STUDIA MATHEMATICA, T. XX. (1961)

Zur Operatorenrechnung für Funktionen einer diskreten Veränderlichen

von

L. BERG (Halle/Saale)

In den Arbeiten [1] und [2] findet man die Grundlagen einer Operatorenrechnung, bei der das Produkt zweier Funktionen abweichend von [5] durch

$$F(t)\cdot G(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-\tau)G(\tau)\,d\tau \tag{1}$$

definiert wird. Die Funktionen $F(t)$, $G(t)$ sind dabei der Menge $\mathfrak{F}$ aller für $t\geqslant 0$ erklärten einmal stetig differenzierbaren Funktionen zu entnehmen oder etwas allgemeiner der Menge $\mathfrak{G}$ aller stückweise stetig differenzierbaren Funktionen, d. h. aller Funktionen, die für $t\geqslant 0$ bis auf isolierte Punkte t_ν stetig differenzierbar sind, in denen lediglich die Größen $g(t_\nu+0)$, $g(t_\nu-0)$, $g'(t_\nu+0)$, $g'(t_\nu-0)$ zu existieren brauchen. Beide Mengen bilden dann mit der gewöhnlichen Addition und der Multiplikation (1) je einen (kommutativen) Ring. In dem Ring $\mathfrak{G}$ ist speziell die Menge aller Treppenfunktionen der Gestalt $F(t)=F([t])$, d. h.

$$F(t)=a_n \quad \text{für} \quad n\leqslant t<n+1, \tag{2}$$

als Teilring enthalten. Interessieren wir uns für die Operatorenrechnung der Treppenfunktionen, so könnten wir sie durch Spezialisierung aus der allgemeinen Theorie gewinnen. Es sprechen aber verschiedene Gründe dafür, die Operatorenrechnung der Treppenfunktionen unabhängig von der allgemeinen Operatorenrechnung zu entwickeln. Es handelt sich hierbei nämlich nicht nur um einen Spezialfall, sondern um ein elementares Modell der Operatorenrechnung, bei dem Integral- und Differentialrechnung durch die Summen- bzw. Differenzenrechnung ersetzt sind. Die Hilfsmittel sind somit viel einfacher als im allgemeinen Fall und die Beweise wesentlich kürzer (z. B. beim Satz von Titchmarsh), so daß man alles viel besser übersehen und daher auch neue Sätze beweisen kann (vgl. den Schluß von Punkt 7 und von Punkt 10 sowie [2]). Außerdem ist keineswegs alles völlig analog, sondern es gibt auch einige wesentliche Unterschiede zur allgemeinen Operatorenrechnung (vgl. Punkt 9). Als Anwendungsgebiet kommen in erster Linie die linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten für ganzzahlige Argumente (Rekursionen) in Frage. Da eine Treppenfunktion der Gestalt (2) bereits durch die Funktionswerte $F(n) = F(n+0)$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ eindeutig bestimmt ist, werden wir im folgenden nicht von Treppenfunktionen, sondern von Funktionen einer diskreten Veränderlichen sprechen (vgl. auch [7], [8], [9], [10]).

1. Der Ring der Funktionen einer diskreten Veränderlichen. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{d}$ der komplexwertigen Funktionen $a, b, c, \ldots$ der diskreten Veränderlichen $n = 0, 1, 2, \ldots$, bei denen wir das Argument n in der Regel nicht mitschreiben. Den Funktionswert an einer festen Stelle $n = m$ nennen wir auch die *m-te Komponente* dieser Funktion. Wollen wir die einzelnen Komponenten der Funktion a genauer angeben, so benutzen wir die Schreibweise $a = a_n$ oder auch

$$a = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}.$$

Wie bereits in Punkt 4 von [1] erklären wir jetzt zwischen den einzelnen Elementen der Menge $\mathfrak{d}$ so zwei Rechenoperationen, daß $\mathfrak{d}$ ein (kommutativer) *Ring* wird. Die Addition definieren wir wie üblich komponentenweise

$$(a+b)_n = a_n + b_n \tag{3}$$

und die Multiplikation in Analogie zu (1) gemäß

$$(ab)_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu b_{n-1-\nu}, \tag{4}$$

wobei die zweite Summe in (4) für $n = 0$ durch Null zu ersetzen ist. Dabei wollen wir folgende Vereinbarung treffen: Schreiben wir bei einem Produkt mindestens einen Faktor ohne Argument, etwa ab, $a_n b$ oder ab_n, so verstehen wir darunter stets das Produkt (4). Geben wir dagegen bei beiden Faktoren die Argumente mit an, so wollen wir das Produkt (4) in der Form $a_n \cdot b_n$ schreiben, da wir unter $a_n b_n$ ohne Malpunkt die komponentenweise Multiplikation

$$a_n b_n = \{a_0 b_0, a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots\} \tag{5}$$

verstehen. Durch Vergleich von (4) und (5) sehen wir, daß *bei beiden Produkten die nullten Komponenten übereinstimmen*:

$$(ab)_0 = a_0 b_0, \tag{6}$$

während für die höheren Komponenten

$$(ab)_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_0 b_0, \quad (ab)_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 - a_0 b_1 - a_1 b_0, \ldots$$

gilt. Der Nachweis der Ringgesetze ist sehr einfach. Sie folgen im wesentlichen aus den Beziehungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} = \sum_{\mu=0}^{n} a_{n-\mu} b_\mu$$

mit $\mu = n - \nu$ und

$$\sum_{\mu=0}^{n} \Big(\sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu b_{\mu-\nu} \Big) c_{n-\mu} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-\nu} b_\lambda c_{n-\nu-\lambda} \Big)$$

mit $\lambda = \mu - \nu$ und ganz entsprechenden Umformungen, da die Ringgesetze für die Addition unmittelbar klar sind.

