Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires

par

S. MAZURKIEWICZ (Varsovie).

Soit X un champ vectoriel de type B,[1]) séparable. Une suite de fonctionnelles linéaires $\{f_n(x)\}$ definies dans X est dite *faiblement convergente* vers une fonctionnelle $f(x)$, si l'on a pour tout $x \varepsilon X$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

ce que nous écrirons simplement

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f;$$

f est alors une fonctionnelle linéaire[2]).

Nous dirons[3]) que la fonctionnelle f est une *fonctionnelle-limite faible* d'un ensemble R de fonctionnelles linéaires, s'il existe une suite $\{f_n\}$ telle que $f_n \varepsilon R$, $f_n \neq f$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. L'ensemble R' de toutes les fonctionnelles-limites de R sera appellé la *dérivée faible de R*. Nous dirons enfin que R est *faiblement fermé*, si $R' \subset R$.

On démontre facilement que R' *peut ne pas être faiblement fermé*. M. Banach a posé la question *si cette circonstance peut se présenter lorsqu'on suppose en outre que R est un ensemble linéaire*[4]); je démontre dans cette Note que la réponse est affirmative.

---

[1]) C. à d. normé et complet.

[2]) S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits, Fund. Math. III (1922) p. 157, Théorème 5.

[3]) Ces notions sont dues à M. Banach.

[4]) R est linéaire, s'il contient toute combinaison linéaire à coefficients réels de deux quelconques de ses fonctionnelles.

Considérons le champ X de toutes les suites $\{\xi_p\}$ de nombres réels, convergentes vers 0, et définissons la norme par la relation

$$\|\{\xi_p\}\| = \text{Max.}\ (|\xi_1|,\ |\xi_2| \ldots\ldots).$$

X est un champ vectoriel de type B, séparable. Une fonctionnelle linéaire dans X est de la forme

$$f(\{\xi_p\}) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \xi_p,$$

les a_p étant réels et la série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |a_p|$ convergente. On vérifie facilement le lemme suivant:

Lemme. Soit

$$f(\{\xi_p\}) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \xi_p,$$

$$f_n(\{\xi_p\}) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p^{(n)} \xi_p.$$

Pour que $\{f_n\}$ converge faiblement vers f, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim a_p^{(n)} = a_p, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{p=1}^{\infty} |a_p^{(n)}| < \infty. \tag{2}$$

Rangeons maintenant en une suite infinie tous les couples de nombres naturels et désignons par $N(i,k)$ l'indice du couple i,k. Posons, pour p naturel,

$$\begin{aligned} a_{i,k}^{(2p-1)} &= \frac{1}{2^p} \text{ pour } p \leqslant i, \\ &= 0 \text{ pour } p > i, \\ a_{i,k}^{(2p)} &= i \text{ pour } p = N(i,k), \\ &= 0 \text{ pour } p \neq N(i,k). \end{aligned} \tag{3}$$

Soit

$$f_{i,k}(\{\xi_p\}) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{i,k}^{(p)} \cdot \xi_p, \tag{4}$$

enfin soit R l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies des fonctionnelles $f_{i,k}$. R est évidemment un ensemble linéaire. Nous montrerons que R' n'est pas faiblement fermé.

Posons, pour p naturel,

$$a_i^{(2p-1)} = \frac{1}{2^p} \text{ pour } p \leqslant i, \qquad = 0 \text{ pour } p > i, \tag{5}$$

$$a_i^{(2p)} = 0,$$

$$a^{(2p-1)} = \frac{1}{2^p}, \tag{6}$$

$$a^{(2p)} = 0,$$

et considérons les fonctionnelles

$$f_i(\{\xi_p\}) = \sum_{p=1}^{\infty} a_i^{(p)} \xi_p, \qquad f(\{\xi_p\}) = \sum_{p=1}^{\infty} a^{(p)} \xi_p. \tag{7}$$

D'après notre lemme, il résulte de (3), (4), (5), (6), (7)

$$\lim_{k\to\infty} f_{i,k} = f_i, \qquad \lim_{i\to\infty} f_i = f, \tag{8}$$

donc f est une fonctionnelle-limite faible de R'; cependant f n'est pas contenu dans R'.

En effet, dans le cas contraire, R contiendrait une suite $\{\varphi_n\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$.

On a

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i,k}^{(n)} f_{i,k}, \tag{9}$$

où les $\alpha_{i,k}^{(n)}$ désignent des constantes réelles; pour une valeur donnée de n, il n-y-a qu'un nombre fini des $\alpha_{ik}^{(n)}$ différents de 0. Soit

$$\varphi_n(\{\xi_k\}) = \sum_{p=1}^{\infty} A_n^{(p)} \xi_p; \tag{10}$$

d'après (3), (4), (9), (10) on aura

$$A_n^{(2p-1)} = \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}^{(n)},$$

$$A_n^{(2p)} = i\, \alpha_{i,k}^{(n)} \text{ où } p = N(i,k). \tag{11}$$

D'après la condition (2) du lemme et d'après (6), (7), (10), (11) on aura

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=p}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i,k}^{(n)} = 1. \tag{12}$$

D'autre part (11) entraîne

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_n^{(p)}| \geqslant \sum_{p=1}^{\infty} |A_n^{(2p)}| = \sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{i,k}^{(n)}| \geqslant q \sum_{i=q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i,k}^{(n)}. \tag{13}$$

Donc on aura, d'après (12),

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |A_n^{(p)}| \geqslant q$$

quel que soit le nombre naturel q; mais cette relation est en contradiction avec la condition (2) du lemme.

(Reçu par la Rédaction le 8. 4. 1930).