4.

Полученные оценки показывают, что в ряде

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} a_i (y_i, H_i \psi_{ik}) \big((E - A_0)\varphi_k, g\big)$$

можно поменять порядок суммирования и, что ряд сходится равномерно относительно n. Следовательно в формуле (37) можно поменять порядок суммирования, после чего найдем, что для любого $g \in \boldsymbol{X}$

$$\Big(A_1 x - \sum_{i=1}^{\infty} H_i y_i, g\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} (a, a_k)_G \big((E - A_0)\varphi_k, g\big).$$

Последнее равенство показывает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} (a, a_k)_G (E - A_0)\varphi_k$ сходится слабо в $\boldsymbol{X}$ к элементу $A_1 x - \sum\limits_{i=1}^{\infty} H_i y_i$. Но, так как $a \in G$, а условие (5) показывает ортонормированность системы элементов $a_k = \{\varphi_k, \psi_{1k}, \ldots, \psi_{nk}, \ldots\}$ в G то в силу неравенства Бесселя, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(a, a_k)_G|^2 \leqslant \|a\|_G^2$ и тем более $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} |(a, a_k)_G|^2 < +\infty$. На основании этого неравенства, расуждая также как при доказательстве теоремы 4, убеждаемся в том, что наш ряд, стоящий справа в формуле (35) сильно сходится к левой части.

Переходим к доказательству равенства (36). В силу теоремы 6 и равенств (33) и (34), для любого $g \in \boldsymbol{X}$

$$(H_i x + H_i y_i, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i \big(x, (E - A_0)\varphi_k\big)(H_i \psi_{ik}, g) - \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i a_j (y_j, H_j \psi_{jk})(H_i \psi_{ik}, g).$$

Также, как и выше, нетрудно убедиться в том, что в полученном двойном ряде можно поменять порядок суммирования, после чего для любого $g \in \boldsymbol{X}$ получим, что

$$(H_i x + H_i y_i, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} a_i (a, a_k)_G (H_i \psi_{ik}, g).$$

отсюда, также как в предыдущем случае убеждаемся в сильной сходимости ряда в формуле (36) к левой части.

Теорема 9. *Если λ не есть собственное значение уравнения* (2), *то единственное решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$x = (E-A_0)^{-1}y + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda)^{-1}(y, \varphi_k)\varphi_k,$$

где ряд сходится по норме в X.

Действительно, если x — решение уравнения (1), соответствующее данному регулярному значению λ, то

$$(E-A_0)x = \lambda(A_1x - \sum_{i=1}^{\infty}H_iz_i) + y, \qquad z_i = (\lambda-a_i)^{-1}\lambda x \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что $\alpha = \{x, z_1, \ldots, z_n, \ldots\} \in G$. Действительно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} -a_i(H_iz_i, z_i) < +\infty$, ибо существует число $L > 0$ такое, что $|\lambda(\lambda-a_i)^{-1}| \leqslant |a_i|^{-1}L$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и в силу наших условий (см. § 1),

$$|a_i(H_iz_i, z_i)| \leqslant |a_i|\,|\lambda(\lambda-a_i)^{-1}|^2\|H_i\|\|x\|^2 \leqslant |a_i|^{-1}L^2B\|x\|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{-1} < +\infty.$$

Тогда, в силу равенства (35),

$$(E-A_0)x = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}(\alpha, \alpha_k)_G(E-A_0)\varphi_k + y, \tag{38}$$

где, как известно,

$$(\alpha, \alpha_k)_G = \big(x, (E-A_0)\varphi_k\big) - \sum_{i=1}^{\infty}a_i(z_i, H_i\psi_{ik}).$$

Но так как x — решение уравнения (1), то

$$x\big(x, (E-A_0)\varphi_k\big) = \lambda(A_1x, \varphi_k) - \lambda^2\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda-a_i)^{-1}(H_ix, \varphi_k) + (y, \varphi_k). \tag{39}$$