2. Einige spezielle Produkte. Schreiben wir die Gleichung (4) in der Form

$$ab = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu (b_{n-\nu} - b_{n-1-\nu}) + a_n b_0, \tag{7}$$

so erhalten wir speziell für die konstanten Funktionen $b_n \equiv \alpha$, wobei α eine von n unabhängige Zahl ist,

$$(\alpha a)_n \equiv \alpha \cdot a_n = \alpha a_n. \tag{8}$$

Somit *stimmen die Produkte* (4) *und* (5) *überein, wenn mindestens ein Faktor konstant ist*, während für beliebige Funktionen nur (6) gilt. Weiterhin folgt aus (7) für $b_n = n$ bzw. $b_n = n+1$

$$na = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu, \qquad (n+1)a = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu, \tag{9}$$

so daß $n+1$ der *Summationsoperator* ist, für den wegen (4) auch

$$(n+1)ab = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}, \qquad nab = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu b_{n-1-\nu} \tag{10}$$

gilt. Führen wir jetzt die Funktion

$$d = \{1, 0, 0, 0, \ldots\} \tag{11}$$

ein, so erhalten wir aus (7), wenn wir dort $a = d$ wählen und b_n durch b_{n+1} ersetzen,

$$db_{n+1} = b_{n+1} - b_n + db_0\ (^1). \tag{12}$$

(1) Diese Formel wurde in [1] mit einem falschen Index angegeben. (Auch in der Formel (15) von [1] sollte es eigentlich unter dem Integralzeichen $F([\tau])$ heißen, obwohl $F([t])$ dort nicht falsch ist).

Folglich ist d im wesentlichen der *Differenzenoperator* (für absteigende Differenzen), der wegen (9) für $a = d$ oder (12) für $b = n$ zum Summationsoperator invers ist:

$$d(n+1) = 1. \tag{13}$$

Mit Hilfe der Funktion

$$v = 1-d \tag{14}$$

kann (12) auch in der Form

$$b_n = db_0 + vb_{n+1} \tag{15}$$

geschrieben werden. Folglich ist v der *Verschiebungsoperator* mit der Eigenschaft

$$v\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} = \{0, a_0, a_1, a_2, \ldots\}, \tag{16}$$

für dessen Potenzen

$$v^m = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ Stellen}}, 1, 1, 1, \ldots\} \tag{17}$$

gilt. Die Formel (15) läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

$$b_n = d(b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + \ldots + b_{m-1} v^{m-1}) + v^m b_{n+m}. \tag{18}$$

Den Beweis von (18) kann man entweder mit Hilfe der vollständigen Induktion führen, indem man die Beziehung

$$b_{n+m} = db_m + vb_{n+m+1}$$

heranzieht, die sich durch Verallgemeinerung von (15) ergibt, oder unter Beachtung der Tatsache, daß alle Komponenten von dv^m gleich Null sind, bis auf die m-te Komponente, die gleich 1 ist, und daß $v^m b_{n+m} = b_n$ ist für $n \geqslant m$.

3. Asymptotisches Verhalten für grosse n. Nunmehr wollen wir zeigen, daß nicht nur für $n = 0$ der Zusammenhang (6) zwischen den beiden Produkten (4) und (5) besteht, sondern daß ein entsprechender Zusammenhang unter einer Zusatzvoraussetzung auch für $n \to \infty$ besteht: *Existieren* $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \alpha$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = \beta$ *und konvergiert auch* $B = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu - b_{\nu-1}|$, *so gilt*

$$\lim_{\nu\to\infty} (ab)_\nu = \alpha\beta. \tag{19}$$

Dieser Satz besitzt natürlich auch ein Analogon in bezug auf das Produkt (1).

Zum Beweis schreiben wir (7) in der Form

$$(ab)_n = a_n b_0 + \sum_{\mu=1}^{n} a_{n-\mu}(b_\mu - b_{\mu-1})$$

und ziehen hiervon die Gleichung

$$\alpha\beta = \alpha b_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha(b_\mu - b_{\mu-1})$$

ab. Dann erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung für $n \geqslant m$

$$|(ab)_n - \alpha\beta| \leqslant |a_n - \alpha||b_0| + \sum_{\mu=1}^{m} |a_{n-\mu} - \alpha||b_\mu - b_{\mu-1}| + \\ + \sum_{\mu=m+1}^{n} |a_{n-\mu}||b_\mu - b_{\mu-1}| + |\alpha| \sum_{\mu=m+1}^{\infty} |b_\mu - b_{\mu-1}|.$$

Wegen $a_\nu \to \alpha$ gibt es eine Zahl A, so daß $|a_\nu| < A$ ist für alle ν. Jetzt wählen wir bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ erstens m so groß, daß

$$\sum_{\mu=m+1}^{\infty} |b_\mu - b_{\mu-1}| < \frac{\varepsilon}{4A}$$

ist, und dann bei festem m ein n_0 so groß, daß für alle $n > n_0$

$$|a_n - \alpha||b_0| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |a_{n-m} - \alpha| B < \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Dann ist $|(ab)_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ und (19) bewiesen.

