so können wir folgende Klammerfolge aufschreiben:

$$(1,2,\dots N_1-1,N_1),\ (1,2,\dots N_1-1,N_1+1),\dots (1,2,\dots N_1-1,\infty)\dots(1,\underbrace{\infty,\infty,\dots\infty}_{N_1-1 \text{ mal}}),$$

$$(10)\qquad (2,3,\dots N_2-1,\ N_2)\dots\ (2,\underbrace{\infty,\dots\infty}_{N_2-1 \text{ mal}}),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$(l,\dots\dots N_l-1,\ N_l),\dots\ (l,\underbrace{\infty,\dots\infty}_{N_l-1 \text{ mal}})$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

u. s. w., ganz wie in (1).

Der ganze Beweis, mit der Konstruktion der Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$, kann nun wörtlich wiederholt werden, nur muß, anstatt 4°, (7) bewiesen werden.

Ist die Folge

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\dots$$

und die natürliche Zahl n beliebig vorausgegeben, so kann man ähnlich, wie dort, in der Klammerfolge (10), eine Klammer finden, der eine Zahl x_0 aus Z entspricht, für die

$$(11)\quad f_{\nu_1}(x_0)=f_{\nu_2}(x_0)=\dots=f_{\nu_{r(n)-1}}(x_0)=0;\ f_{\nu_{r(n)}}(x_0)=\dots=f_{\nu_n}(x_0)=1$$

ist.

Aus (8) und (11) ergibt sich

$$\lambda_{n,1}f_{\nu_1}(x_0)+\dots+\lambda_{n,r(n)-1}f_{\nu_{r(n)-1}}(x_0)+\lambda_{n,r(n)}f_{\nu_{r(n)}}(x_0)+\dots$$
$$+\dots+\lambda_{n,n}f_{\nu_n}(x_0)>\frac{1}{2},$$

was (7) beweist.

(Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1929).

Sur une propriété du champ des fonctions continues

par

Z. ZALCWASSER (Varsovie).

1. Le but de cette note est la résolution d'un problème posé par M. Saks concernant les suites convergentes de fonctions continues.

Soit

$$(1)\qquad f_1(x),\ f_2(x),\dots f_n(x),\dots$$

une suite des fonctions vérifiant les conditions suivantes:

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ pour tout $x\in(a,b)=I$,

b) les fonctions f_n et la fonction-limite f sont continues dans I,

c) $|f_n(x)|\leqslant M$ pour tout n naturel et $x\in I$.

Appelons *moyenne générale* de la suite (1) toute expression de la forme:

$$\varphi(x)=\lambda_1 f_{n_1}(x)+\lambda_2 f_{n_2}(x)+\dots+\lambda_k f_{n_k}(x)$$

où λ_i sont des constantes telles que

$$\lambda_i\geqslant 0\ (i=1,2,\dots k),\qquad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1.$$

La question posée par M. Saks est la suivante:

„La suite (1) vérifiant les conditions a), b), c), peut on à chaque $\varepsilon>0$ faire correspondre une moyenne générale $\varphi(x)$ de la suite (1), de manière que

$$|\varphi(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \text{ pour tout } x\in I?“$$

La réponse est affirmative et nous en allons donner une démonstration.

2. Nous nous servirons de la notion de *l'indice de la suite* (1) *dans un intervalle.* Soient

1° P un ensemble fermé contenu dans I et x_0 un point de P,

2° $\delta > 0$ et p un nombre naturel,

3° $L(p, \delta)$ la borne supérieure des nombres $|f_m(x') - f_n(x'')|$ pour $m \geqslant n \geqslant p$, $x' \in P$, $x'' \in P$, $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$.

Le nombre

$$\omega = \omega(x_0, P) = \lim_{\delta \to 0} \{\lim_{p \to \infty} L(p, \delta)\}$$

sera appelé *l'oscillation de la suite* (1) *au point* x_0 *sur l'ensemble* P[1]).

On démontre sans peine que, si la suite (1) est partout convergente dans P, l'ensemble

$$\mathfrak{A}(P) = \underset{x}{E}\{\omega(x, P) \geqslant \varepsilon\}$$

est fermé et non dense sur P, quel que soit $\varepsilon > 0$[2]).