С другой стороны, так как φ_k удовлетворяет уравнению (2) при $\lambda = \lambda_k$ и $H_i\varphi_k = -\lambda_k(\lambda_k-a_i)^{-1}H_i\psi_{ik}$ (напомним, что если λ — особое собственное значение, напр. $\lambda_k = a_p$, то $H_p\varphi_k = 0$), то

$$\lambda(A_1x, \varphi_k) = \lambda_k^{-1}\lambda\big(x, (E-A_0)\varphi_k\big) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}(x, H_i\psi_{ik}). \tag{40}$$

Тогда, в силу (39) и (40), подставляя в (39) значения $H_i\varphi_k$ найдем, что

$$(\lambda_k-\lambda)\Big\{\big(x, (E-A_0)\varphi_k\big) + \sum_{i=1}^{\infty}a_i\lambda(\lambda-a_i)^{-1}(x, H_i\psi_{ik})\Big\} = \lambda_k(y, \varphi_k).$$

Отсюда

$$(\alpha, \alpha_k)_G = \lambda_k(\lambda_k-\lambda)^{-1}(y, \varphi_k).$$

Подставляя это значение в формулу (38) и действуя на обе части полученного равенства оператором $(E-A_0)^{-1}$ убеждаемся в справедливости теоремы 9.

5. Условия полноты системы собственных элементов уравнения (2). В этом параграфе также как и выше через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, $\alpha_n = \{\varphi_n, \psi_{1n}, \ldots, \psi_{kn}, \ldots\}$ мы обозначаем собственные значения и собственные элементы уравнения (2), удовлетворяющие условиям (5).

Теорема 10. *Если для элемента* $\alpha = \{x, y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \in G$

$$A_1x - \sum_{i=1}^{\infty}H_iy_i = 0, \qquad H_ix + H_iy_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{41}$$

то $(\alpha, \alpha_n)_G = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Так как φ_n — собственный элемент, соответствующий λ_n и $H_i\psi_{in} = -(\lambda_n-a_i)^{-1}\lambda_nH_i\varphi_n$ если $\lambda_n \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, если же $\lambda_n = a_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ (собственное значение в особом смысле), $H_p\varphi_n = 0$, то имеют место равенства

$$\big((E-A_0)\varphi_n, x\big) = \lambda_n\Big[(A, \varphi_n, x) - \sum_{i=1}^{\infty}(H_i\psi_{in}, x)\Big],$$

$$a_i(H_i\psi_{in}, y_i) = \lambda_n[(H_i\psi_{in}, y_i) + (H_i\varphi_n, y_i)] \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в силу (41), для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$(\alpha_n, \alpha)_G = \big((E-A_0)\varphi_n, x\big) - \sum_{i=1}^{\infty}a_i(H_i\psi_{in}, y_i) =$$

$$= \lambda_n\Big((\varphi_n, A_1x - \sum_{i=1}^{\infty}H_iy_i\Big) - \lambda_n\sum_{i=1}^{\infty}(\psi_{in}, H_ix + H_iy_i) = 0.$$

Систему элементов $\{\alpha_n\}$ будем называть *полной* в G, если не существует ни одного элемента $\alpha \in G$, отличного от нульэлемента пространства G, ортогонального ко всем α_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 11. *Для того, чтобы система элементов $a_n = \{\varphi_n, \psi_{1n}, \ldots, \psi_{kn}, \ldots\}$ была полна в G, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (41) имели только нулевое решение $x = y_1 = \ldots = y_n = \ldots = 0$.*

Действительно, пусть система уравнений (41) имеет только нулевое решение и существует элемент $a \neq 0$ такой, что $(a, a_n)_G = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда, в силу теоремы 8, элемент a удовлетворяет системе (41) и будет ее ненулевым решением, что невозможно. Допустим теперь, что система $\{a_n\}$ полна в G и пусть система (41) имеет ненулевое решение $a \neq 0$. Тогда, в силу теоремы 10, $(a, a_n)_G = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что невозможно.

Теорема 12. *Для того, чтобы система элементов $\{a_n\}$ была полна в G, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $a = \{x, y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \in G$ имели место равенства*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(a, a_n)_G\varphi_n, \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty}(a, a_n)_G\psi_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{42}$$

где ряды сходятся по норме в $\boldsymbol{X}$.