Daß (19) nicht allgemein gilt, zeigt folgendes Gegenbeispiel: $a_0 = 0$, $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ für $n > 0$, $b_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu/\sqrt{\nu}$. Hier ist $\alpha\beta = 0$, aber nach (7)

$$(ab)_n = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\nu(n-\nu)}}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} |(ab)_n| = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi.$$

4. Übergang zum Quotientenkörper. Gegeben seien zwei nicht identisch verschwindende Elemente $a, b \in \mathfrak{D}$. Dann gibt es zwei Indizes μ und ν mit $a_n = 0$ für $n < \mu$, $a_\mu \neq 0$ und $b_n = 0$ für $n < \nu$, $b_\nu \neq 0$, und aus (4) folgt für die $(\mu+\nu)$-te Komponente des Produktes ab

$$(ab)_{\mu+\nu} = a_\mu b_\nu \neq 0.$$

Dies bedeutet, daß *das Produkt* (4) *keine Nullteiler besitzt*, so daß zu $\mathfrak{D}$ der bis auf Isomorphie eindeutige *Quotientenkörper* $\mathfrak{Q}$ existiert, dessen Elemente *Operatoren* genannt werden. Der Nachweis der Nullteilerfreiheit ist hier fast trivial, während er bei dem Produkt (1) bekanntlich auf den Satz von Titchmarsh hinausläuft. Der Übergang von $\mathfrak{d}$ zu $\mathfrak{Q}$ ist eine echte Erweiterung, da beispielsweise die Gleichung

$$qv = 1 \tag{20}$$

wegen $v_0 = 0$ und (6) in $\mathfrak{d}$ nicht lösbar ist.

Wir wollen jetzt versuchen, die Elemente von $\mathfrak{d}$ durch den durch (20) definierten Operator q auszudrücken. Aus (20), (14) und (13) erhalten wir zunächst

$$v = \frac{1}{q}, \quad d = \frac{q-1}{q}, \quad n = \frac{1}{q-1}. \tag{21}$$

Die Gleichung (15) nimmt jetzt die Form

$$b_{n+1} = qb_n - (q-1)b_0 \tag{22}$$

an und (18)

$$b_{n+m} = q^m b_n - (q-1)\sum_{\mu=0}^{m-1} b_{m-\mu-1}q^\mu. \tag{23}$$

Speziell für die Funktion $a = \alpha^n \equiv \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$ erhalten wir aus (22) unmittelbar

$$\alpha^n = \frac{q-1}{q-\alpha}. \tag{24}$$

Diese Formel ist für $\alpha = 1$ eine Identität. Für $\alpha = 0$ besagt sie wegen (21) $0^n = d$. Wählen wir $\alpha = \varrho e^{i\varphi}$, so erhalten wir aus (24) durch Trennung in Real- und Imaginärteil

$$\varrho^n \cos n\varphi = \frac{(q-1)(q-\varrho\cos\varphi)}{q^2-2q\varrho\cos\varphi+\varrho^2}, \qquad \varrho^n \sin n\varphi = \frac{(q-1)\varrho\sin\varphi}{q^2-2q\varrho\cos\varphi+\varrho^2}. \tag{25}$$

Weiterhin erhalten wir aus (24) durch Quadrierung und Multiplikation mit $n = 1/(q-1)$ nach (10)

$$\frac{q-1}{(q-\alpha)^2} = n\cdot\alpha^n\cdot\alpha^n = \sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha^\nu\alpha^{n-1-\nu} = n\alpha^{n-1}$$

und allgemein, durch vollständige Induktion,

$$\frac{q-1}{(q-\alpha)^{m+1}} = \binom{n}{m}\alpha^{n-m}. \tag{26}$$

Diese Formel liefert speziell für $\alpha = 1$

$$n^{\cdot m} = \binom{n}{m}, \tag{27}$$

wobei wir mit $n^{\cdot m}$ die Potenzen von n in bezug auf die Multiplikation (4) bezeichnen.

5. Differenzengleichungen. Mit Hilfe der zuvor aufgestellten Beziehungen sind wir auch umgekehrt in der Lage, jede echt gebrochene rationale Funktion $R(q)$ von q durch Funktionen von n auszudrücken, indem wir die Funktion $\frac{1}{q-1}R(q)$ in Partialbrüche zerlegen. Diese Tatsache findet bei der Auflösung *linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten* der Form

$$a_m y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n \tag{28}$$

$(a_m a_0 \neq 0)$ mit den gegebenen *Anfangswerten*

$$y_0, y_1, \ldots, y_{m-1} \tag{29}$$

ihre Anwendung. Aus (28) und (29) folgt nämlich wegen (23)

$$\begin{aligned} &g(q)y_n \\ &= f_n + (q-1)\{(a_m q^{m-1} + \ldots + a_1)y_0 + \ldots + (a_m q + a_{m-1})y_{m-2} + a_m y_{m-1}\} \end{aligned} \tag{30}$$

mit

$$g(q) = a_m q^m + a_{m-1}q^{m-1} + \ldots + a_1 q + a_0. \tag{31}$$

Sind speziell alle Anfangswerte (29) gleich Null und findet man durch Partialbruchzerlegung von $1/g(q)$

$$\frac{q-1}{g(q)} = g_n,$$

so lautet die Lösung von (30)

$$y_n = n\cdot g_n\cdot f_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} g_{n-1-\nu}f_\nu. \tag{32}$$

