

Setzt man  $z_0 = \frac{2^k - 1}{2^k}$ , so ist  $|z_0| < 1$  und dabei

$$(15) \quad f^{(n)}(z_0) = 2^{kn} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t_r}{2^{kr}} \binom{r}{n} (2^k - 1)^{r-n} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Aus (14), (15) folgt nun, daß stets  $t_r = 0$  ist; es genügt noch den Satz 7 zu berücksichtigen, um den Beweis zu Ende zu führen.

(Reçu par la Rédaction le 28. 1. 1930).

### Sur la convergence forte dans les champs $L^p$ .

par

S. BANACH (Lwów) et S. SAKS (Varsovie).

1. Soit  $L^p$  ( $p > 1$ ) le champ des fonctions sommables de  $p$ -ième puissance dans l'intervalle  $(0, 1)$ . On dit qu'une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  de ce champ tend *fortement* (ou bien, *en moyenne d'ordre  $p$* ) vers une fonction  $x(t)$  lorsque

$$\lim_n \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^p dt = 0.$$

Outre cette convergence, on envisage encore, dans des champs  $L^p$ , une autre dite la *faible*: on dit notamment qu'une suite  $\{x_n(t)\}$  de fonctions du champ  $L^p$  ( $p > 1$ ) tend *faiblement* vers une fonction  $x(t)$  du même champ lorsque, pour toute fonction  $y(t)$  sommable de puissance  $q$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ), on a

$$\lim_n \int_0^1 y(t) x_n(t) dt = \int_0^1 y(t) x(t) dt.$$

M. F. Riesz a prouvé que, lorsque, pour une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  du champ  $L^p$ , il existe un nombre fini  $M$  tel que

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p dt \leq M^p,$$

cette suite contient nécessairement une suite partielle  $\{x_{n_k}(t)\}$  convergeant au sens *faible*<sup>2)</sup>; en d'autres termes, tout ensemble de

<sup>1)</sup> F. Riesz, Über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen 69 (1910) pp. 449—497.

<sup>2)</sup> F. Riesz, l. c.

fonctions de la classe  $L^p$ , borné en norme<sup>3)</sup>, est compact faiblement. Une proposition analogue relative à la convergence forte serait évidemment en défaut. Nous pourrions cependant prouver la proposition suivante :

**Théorème I.** Toute suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  du champ  $L^p$  ( $p > 1$ ) bornée en norme contient une suite partielle  $\{x_{n_k}(t)\}$  qui est sommable (C1) au sens fort, c.-à.-d. est telle que ses premières moyennes

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n_i}(t)$$

convergent fortement.

2. Nous établirons tout d'abord une inégalité arithmétique : Pour tout couple de nombres réels  $a, b$  et pour  $p > 1$  on a

$$(1) \quad |a+b|^p \leq |a|^p + p|a|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn} a \cdot b + \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} |a|^{p-i} |b|^i + A|b|^p,$$

où  $A$  désigne une constante ne dépendant pas de  $a, b$ .

Démonstration. Posons

$$\varphi(z) = \frac{|1+z|^p - [1+pz + \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} z^i]}{|z|^p}.$$

Il est évident que  $\varphi(z)$  reste borné lorsque  $z$  tend vers l'infini; d'autre part, en développant  $|1+z|^p$  d'après la formule du binôme, on vérifie de suite que  $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = 0$ . Il s'en suit qu'il existe une constante  $A$  telle que

$$|\varphi(z)| \leq A$$

pour toute valeur de  $z$ , donc

$$\begin{aligned} |1+z|^p &\leq 1 + pz + \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} z^i + A|z|^p \\ &\leq 1 + pz + \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} |z|^i + A|z|^p. \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> On entend par norme d'une fonction  $x(t)$  d'un champ  $L^p$  le nombre  $\sqrt[p]{\int_0^1 |x(t)|^p dt}$ ; une famille de fonctions dans un champ  $L^p$  est dite bornée en norme lorsque les normes des fonctions de cette famille sont bornées en leur ensemble.

En y posant  $z = \frac{b}{a}$ , on en obtient l'inégalité (1).

3. Il s'ensuit, de l'inégalité que nous venons d'établir, la proposition suivante :

Soit  $p > 1$  et  $\{x_n(t)\}$  une suite de fonctions telles que

$$(2) \quad \int_0^1 |x_n(t)|^p dt \leq 1 \quad (n=1, 2, \dots);$$

posons

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n s_k(t).$$

Ceci étant, on a pour chaque  $n > 1$

$$(3) \quad \int_0^1 |s_n(t)|^p dt \leq A + Bn^{p-2} + p \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn} s_{n-1}(t) \cdot x_n(t) dt + \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt,$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes ne dépendant pas de la suite envisagée.