Докажем прежде всего, что ряды в формулах (42) сходятся по норме в $\boldsymbol{X}$. В силу условий (5) имеет место равенство

$$\sum_{k,s=p+1}^{p+m}\gamma_k\bar{\gamma}_s\Big[((E-A_0)\varphi_k, \varphi_s) - \sum_{i=1}^{\infty}a_i(H_i\psi_{ik}, \psi_{is})\Big] = \sum_{k=p+1}^{p+m}|\gamma_k|^2,$$

где $\gamma_k = (a, a_k)_G$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Это равенство, в силу абсолютной сходимости кратного бесконечного ряда (см. начало § 4), можно переписать в виде

$$\Big(\sum_{k=p+1}^{p+m}\gamma_k(E-A_0)\varphi_k, \sum_{s=p+1}^{p+n}\gamma_s\varphi_s\Big) - \sum_{i=1}^{\infty}a_i\Big(\sum_{k=p+1}^{p+m}\gamma_k H_i\psi_{ik}, \sum_{s=p+1}^{p+m}\gamma_s\psi_{is}\Big) = \sum_{k=p+1}^{p+m}|\gamma_k|^2. \tag{43}$$

Отсюда следует, что

$$\Big(\sum_{k=p+1}^{p+m}\gamma_k(E-A_0)\varphi_k, \sum_{s=p+1}^{p+m}\gamma_s\varphi_s\Big) \leqslant \sum_{k=p+1}^{p+m}|\gamma_k|^2.$$

Тогда, в силу леммы 6 (так как $E-A_0$ — положительный оператор),

$$\Big\|\sum_{k=p+1}^{p+m}\gamma_k(E-A_0)\varphi_k\Big\|^2 \leqslant \|E-A_0\|\sum_{k=p+1}^{p+m}|\gamma_k|^2.$$

Следовательно,

$$\Big\|\sum_{k=p+1}^{p+m}\gamma_k\varphi_k\Big\|^2 = \Big\|(E-A_0)^{-1}\sum_{k=p+1}^{p+m}\gamma_k(E-A_0)\varphi_k\Big\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \big\{\|E-A_0\|^{-1}\big\}^2\|E-A_0\|\sum_{k=p+1}^{p+m}|\gamma_k|^2.$$

Последнее равенство показывает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\varphi_k$ сходится по норме в $\boldsymbol{X}$, ибо $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2 < +\infty$.

Для доказательства сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\psi_{ik}$ заметим, что $\psi_{ik} = -(\lambda_k - a_i)^{-1}\lambda_k\varphi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, если a_i не есть особое собственное значение, в противном случае эти равенства справедливы для всех k, кроме того значения, для которого $\lambda_k = a_i$ и, что существует число $M_i > 0$ такое, что для всех n, $|\lambda_n(\lambda_n - a_i)^{-1}| \leqslant M_i$. Тогда положив $\nu_n = -\gamma_n(\lambda_n - a_i)^{-1}\lambda_n$ видим, что $|\nu_n| \leqslant M_i|\gamma_n|$ и потому $\sum_{n=1}^{\infty}|\nu_n|^2 \leqslant \leqslant M_i^2\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2 < +\infty$. Отсюда, в силу вышедоказанной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\varphi_n$ (вследствие того, что $\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2 < +\infty$) вытекает сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\psi_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots$

Перейдем к доказательству утверждений теоремы 12. Пусть система $\{a_n\}$ полна в G и допустим, что для некоторого $a \in G$

$$x - \sum_{n=1}^{\infty}(a, a_n)_G\varphi_n = x^*, \qquad y_i - \sum_{n=1}^{\infty}(a, a_n)_G\psi_{in} = y_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

где $a^* = \{x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, \ldots\} \neq 0$ (не есть нульэлемент пространства G). Легко видеть, что

$$N(a^*) = N(a) - \sum_{n=1}^{\infty}|(a, a_n)_G|^2 < +\infty.$$

Следовательно $a^* \in G$. С другой стороны, для любого $n = 1, 2, \ldots$, в силу ортонормированности системы элементов $\{a_n\}$,

$$(a^*, a_n)_G = (a, a_n)_G - \sum_{k=1}^{\infty}(a, a_k)_G(a_k, a_n)_G = (a, a_n)_G - (a, a_n)_G = 0.$$

Отсюда, в силу полноты системы $\{a_n\}$ в G, следует, что $a^* = 0$, то есть $x^* = y_1^* = \ldots = y^* = \ldots = 0$.