Verschwinden die Anfangswerte (29) nicht alle, so muß man in (30) noch den in den geschweiften Klammern stehenden Ausdruck berücksichtigen. Dies wollen wir einmal bei folgendem Beispiel durchführen

$$y_{n+5} - 2y_{n+3} + 2y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

mit

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 9, \quad y_3 = -2, \quad y_4 = 23.$$

Hier ist $g(q) = (q-1)^2(q+2)(q^2+1)$ und

$$y_n = (q-1)\frac{9q^2-2q+5}{g(q)}.$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$y_n = \frac{2}{q-1} + \frac{q-1}{q+2} - \frac{(q-1)q}{q^2+1},$$

so daß wir nach (21), (24) und (25)

$$y_n = 2n + (-2)^n - \cos\frac{n\pi}{2}$$

erhalten.

6. Grenzübergänge. *Eine Folge $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{d}$ nennen wir gegen das Element $a \in \mathfrak{d}$ konvergent, wenn für jede einzelne Komponente*

$$\lim_{k\to\infty} a_\nu^{(k)} = a_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

gilt. Diese „Konvergenzdefinition in $\mathfrak{d}$" ist mit den Rechenoperationen in $\mathfrak{d}$ verträglich, d. h. es gilt

$$\lim_{k\to\infty}(a^{(k)}+b^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} a^{(k)} + \lim_{k\to\infty} b^{(k)}, \quad \lim_{k\to\infty} a^{(k)}b^{(k)} = (\lim_{k\to\infty} a^{(k)})(\lim_{k\to\infty} b^{(k)}), \tag{34}$$

sofern die einzelnen Grenzwerte auf den rechten Seiten existieren. Die Konvergenzdefinition für die Elemente aus $\mathfrak{d}$ läßt sich folgendermaßen auf die Elemente von Ω übertragen:

Eine Folge $r^{(k)}$ von Elementen aus Ω heißt gegen $r = a/b$ konvergent, wenn es eine Darstellung $r^{(k)} = a^{(k)}/b^{(k)}$ gibt mit $a^{(k)} \to a$, $b^{(k)} \to b \neq 0$ nach der vorhergehenden Definition. Dieser „Konvergenzbegriff in Ω" besitzt folgende Eigenschaften:

(a) *Der Grenzwert ist von der speziellen Darstellung von $r^{(k)}$ unabhängig.* Gilt nämlich auch $r^{(k)} = c^{(k)}/d^{(k)}$ mit $c^{(k)} \to c$, $d^{(k)} \to e \neq 0$, so folgt aus $a^{(k)}d^{(k)} = c^{(k)}b^{(k)}$ für $k \to \infty$ nach (34) $ae = cb$ oder $a/b = c/e$.

(b) *Aus $r^{(k)} \to r$ und $s^{(k)} \to s \neq 0$ folgt $r^{(k)}/s^{(k)} \to r/s$*, so daß die Konvergenzdefinition mit den Rechenregeln in Ω verträglich ist, da natürlich auch die Beziehungen (34) für Elemente aus Ω gelten.

Zum Beweis sei $r^{(k)} = a^{(k)}/b^{(k)}$ mit $a^{(k)} \to a$, $b^{(k)} \to b \neq 0$ und $s^{(k)} = c^{(k)}/d^{(k)}$ mit $c^{(k)} \to c \neq 0$, $d^{(k)} \to e \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{r^{(k)}}{s^{(k)}} = \frac{a^{(k)}d^{(k)}}{b^{(k)}c^{(k)}} \to \frac{ae}{bc} = \frac{r}{s}.$$

(c) *Jede in $\mathfrak{d}$ konvergente Folge $a^{(k)}$ konvergiert auch in Ω*, wie die Zerlegung $a^{(k)} = a^{(k)}/1$ zeigt. Der Grenzwert ist in beiden Fällen derselbe.

(d) *Es gibt Folgen $a^{(k)}$ von Elementen aus $\mathfrak{d}$, die zwar in Ω konvergieren, aber nicht in $\mathfrak{d}$*, der Grenzwert kann dabei in $\mathfrak{d}$ liegen oder auch nicht. Aus der Umformung

$$a^n = \frac{q-1}{q-a} = \frac{\frac{d}{a}}{\frac{1}{a} - v}$$

(vgl. (21) und (24)) folgt nämlich beispielsweise für $a \to \infty$ in Ω

$$\lim_{a\to\infty} a^n = 0, \tag{35}$$

wobei der Grenzwert in $\mathfrak{d}$ liegt. Ein anderes Beispiel lautet

$$\lim_{a\to\infty}(1-a^{n+1}) = q,$$

wie die Umformung

$$1 - a^{n+1} = \frac{q-aq}{q-a} = q\,\frac{1-\frac{1}{a}}{1-\frac{q}{a}}$$

zeigt. Hier liegt der Grenzwert nicht in $\mathfrak{d}$.

(e) *Jedes Element von Ω ist als Grenzwert von Elementen aus $\mathfrak{d}$ darstellbar.* Ist nämlich $r = a/b$ ein beliebiges Element aus Ω, so ist offenbar

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a}{b+\varepsilon d} = r.$$

Jedes Element der Form $a/(b+\varepsilon d)$ mit $\varepsilon \neq -b_0$ ist aber ein Element aus $\mathfrak{d}$, da das Gleichungssystem (4) bei gegebener linker Seite und gegebenen b_ν nach den a_ν auflösbar ist, wenn $b_0 \neq 0$ ist.

