Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz

von

J. SCHREIER (Lwów).

Herr Banach und Herr Saks haben folgenden Satz für den Raum der mit der p-ten Potenz ($p > 1$) integrablen Funktionen bewiesen:

Jede schwach konvergente Folge enthält eine Teilfolge, deren arithmetische Mittel stark konvergieren[1]).

Herr Banach und Herr Saks haben nun die Frage gestellt, ob ein analoger Satz für den *Raum der stetigen Funktionen* gültig ist[2]).

Es ist mir gelungen diese Frage *negativ* zu beantworten.

In Anbetracht der üblichen Definition der schwachen und starken Konvergenz im Raume der stetigen Funktionen genügt es dazu eine Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$ mit folgenden Eigenschaften zu definieren:

1° Die $f_i(x)$ sind alle in $\langle 0, 1\rangle$ erklärt und stetig.

2° Es ist

$$0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1 \text{ für alle } i \text{ und alle } x.$$

3° Es gilt

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0 \text{ für alle } x.$$

4° Für *keine* Folge

$$n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots$$

wachsender, natürlicher Zahlen ist gleichmäßig in x

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_{n_1}(x) + f_{n_2}(x) + \ldots + f_{n_k}(x)}{k} = 0.$$

[1]) Vgl. diese Studia, II (1930) pp. 51—57. Der Inhalt dieser Arbeit ist mir vor deren Niederschrift mitgeteilt worden.

[2]) Zur Behandlung dieser Frage wurde ich von Prof. Steinhaus angeregt.

Wir werden nun zunächst gewisse Hilfsmengen konstruieren, die uns dann zur Herstellung der $\{f_i(x)\}$ dienen werden.

Im Intervalle $\langle 0, 1\rangle$ bringen wir eine, der Grösse nach wohlgeordnete, abgeschlossene Zahlenmenge Z vom Typus $\omega^\omega + 1$ unter.

Die Klammern

$$\begin{array}{l} (3,4,),\ (3,5,)\ (3,6,)\ldots,\ (3,\infty), \\ (4,5,6),\ (4,5,7)\ldots,\ (4,5,\infty),\ (4,6,7)\ldots\ (4,6,\infty)\ldots\ (4,\infty,\infty), \\ (5,6,7,8)\ldots(5,6,7,\infty),(5,6,8,\infty)\ldots(5,6,\infty,\infty)\ldots(5,7,\infty,\infty),(5,\infty,\infty,\infty), \\ (6,7,8,9,10)\ldots\ldots \end{array} \tag{1}$$

bilden in der hingeschriebenen Ordnung eine wohlgeordnete Menge vom Typus ω^ω.

(Man sieht, daß in (1) jede Klammer vorkommt, die mit einer natürlichen Zahl $k+1$ beginnt und k natürliche Zahlen enthält:

$$k+1 = n_{k+1} < n_{k+2} < \ldots\ldots\ \ldots n_{2k}).$$

Abgesehen von der grössten Zahl aus Z, können also die Zahlenmenge Z und die Klammermenge (1) aufeinander eineindeutig (unter Bewahrung der Ordnungen) bezogen werden.

Es heiße Z_i die Menge derjenigen Zahlen aus Z, welchen dabei solche Klammern entsprechen, die die Zahl i enthalten.

T_i bedeute die Menge derjenigen Zahlen aus $\langle 0, 1\rangle$, die von Z_i einen Abstand $\geqslant \frac{1}{i}$ haben.

Nun bemerkt man mit Leichtigkeit, daß die Mengen Z_i, T_i, $Z - Z_i$ alle abgeschlossen sind.

Wir setzen

$$X_i = T_i + (Z - Z_i);$$

dann ist natürlich

$$X_i \times Z_i = 0.$$

Da X_i und Z_i abgeschlossen sind, haben sie einen positiven Abstand δ_i.

Es sei x eine beliebige Zahl aus $\langle 0, 1\rangle$.

Es bezeichne $\delta_i^{(1)}(x)$ bzw. $\delta_i^{(2)}(x)$ ihren Abstand von der Menge Z_i bzw. X_i. Es ist also

$$\delta_i^{(1)}(x) + \delta_i^{(2)}(x) \geqslant \delta. \tag{2}$$

Wir setzen

$$f_i(x) = \frac{\delta_i^{(2)}(x)}{\delta_i^{(1)}(x) + \delta_i^{(2)}(x)} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt sofort die Stetigkeit von $f_i(x)$; wegen (3) ist auch

$$0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1, \quad \text{für alle } i \text{ und } x.$$

Jedes x aus $\langle 0, 1 \rangle$ gehört nun fast allen X_i an.

Denn gehört x zu Z, dann gehört es zu jedem T_i, wenn nur $i > \frac{1}{\delta(x, Z)}$, wo $\delta(x, Z)$ den Abstand x von Z bezeichnet.

Aus (3) folgt aber

$$f_i(x) = 0 \text{ für } x \in X_i$$

und daher

$$\lim_{i \to \infty} f_i(x) = 0 \text{ für alle } x.$$

Es sei nun

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

eine beliebige Folge wachsender, natürlicher Zahlen. k sei eine beliebige, ganze Zahl.

Zufolge der bei der Definition der Klammermenge (1) gemachten Bemerkung, sieht man, daß alle k Zahlen

$$n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots n_{2k}$$

immer in wenigstens einer Klammer aus (1) gleichzeitig auftreten. (Es ist ja $n_{k+1} \geqslant k+1$).

Es sei x_0 die dieser Klammer entsprechende Zahl aus Z.