Ayant fixé la valeur de ε, formons une suite transfinie d'ensembles $\{P_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega_1)$, de la manière suivante:

$$P_0 = I, \quad P_1 = \mathfrak{A}(P_0), \quad P_2 = \mathfrak{A}(P_1) \dots \text{ etc.}$$

Généralement: $P_\alpha = \mathfrak{A}(P_\beta)$ si $\alpha = \beta + 1$,

$P_\alpha = \prod_{\xi < \alpha} P_\xi$ si α est un nombre de deuxième espèce.

Les ensembles P_α étant fermés et $P_{\alpha+1}$ étant non dense dans P_α, il existe, d'après un théorème connu, un nombre ordinal $\eta (\eta < \Omega_1)$ tel que

$$P_\eta \neq 0, \quad P_{\eta+1} = 0.$$

Nous appelerons ce nombre η *l'indice de la suite* (1) *dans l'intervalle* I *relativement à* ε.

3. La valeur de ε étant fixée, nous démontrerons maintenant par induction le théorème suivant:

Théorème A. Quelle que soit la valeur α de l'indice $\eta = \eta(\varepsilon)$ de la suite (1) [vérifiant les conditions a), b), c)], on peut trouver pour chaque $\varepsilon' > \varepsilon$ une moyenne générale $\varphi(x)$ de la suite (1) telle que

(2) $$|\varphi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon' \text{ pour tout } x \in I.$$

[1]) Comparer: H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, 1921, Band I, p. 261, ou mon article „Sur le phénomène de Gibbs ...“, Fundamenta Mathematicae XII (1928) p. 128.

[2]) Voir, p. ex., mon article cité plus haut, p. 130, §. 4.

Démonstration. On peut supposer évidemment que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I.$$

Notre théorème est vrai pour $\alpha = 0$. En effet, on a alors

$$\omega(x, I) < \varepsilon \text{ pour tout } x \in I$$

et on établit aisément à l'aide du lemme de Heine-Borel l'existence d'un nombre naturel k tel que

$$|f_n(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } n \geqslant k \text{ et } x \in I.$$

Toute fonction $f_n(x)$ $(n \geqslant k)$ peut être donc considérée comme une moyenne φ satisfaisant à l'inégalité 2). Supposons maintenant que le „théorème A“ est vrai pour les suites dont l'indice $\eta(\varepsilon)$ est inférieur à α et que pour notre suite (1) on a $\eta(\varepsilon) = \alpha$, donc que

$$P_\alpha \neq 0, \quad P_{\alpha+1} = 0.$$

Soient δ_i $(i = 1, 2, \dots)$ les intervalles contigus de P_α.

Pour démontrer que le „théorème A“ est vrai pour notre suite (1), nous définirons tout d'abord une suite auxiliaire

(3) $$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \dots, \quad \varphi_p(x), \dots$$

de moyennes générales de la suite (1).

Puisque $\omega(x, P_\alpha) < \varepsilon$ pour tout $x \in P_\alpha$, et P_α est fermé, on aura

(4) $$|f_n(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } n \geqslant k \text{ et } x \in P_\alpha.$$

Posons

(5) $$\varphi_1(x) = f_k(x)$$

et remplaçons la suite (1) par la suivante:

(1') $$f_k(x), \quad f_{k+1}(x), \quad f_{k+2}(x), \dots.$$

Comme $|\varphi_1(x)| \leqslant \varepsilon$ aux points de P_α, et φ_1 est continue dans I, on aura

(6) $$|\varphi_1(x)| \leqslant \varepsilon'' \text{ pour tout } x \in Z,$$

Z étant un ensemble ouvert contenant P_α, et

(7) $$\varepsilon < \varepsilon'' < \varepsilon'.$$

Pour préciser la définition de cet ensemble Z, il est commode d'introduire la notation suivante: $\delta = (c, d)$ étant un intervalle quelconque, désignons par $\delta(\nu)$ l'intervalle fermé, concentrique avec δ, mais de longueur moindre, à savoir $\nu(d - c)$ $[0 < \nu < 1]$.

Cela posé, l'inégalite (6) peut s'écrire, pour tout x n'appartenant pas à $\sum_{i=1}^{r_1}\delta_i(\nu_1)$,

$$(8) \qquad |\varphi_1(x)| \leqslant \varepsilon'',$$

ν_1 et r_1 étant choisis convenablement.