Schreiben wir jetzt die Beziehung (18) oder die damit gleichbedeutende Beziehung (23) in der Form

$$b_n = \left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{b_\mu}{q^\mu} + \frac{b_{n+m}}{q^m},$$

so können wir den Grenzübergang $m \to \infty$ durchführen. Aus (17) folgt sofort $\lim\limits_{m\to\infty} b_{n+m}/q^m = 0$. Folglich erhalten wir, da b_n von m unabhängig ist,

$$b_n = \left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{b_\mu}{q^\mu}. \tag{36}$$

7. Analytische Funktionen. Betrachten wir die der Funktion b_n zugeordnete Reihe

$$B(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{z^\mu}, \tag{37}$$

wobei z eine komplexe Veränderliche ist, so stellt sie im Falle der Konvergenz eine in der Umgebung des unendlich fernen Punktes reguläre analytische Funktion dar. Konvergiert die Reihe nicht, so gibt es nach einem bekannten Satz (vgl. [3], S. 29-31), den wir im nächsten Punkt noch einmal beweisen wollen, eine in einer rechten Halbebene analytische Funktion mit der asymptotischen Entwicklung

$$B(z) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{z^\mu}, \tag{38}$$

d. h.

$$B(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{b_\mu}{z^\mu} + O\left(\frac{1}{z^m}\right) \tag{39}$$

für $|z| \to \infty$ und beispielsweise $\Re z \geqslant 1$. Wie in [4] sagen wir dann, daß $B(z)$ eine *asymptotische Summe* der Reihe $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} b_\nu/z^\nu$ ist und daß diese Reihe gegen $B(z)$ *asymptotisch konvergiert*. Die im Falle der (gewöhnlichen) Konvergenz durch (37) definierte Funktion $B(z)$ genügt offenbar ebenfalls der Beziehung (39) und kann daher auch in der Form (38) geschrieben werden. Umgekehrt ist $B(z)$ durch (38) natürlich nicht eindeutig bestimmt, da man zu $B(z)$ beispielsweise noch die Funktion $e^{-\sqrt{z}}$ additiv hinzufügen kann. Daher wollen wir *zwei Funktionen, deren Differenz* $D(z) = O(1/z^m)$ *ist, für jedes* m *als gleich ansehen* (vgl. [4]).

Ein Vergleich von (38) mit (36) legt es nahe, den Funktionen $B(z)$ noch Funktionen $b(z)$ gemäß

$$b(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) B(z) \tag{40}$$

zuzuordnen. Man kann dann leicht nachrechnen, daß die Menge der Funktionen $b(z)$ der Form (40) mit (39) bei der zuvor erwähnten Gleichheitsdefinition und der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen Ring bildet, der zu $\mathfrak{b}$ *isomorph* ist. Da man nämlich asymptotische Reihen miteinander multiplizieren darf, gilt beispielsweise unter Beachtung von (4)

$$a(z)b(z) \sim \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu b_{\nu-\mu} z^{-\nu} \sim \left(1 - \frac{1}{z}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} (ab)_\nu z^{-\nu}.$$

Damit sind aber auch die zugehörigen Quotientenkörper isomorph. Identifizieren wir isomorphe Elemente miteinander, so können wir $z = q$ und allgemeiner

$$b(q) = b_n \tag{41}$$

setzen. Die Richtigkeit dieser Beziehung finden wir beispielsweise im Falle $b_n \equiv 1$ wegen

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{q^\nu} = 1$$

für $|q| > 1$ bestätigt.

Allgemein können wir jetzt einen Quotienten $a(q)/b(q)$ mit $b_0 = \ldots = b_{m-1} = 0$, $b_m \neq 0$ in der Form

$$\frac{a(q)}{b(q)} = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{q^\nu}}{\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{q^\mu}} = c_{-m} q^m + c_{-m+1} q^{m+1} + \ldots + c_{-1} q + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{q^\nu}$$

schreiben, wobei die Reihen nach der Konvergenzdefinition in Ω stets konvergieren, wenn q als Operator aufgefaßt wird, aber natürlich keineswegs (im gewöhnlichen Sinne) zu konvergieren brauchen und nur als asymptotische Entwicklungen zu verstehen sind, wenn man q als komplexe Veränderliche deutet. Ein beliebiges Element des Quotientenkörpers hat somit die Form *Polynom in* q *plus Element von* $\mathfrak{b}$, was man auch ohne Benutzung von Reihen direkt einsehen kann. Insbesondere ergibt sich hierbei, daß *eine Potenz* q^a *nur dann ein Element von* Ω *sein kann, wenn* a *eine ganze Zahl ist.*

Jetzt läßt sich leicht beweisen, daß *ein Element* $c_n \in \mathfrak{b}$, *dessen zugehörige Potenzreihe* (36) *den Konvergenzradius Null besitzt, nicht als Quotient* $c_n = a_n : b_n$ *aus Elementen mit konvergenten Reihen dargestellt werden kann.* Sind nämlich $A(q)$ und $B(q)$ für $q = \infty$ regulär, so kann $c(q) = A(q)/B(q)$ in $q = \infty$ höchstens einen Pol besitzen. Wegen $c(q) = O(1)$ für $|q| \to \infty$ mit $\Re q \geqslant 1$ muß dann $q = \infty$ sogar eine reguläre Stelle von $c(q)$ sein und die zugehörige Potenzreihe im Widerspruch zur Voraussetzung einen positiven Konvergenzradius besitzen. Damit haben wir in der Operatorenrechnung der Funktionen eiener diskreten Veränderlichen einen allgemeinen Satz bewiesen, der in der Operatorenrechnung der Funktionen einer kontinuierlichen Veränderlichen bisher nur für die spezielle Funktion e^{t^2} bekannt war (vgl. [6]).