Допустим теперь, что равенства (42) имеют место для любого $a \in G$. Пусть для некоторого $a = \{x, y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \neq 0$ (a не есть нуль-элемент пространства G), $(a, a_n)_G = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда, в силу равенств (42), $x = y_1 = \ldots = y_n = \ldots = 0$. Полученное противоречие доказывает полноту системы $\{a_n\}$ в G.

Как следствие теорем 11 и 12 получается

Теорема 13. *Для того чтобы для любого элемента* $a = \{x, y_1, \ldots \ldots, y_n, \ldots\} \in G$ *имели место равенства* (42), *ряды в которых сходятся по норме в* $\boldsymbol{X}$, *необходимо и достаточно чтобы уравнения* (41) *имели только нулевое решение.*

Из этого предложения непосредственно вытекает следующее достаточное условие полноты системы собственных элементов $\{\varphi_n\}$ уравнения (2) в пространстве $\boldsymbol{X}$:

Теорема 14. *Если уравнения* (41) *имеют только нулевое решение, то система собственных элементов* $\{\varphi_n\}$ *уравнения* (2) *полна в пространстве* $\boldsymbol{X}$.

Последние две теоремы имеют важное значение для применения спектральной теории уравнений вида (1) к исследованию граничных задач в теории дифференциальных уравнений с граничными условиями, коэффициенты которых линейно зависят от параметра.

Цитированная литература

[1] C. Miranda, *Su di una classe di equazioni integrali il cui nucleo è funzione del parametro*, Rend. Circ. Mat. Palermo 60 (1936), стр. 286-304.

[2] — *Nuovi contributi alla teoria delle equazioni integrali lineari con nucleo dipendente dal parametro*, Mem. Reale Acad. Sci. Torino, ser. 2^a, 70 (1939-40), стр. 23-51.

[3] R. Iglisch, *Ueber lineare Integralgleichungen mit vom Parameter abhängigen Kern*, Math. Annalen, B. 117, н. 1 (1939), стр. 127-139.

[4] B. Mania, *Autovalori di nuclei dipendenti dal parametro*, Annali Scuola norm. sup. Pisa, (2), 8 (1939), стр. 89-104.

[5] Д. Ф. Харазов, *О собственных значениях мероморфных ядер интегральных уравнений*, Сообщ. АН Груз. ССР, т. VII 7 (1946), стр. 413-420.

[6] Д. Ф. Харазов, *О распределении собственных значений интегральных уравнений с рациональными относительно параметра ядрами*, ДАН СССР 71, 6 (1950), стр. 1033-1035.

[7] I. Tamarkin, *On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter*, Annals of Math. 28, 2 (1927), стр. 127-152.

[8] Д. Ф. Харазов, *К теории линейных уравнений в пространствах Банаха*, Труды Тбилисского мат. ин-та, 19 (1953), стр. 163-171.

[9] — *Некоторые вопросы спектральной теории операторов, мероморфно зависящих от параметра*, Труды Тбилисского мат. ин-та 19 (1955), стр. 145-168.

[10] H. Müller, *Eine neue Methode zur Behandlung nichtlinear Eigenwertaufgaben*, Math. Zeit. 70, 5 (1959), стр. 381-406.

[11] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. V, М.-Л., 1959, стр. 438-440.

[12] Д. Ф. Харазов, *Об одном классе операторов, нелинейно зависящих от параметра*, ДАН СССР 112, 5 (1957), стр. 819-822.

[13] Л. А. Люстерник, *Об условных экстремумах функционалов*, Матем. сборник 43, 3 (1934), стр. 390-401.

[14] W. Reid, *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space*, Duke Math. Journ. 18, 1 (1951), стр. 41-56.

[15] Д. Ф. Харазов, *Некоторые вопросы теории линейных симметризуемых операторов*, Матем. сборник 42 (84), 2 (1957), стр. 129-178.

АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР
ТБИЛИССКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. А. М. РАЗМАДЗЕ

Reçu par la Rédaction le 8. 3. 1960