Supposons que les moyennes $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{p-1}$, les nombres $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{p-1}$ et les indices $r_1, r_2, \dots r_{p-1}$ ont été déjà définis. Dans chacun d'intervalles $\delta_i(\nu_{p-1})$ $[1 \leqslant i \leqslant r_{p-1}]$, l'indice $\eta(\varepsilon)$ de la suite (1′) est inférieur à α, donc, d'après notre hypothèse, on peut trouver une moyenne $\varphi_p(x)$ de la suite (1′), telle que

$$(9)_p \qquad |\varphi_p(x)| \leqslant \varepsilon'' \text{ pour } x \in \sum_{i=1}^{r_{p-1}} \delta_i(\nu_{p-1}).$$ [3])

Puis, comme $|\varphi_p(x)| \leqslant \varepsilon$ sur P_α et φ_p est continue dans I, on peut choisir $\nu_p > \nu_{p-1}$ et $r_p > r_{p-1}$ de manière que

$$(10)_p \qquad |\varphi_p(x)| \leqslant \varepsilon''$$

pour tout x n'appartenant pas à $\sum_{i=1}^{r_p}{}' \delta_i(\nu_p)$.

Nous pouvons ainsi former de proche en proche toutes les moyennes (3)

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \dots .$$

Ces moyennes jouissent d'une propriété importante pour notre démonstration.

En désignant

$$(11) \qquad H_p = \underset{x}{E}\{|\varphi_p(x)| > \varepsilon''\},$$

on a

$$(12) \qquad H_p \,.\, H_q = 0 \text{ pour } p \neq q.$$

En effet, supposons $q > p$. D'après $(10)_p$, on a

$$H_p \subset \sum_{i=1}^{r_p} \delta_i(\nu_p),$$

et, d'après $(9)_q$, H_q n'a aucun point commun avec $\sum_{i=1}^{r_p}{}' \delta_i(\nu_p)$.

[3]) Pour le vérifier, il suffit de remplacer les fonctions f_n de la suite (1′) par les fonctions $f_n{}^*$ égales à f_n dans $\delta_i(\nu_{p-1})$ $[1 \leqslant i \leqslant r_{p-1}]$ et linéaires en dehors des intervalles $\delta_i(\nu_{p-1})$. Il est clair que l'indice $\eta(\varepsilon)$ de la suite $\{f_n{}^*\}$, dans l'intervalle entier I, est inférieur à α. Il existe donc une moyenne $\varphi_p{}^*$ de la suite $f_n{}^*$, telle que $|\varphi_p{}^*| \leqslant \varepsilon''$ pour tout $x \in I$. La moyenne correspondante φ_p satisfait à $(9)_p$.

Posons en fin

$$\psi_p(x) = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p}{p};$$

il résulte immédiatement de ladite propriété de la suite (3) que

$$|\psi_p(x)| \leqslant \varepsilon'' + \frac{M}{p} \text{ pour tout } x \in I,$$

donc, que

$$|\psi_p(x)| \leqslant \varepsilon' \text{ pour tout } x \in I \text{ et } p \geqslant p_0.$$

Or, $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$ étant des moyennes de la suite (1), $\psi_p(x)$ est aussi une moyenne générale de la suite (1) et, par conséquent, en supposant que notre „théorème A" est vrai pour $\eta(\varepsilon) < \alpha$, nous l'avons vérifié pour $\eta(\varepsilon) = \alpha$. En prenant $\varepsilon' = 2\varepsilon$ et en changeant ε en $\frac{\varepsilon}{2}$, on obtient le théorème demandé:

Théorème.

$$(1) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \dots f_n(x), \dots$$

étant une suite de fonctions continues, bornées en leur ensemble et convergeant dans $I = (a, b)$ vers une fonction continue $f(x)$, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ une moyenne générale de la suite (1):

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_{n_1} + \lambda_2 f_{n_2} + \dots + \lambda_k f_{n_k} \quad (\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1)$$

telle que

$$|\varphi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \textit{ pour tout } x \in I.$$

4. Remarque. Le théorème est en défaut, lorsque l'une quelconque des conditions a), b), c) cesse d'être remplie. Il découle aussi d'un résultat récent de M. Schreier[4]) que l'on ne peut pas remplacer dans notre énoncé les moyennes générales par les moyennes arithmétiques ordinaires

$$\varphi(x) = \frac{f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_k}}{k}.$$

[4]) Voir ces Studia, II (1930) pp. 58—62.

(Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1930).