8. Asymptotische Konvergenz. Nunmehr wollen wir den bereits im vorhergehenden Punkt benutzten Satz über die asymptotische Konvergenz in der Form beweisen, wie wir ihn hier in der Operatorenrechnung benötigen. Wir haben also zu zeigen, daß es *zu beliebig vorgegebenen Zahlen* b_n *eine analytische Funktion* $B(z)$ *gibt mit* (39). Zu diesem Zweck bestimmen wir zu den gegebenen b_n Zahlen a_ν und c_ν so, daß für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{z^m} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\mu}{(z+c_\mu)^\mu} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \tag{42}$$

gilt für $|z| \to \infty$ und außerdem $c_\mu \geqslant 0$ ist sowie

$$\frac{|a_\mu|}{|z+c_\mu|^\mu} < \frac{1}{2^\mu |z|^{\mu-1}} \tag{43}$$

für $\Re z \geqslant 1$ und $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ Die Ungleichungen (43) sind bei gegebenen a_μ erfüllt, wenn wir etwa $c_\mu = 2^\mu |a_\mu|$ wählen. Da nämlich diese Behauptung für $a_\mu = 0$ trivial ist, können wir $a_\mu \neq 0$ annehmen. Setzen wir dann $z = c_\mu \zeta$, so ist (43) eine Folgerung aus der Ungleichung

$$\left|\frac{\zeta}{\zeta+1}\right| < \sqrt[\mu]{|\zeta|}$$

für $\Re\zeta > 0$. Diese Ungleichung ist aber offensichtlich erfüllt, da für $|\zeta| \geqslant 1$ in der rechten Halbebene $|\zeta/(\zeta+1)| < 1$ ist und für $|\zeta| < 1$ dort die Ungleichungen $|\zeta| \leqslant \sqrt[\mu]{|\zeta|}$ und $|\zeta+1| > 1$ bestehen.

Führen wir jetzt auf der rechten Seite von (42) für hinreichend große $|z|$ die Entwicklung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\mu}{(z+c_\mu)^\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\mu}{z^\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\mu}{\nu} \left(\frac{c_\mu}{z}\right)^\nu$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{z^m} \sum_{\mu=1}^{m} \binom{-\mu}{m-\mu} c_\mu^{m-\mu} a_\mu + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

mit $m = \mu + \nu$ durch, so haben wir die a_μ wegen $\binom{-\mu}{\nu} = \binom{m-1}{\mu-1}(-1)^\nu$ aus dem Gleichungssystem

$$b_m = a_m + \sum_{\mu=1}^{m-1} \binom{m-1}{\mu-1} (-1)^{m-\mu} c_\mu^{m-\mu} a_\mu \tag{44}$$

zu bestimmen. Unter Beachtung von $c_\mu = 2^\mu |a_\mu|$ ist dies in eindeutiger Weise rekursiv möglich. Mit den so bestimmten Größen a_μ und c_μ ist die Reihe

$$B(z) = b_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{a_\mu}{(z+c_\mu)^\mu} \tag{45}$$

für $\Re z \geqslant 1$ gleichmäßig konvergent und stellt dort eine analytische Funktion dar, die außerdem die Eigenschaft (39) besitzt. Damit ist $B(z)$ eine asymptotische Summe der auf der rechten Seite von (38) stehenden Reihe.

Es sei nochmals erwähnt, daß wir auf die auf der rechten Seite von (36) stehenden Reihe den Begriff der asymptotischen Konvergenz oder der Konvergenz in $\mathfrak{d}$ anzuwenden haben, je nachdem, ob wir q als komplexe Veränderliche oder als Operator auffassen. *Beide Begriffe sind offenbar äquivalent*, da wir die nach den beiden Konvergenzbegriffen ermittelten Reihensummen nach den Ausführungen im vorhergehenden Punkt miteinander identifizieren können. Man kann dies auch leicht durch eine direkte Rechnung bestätigen. Wenden wir nämlich in

$$b(q) = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(b_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{a_\mu}{(q+c_\mu)^\mu}\right)$$

die Formeln (21) und (26) an, so erhalten wir

$$b(q) = b_0 d + v \sum_{\mu=1}^{n+1} \binom{n}{\mu-1} (-1)^{n-\mu+1} c_\mu^{n-\mu+1} a_\mu .$$

Hieraus folgt wegen (44) $b(q) = b_0 d + b_{n+1} v$ und schließlich wegen (15) $b(q) = b_n$.