Es ist also

$$x_0 \in Z_{n_j} \quad \text{für} \quad k+1 \leqslant j \leqslant 2k$$

und daher wegen (3)

$$f_{n_j}(x_0) = 1 \quad \text{für} \quad k+1 \leqslant j \leqslant 2k.$$

Dieses gibt

$$\frac{f_{n_1}(x_0) + f_{n_2}(x_0) + \ldots + f_{n_{2k}}(x_0)}{2k} \geqslant \frac{1}{2},$$

woraus die Behauptung 4° ohne weiteres folgt.

Mit derselben Methode kann nun leicht gezeigt werden, daß wenn

$$T \equiv \{\lambda_{ik}\}$$

mit

$$\lambda_{ik} = 0 \text{ für } k > 1 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{i} \lambda_{ik} = 1 \text{ für } i = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_{ik} = 0 \text{ für } k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

eine beliebige im voraus gegebene Toeplitz'sche Matrix bezeichnet, eine Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$ konstruiert werden kann, die den Bedingungen 1°, 2°, 3° genügt, und für die bei *keiner* Folge wachsender, natürlicher Zahlen

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$$

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik} f_{\nu_k}(x) = \lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{i} \lambda_{ik} f_{\nu_k}(x) = 0 \tag{7}$$

gleichmäßig gilt.

Mit anderen Worten, wenn man das Verfahren der ersten arithmetischen Mittel, durch ein beliebiges anderes Toeplitz'sches Summationsverfahren ersetzt, wird an der Sachlage nichts geändert.

Um dies zu beweisen, erklären wir durch $r(n)$ den größten Index, für den

$$\sum_{k=r(n)}^{n} \lambda_{n,k} > \frac{1}{2} \tag{8}$$

gilt. Wegen (5) existiert natürlich ein solches $r(n)$ immer. Wegen (6) ist aber

$$\lim_{n \to \infty} r(n) = \infty. \tag{9}$$

Daher gibt es bei jedem natürlichen l höchstens endlich viele Indizes

$$\nu_1^{(l)}, \nu_2^{(l)}, \ldots \nu_{k_l}^{(l)},$$

für die

$$r(\nu_1^{(l)}) = r(\nu_2^{(l)}) = \ldots = r(\nu_{k_l}^{(l)}) = l$$

ist.

Bedeutet nun N_l das Maximum der Zahlen

$$\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \ldots \nu_{k_1}^{(1)}, \nu_1^{(2)}, \ldots \nu_{k_2}^{(2)}, \ldots \nu_1^{(l)}, \ldots \nu_{k_l}^{(l)},$$

so können wir folgende Klammerfolge aufschreiben:

$$(1,2,\dots N_1-1,N_1),\ (1,2,\dots N_1-1,N_1+1),\dots(1,2,\dots N_1-1,\infty)\dots(1,\underbrace{\infty,\infty,\dots\infty}_{N_1-1 \text{ mal}}),$$

$$(10) \qquad (2,3,\dots\ N_2-1,\ N_2)\dots\ (2,\underbrace{\infty,\dots\infty}_{N_2-1 \text{ mal}}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(l,\dots\dots\ N_l-1,\ N_l),\dots\ (l,\underbrace{\infty,\dots\infty}_{N_l-1 \text{ mal}})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

u. s. w., ganz wie in (1).

Der ganze Beweis, mit der Konstruktion der Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$, kann nun wörtlich wiederholt werden, nur muß, anstatt 4°, (7) bewiesen werden.

Ist die Folge

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\dots$$

und die natürliche Zahl n beliebig vorausgegeben, so kann man ähnlich, wie dort, in der Klammerfolge (10), eine Klammer finden, der eine Zahl x_0 aus Z entspricht, für die

$$(11)\quad f_{\nu_1}(x_0)=f_{\nu_2}(x_0)=\dots=f_{\nu_{r(n)-1}}(x_0)=0;\ f_{\nu_{r(n)}}(x_0)=\dots=f_{\nu_n}(x_0)=1$$

ist.

Aus (8) und (11) ergibt sich

$$\lambda_{n,1}f_{\nu_1}(x_0)+\dots+\lambda_{n,r(n)-1}f_{\nu_{r(n)-1}}(x_0)+\lambda_{n,r(n)}f_{\nu_{r(n)}}(x_0)+\dots$$
$$+\dots+\lambda_{n,n}f_{\nu_n}(x_0)>\frac{1}{2},$$

was (7) beweist.

(Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1929).

Sur une propriété du champ des fonctions continues

par

Z. ZALCWASSER (Varsovie).

1. Le but de cette note est la résolution d'un problème posé par M. Saks concernant les suites convergentes de fonctions continues.

Soit

$$(1)\qquad f_1(x),\ f_2(x),\dots\ f_n(x),\dots$$

une suite des fonctions vérifiant les conditions suivantes:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ pour tout $x \in (a,b)=I$,

b) les fonctions f_n et la fonction-limite f sont continues dans I,

c) $|f_n(x)|\leqslant M$ pour tout n naturel et $x\in I$.

Appelons *moyenne générale* de la suite (1) toute expression de la forme:

$$\varphi(x)=\lambda_1 f_{n_1}(x)+\lambda_2 f_{n_2}(x)+\dots+\lambda_k f_{n_k}(x)$$

où λ_i sont des constantes telles que

$$\lambda_i\geqslant 0\ \ (i=1,2,\dots k),\qquad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1.$$

La question posée par M. Saks est la suivante:

„La suite (1) vérifiant les conditions a), b), c), peut on à chaque $\varepsilon>0$ faire correspondre une moyenne générale $\varphi(x)$ de la suite (1), de manière que

$$|\varphi(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \text{ pour tout } x\in I?“$$

La réponse est affirmative et nous en allons donner une démonstration.

2. Nous nous servirons de la notion de *l'indice de la suite* (1) *dans un intervalle.* Soient