9. Differenzengleichungen in mehreren Veränderlichen. In Punkt 5 hatten wir Differenzengleichungen in einer unabhängigen Veränderlichen betrachtet. Ganz analog können wir natürlich auch Differenzengleichungen in mehreren unabhängigen Veränderlichen betrachten, die in der Operatorenrechnung der Funktionen einer kontinuierlichen Veränderlichen den partiellen Differentialgleichungen entsprechen. Anstelle einer allgemeinen Theorie wollen wir hier lediglich ein spezielles Beispiel betrachten, bei dem sich schon der Hauptunterschied zu den partiellen Differentialgleichungen zeigt. Gegeben sei die Gleichung

$$y_{n+1}(m+2) = y_n(m) \tag{46}$$

mit den Nebenbedingungen

$$y_0(m) = 0 \quad \text{und} \quad y_n(0) = a_n, \quad y_n(1) = b_n \tag{47}$$

für $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ Die Funktionen a_n und b_n sind gegeben, $y_n(m)$ ist die gesuchte Funktion. Damit sich die Bedingungen (47) nicht widersprechen, muß $a_0 = b_0 = 0$ sein. Wenden wir jetzt auf (46) die Formel (22) an und beachten wir die erste der Bedingungen (47), so erhalten wir

$$q y_n(m+2) = y_n(m). \tag{48}$$

Diese Gleichung ist jetzt nur noch eine Differenzengleichung in bezug auf eine einzige Veränderliche, so daß wir das Argument n nicht mehr mitzuschreiben brauchen und kurz $y_n(m) = y(m)$ setzen können. Als Nebenbedingungen treten nur noch die beiden letzten der Bedingungen (47)

$$y(0) = a, \quad y(1) = b \tag{49}$$

auf. Ohne nochmalige Heranziehung der Operatorenrechnung machen wir jetzt zur Auflösung der Gleichung (48) den Ansatz $y(m) = \lambda^m$. Die Größe λ muß dann der Gleichung

$$q\lambda^2 = 1 \tag{50}$$

genügen, aus der durch formale Auflösung $\lambda = \pm 1/\sqrt{q}$ hervorgeht. Wie wir bereits in Punkt 7 festgestellt haben, gibt es in $\mathfrak{Q}$ keine Operatoren dieser Gestalt, d. h. *die Gleichung* (50) *ist in* $\mathfrak{Q}$ *irreduzibel*. Wir können aber bekanntlich den Erweiterungskörper $\mathfrak{Q}(1/\sqrt{q})$ von $\mathfrak{Q}$ betrachten, in dem die allgemeine Lösung von (48)

$$y(m) = q^{-m/2}\left(c^{(1)} + (-1)^m c^{(2)}\right) \tag{51}$$

existiert, und versuchen, die willkürlichen von m unabhängigen Größen $c^{(1)}$ und $c^{(2)}$ so zu bestimmen, daß $y(m)$ ein Element von $\mathfrak{d}$ wird und die Nebenbedingungen (49) erfüllt. Zu diesem Zweck lösen wir das Gleichungssystem

$$c^{(1)} + c^{(2)} = a, \quad c^{(1)} - c^{(2)} = b\sqrt{q}$$

auf, aus dem wir sofort

$$c^{(1)} = \tfrac{1}{2}\left(a + b\sqrt{q}\right), \quad c^{(2)} = \tfrac{1}{2}\left(a - b\sqrt{q}\right)$$

erhalten. Führen wir diesen Ausdruck in (51) ein, so ergibt sich

$$y(m) = q^{-m/2}\left(\frac{1+(-1)^m}{2}a + \frac{1-(-1)^m}{2}b\sqrt{q}\right)$$

oder

$$y(2m) = \frac{a}{q^m}, \quad y(2m+1) = \frac{b}{q^m}. \tag{52}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $y(m)$ *tatsächlich ein Element von* $\mathfrak{d}$ ist und wegen $1/q = v$ sieht man auch sofort, daß (52) die einzige Lösung von (46), (47) ist. Dieses Beispiel lehrt zugleich, daß hier andere Verhältnisse vorliegen als bei den partiellen Differentialgleichungen in der allgemeinen Operatorenrechnung. Dort ist nämlich die entsprechende Aufgabe unlösbar (vgl. [5], S. 260).

10. Der Zusammenhang mit den Funktionen einer kontinuierlichen Veränderlichen. Wie bereits in der Einleitung betont wurde, ist die vorliegende Operatorenrechnung ein Spezialfall der gewöhnlichen Operatorenrechnung, wobei der Zusammenhang durch (2) hergestellt wird. Somit muß sich auch der Operator q durch den Operator p ausdrücken lassen. Da $v = 1/q$ wegen (17) für $m = 1$ mit dem Verschiebungsoperator $v_1(t)$ gleichbedeutend ist (vgl. (6) in [1]), erhalten wir wegen $v_\lambda(t) = e^{-\lambda p}$ (vgl. etwa Punkt 3 in [1]) die gewünschte Beziehung

$$q = e^p. \tag{53}$$

Ersetzen wir in allen hier auftretenden Formeln q durch e^p, so können wir die Ergebnisse unmittelbar in die gewöhnliche Operatorenrechnung übernehmen. Beispielsweise erhalten wir aus (39), (40) und (41)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{a_\mu}{q^\mu} + O\left(\frac{1}{q^m}\right) = (1-e^{-p})\sum_{\mu=0}^{m-1} e^{-\mu p}a_\mu + O(e^{-mp})$$

und dasselbe Ergebnis ergibt sich im Falle (2) wegen

$$p\int_0^m e^{-p\tau}F([\tau])\,d\tau = p\sum_{\mu=0}^{m-1}\int_\mu^{\mu+1} e^{-p\tau}a_\mu\,d\tau = (1-e^{-p})\sum_{\mu=0}^{m-1}e^{-\mu p}a_\mu$$

auch aus

$$F(t) = p\int_0^m e^{-p\tau}F(\tau)\,d\tau + O(e^{-mp}), \tag{54}$$

wobei wir p und q nach Punkt 7 von [2] auf reelle Werte beschränken können. Nebenbei haben wir die Beziehung

$$p\int_0^m e^{-p\tau}F([\tau])\,d\tau = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{F(\mu)}{q^\mu} \tag{55}$$

bewiesen, in der auch $m \to \infty$ streben darf. *Hier erweist es sich als günstig, daß in den Formeln* (36) *und* (54) *bereits der Vorfaktor* $\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ *bzw.* p *auftritt.*

Da eine Funktion $F(t)$ mit (2) die Darstellung

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu - a_{\nu-1})v_\nu(t)$$

mit $a_{-1} = 0$ besitzt, erhalten wir für das Produkt mit der Funktion

$$G(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty}(b_\mu - b_{\mu-1})v_\mu(t)$$

wegen $v_\nu(t)\cdot v_\mu(t) = v_{\nu+\mu}(t)$

$$F(t)\cdot G(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{m}(a_\nu - a_{\nu-1})(b_{m-\nu} - b_{m-\nu-1})v_m(t).$$

Setzen wir

$$F(t)\cdot G(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(c_m - c_{m-1})v_m(t),$$

so folgt in Übereinstimmung mit (4)

$$c_m = \sum_{\mu=0}^{m}(c_\mu - c_{\mu-1}) = \sum_{\nu=0}^{m}(a_\nu - a_{\nu-1})\sum_{\mu=\nu}^{m}(b_{\mu-\nu} - b_{\mu-\nu-1}) = \sum_{\nu=0}^{m}(a_\nu - a_{\nu-1})b_{m-\nu}. \tag{56}$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, daß das Produkt (1) im vorliegenden Spezialfall gerade in (4) übergeht.

Abschließend wollen wir noch zeigen, daß der am Schluß von Punkt 7 bewiesene Satz ebenfalls in die allgemeine Operatorenrechnung übernommen werden kann: *Eine Funktion $H(t)$ mit $H(t) = H([t])$, deren zugehörige Potenzreihe*

$$H(t) = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu q^{-\nu}$$

mit $c_\nu = H(\nu)$ für alle q divergiert, kann auch nicht als Quotient $H(t) = F(t):G(t)$ aus Funktionen mit konvergenten Laplace-Integralen dargestellt werden. Angenommen, es gäbe eine solche Darstellung, dann könnten wir sogar annehmen, daß $F(t)$ und $G(t)$ stetig sind und einer Exponentialabschätzung genügen, da wir andernfalls nur eine Erweiterung mit $1/(p-p_0)$ bei hinreichend großem p_0 vorzunehmen brauchten. Aus

$$H(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(c_\nu - c_{\nu-1})v_\nu(t)$$

mit $c_{-1} = 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit $G(t)$

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{[t]}(c_\nu - c_{\nu-1})G(t-\nu)$$

und somit speziell für $t = n$

$$F(n) = \sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu - c_{\nu-1})G(n-\nu).$$

Hieraus ist durch Vergleich mit (56) ersichtlich, daß aus $H(t) = F(t):G(t)$ und $H(t) = H([t])$ auch die Darstellung $H(t) = F([t]):G([t])$ folgt. Bei den Funktionen $F([t])$ und $G([t])$ reduzieren sich aber die Laplace-Integrale wegen (55) auf Potenzreihen, die wegen $F = O(e^{p_1 t})$ und $G = O(e^{p_2 t})$ einen positiven Konvergenzradius haben. Die Unmöglichkeit einer Darstellung durch Funktionen dieser Art wurde aber bereits in Punkt 7 bewiesen. Damit haben wir auch im vorliegenden Fall einen Widerspruch erhalten. Auf Grund des soeben bewiesenen Satzes kennen wir jetzt neben der bereits aus [6] bekannten Funktion e^{t^2} eine *ganze Klasse von weiteren Funktionen*, die durch die Theorie der konvergenten Laplace-Integrale nicht erfaßt werden können.

Zitatennachweis

[1] L. Berg, *Moderne Operatorenrechnung*, Ztschr. f. angew. Mathematik u. Mechanik 39 (1959), S. 342-346.

[2] — *Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung*, Studia Math. (im Druck).

[3] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Paris 1926.

[4] J. G. van der Corput, *Asymptotics I*, Indagationes Math. 16 (1954), S. 206-217.

[5] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, Berlin 1957.

[6] — *Sur la convolution par* $\exp(t^2)$, Bull. Ac. Pol. Sci. 11 (1959), S. 669-671.

[7] S. Bellert, *Metoda operatorów liczbowych* (polnisch mit russ. u. engl. Zusammenfassung), Rozprawy Elektrotechniczne 5 (1959), S. 515-586.

[8] J. Eliáš, *O operátorovej metóde riešenia diferenčných rovnic* (tschechisch mit russ. u. deutsch. Zusammenfassung), Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk. Akad. Vied 8 (1958), S. 203-227.

[9] I. Fenyö, *Eine neue Methode zur Lösung von Differenzengleichungen nebst Anwendungen*, Periodica Polytechnica (Budapest) 3 (1959), S. 135-151.

[10] J. S. Zypkin, *Differenzengleichungen in der Impuls- und Regelungstechnik*, Berlin 1956.

Reçu par la Rédaction le 20. 3. 1960