Démonstration. En posant dans l'inégalité (1) du § précédent  $a = s_{n-1}(t)$ ,  $b = x_n(t)$ , et en intégrant les deux parties de la relation ainsi obtenue, on en tire, en vertu de (2)

$$(4) \quad \int_0^1 |s_n(t)|^p dt \leq \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt + p \cdot \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn} s_{n-1}(t) \cdot x_n(t) dt + \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} \cdot |x_n(t)|^i dt + A.$$

On a, par l'inégalité de MM. F. Riesz-Hölder pour chaque  $i \leq p$  (vu (2))

$$\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} \cdot |x_n(t)|^i dt \leq \left[ \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt \right]^{\frac{p-i}{p}};$$

d'autre part, par l'inégalité de Minkowski,

$$\left[ \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \left[ \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n-1} x_k(t) \right|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \int_0^1 |x_k(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq n-1 < n.$$

Donc, pour chaque  $i \leq p$ ,

$$\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} \cdot |x_n(t)|^i dt \leq n^{p-i}$$

et

$$\sum_{i=2}^p \binom{p}{i} \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} |x_n(t)|^i dt \leq \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} n^{p-i} \leq n^{p-2} \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} = B n^{p-2},$$

où  $B$  désigne une constante<sup>4</sup>).

En portant ce résultat dans (4), on obtient l'inégalité cherchée.

4. Le théorème signalé dans le § 1 est une conséquence facile de la relation que nous venons d'établir.

On peut supposer tout d'abord que l'on ait pour toute fonction  $x_n(t)$  de la suite considérée

$$(5) \quad \int_0^1 |x_n(t)|^p dt \leq 1;$$

on peut supposer aussi (en vertu du théorème de M. F. Riesz cité au début de cet article) que la suite  $\{x_n(t)\}$  converge *faiblement* vers zéro. Ceci étant, nous déterminerons une suite partielle  $\{x_{n_k}(t)\}$  ( $n_1 = 1$ ) en procédant, par récurrence, de la manière suivante: supposons que  $k$  premiers termes de la suite  $\{x_{n_k}(t)\}$  sont définis et soit

$$s_k(t) = \sum_{r=1}^k x_{n_r}(t);$$

$s_k(t)$  étant sommable de puissance  $p$ , la fonction  $|s_k(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} s_k(t)$  l'est de puissance  $\frac{p}{p-1}$ , et, par suite, les fonctions  $x_n(t)$  convergeant *faiblement* vers zéro, il existe des valeurs  $n > n_k$  telles que

<sup>4</sup>) Dans le cas  $p < 2$ , l'expression que nous venons d'évaluer dans le texte, n'existe pas, et tout le raisonnement se simplifie, l'inégalité fonctionnelle (3) découlant immédiatement de l'inégalité arithmétique du § précédent; une simplification considérable a lieu aussi dans le cas  $p = 2$ .

$$(6) \quad \left| \int_0^1 |s_k(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} s_k(t) \cdot x_n(t) dt \right| \leq 1;$$

nous définirons comme  $n_{k+1}$  une valeur quelconque de  $n$  (p. ex. la plus petite) satisfaisant à cette condition.

La suite partielle  $\{x_{n_k}(t)\}$  ainsi établie, on posera, pour simplifier l'écriture,

$$y_k(t) = x_{n_k}(t),$$

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n y_n(t);$$

on aura alors, en vertu de (6), pour chaque  $n > 1$ ,

$$\left| \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} s_{n-1}(t) \cdot y_n(t) dt \right| \leq 1,$$

donc, en tenant compte de l'inégalité (3) du § précédent,

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p dt \leq A + B n^{p-2} + p + \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt$$

d'où

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p dt \leq (A+p)n + B n^{p-1} + 1$$

et

$$\lim_n \int_0^1 \left[ \frac{s_n(t)}{n} \right]^p dt = 0$$

ce qui montre que les premières moyennes de la suite partielle  $\{x_{n_k}(t) = y_k(t)\}$  tendent *fortement* vers zéro.

5. Le théorème démontré dans le § précédent pour les espaces  $L^p$  ( $p > 1$ ), ne s'étend pas au cas  $p = 1$ , c.-à.-d. au champ de fonctions sommables. On le voit aisément sur l'exemple suivant:

Désignons, pour tout entier positif  $n$ , par  $x_n(t)$  la fonction égale à 1 pour tout  $t$  tel que

$$\frac{i}{2^n} + \frac{1}{2^{2n+1}} \leq t \leq \frac{i+1}{2^n} \quad (i = 0, 1, \dots, 2^n - 1),$$

et à  $1 - 2^{n+1}$  partout ailleurs dans l'intervalle  $(0, 1)$ . On voit de suite qu'on a alors

$$\left| \int_0^T x_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

pour chaque  $T$  de l'intervalle  $(0, 1)$ , et que.

$$\int_0^1 |x_n(t)| dt \leq 2,$$

donc, que les fonctions  $x_n(t)$  tendent *faiblement* vers zéro.

D'autre part, on voit facilement que, pour tout  $n$ , l'ensemble des points  $t$  où

$$x_n(t) \neq 1,$$

est de mesure  $\leq \frac{1}{2^{n+1}}$ ; il s'en suit donc que l'on a, pour chaque suite partielle

$\{x_{n_k}(t)\}$  et chaque nombre  $k$ ,

$$\int_0^1 \left| \frac{x_{n_1}(t) + x_{n_2}(t) + \dots + x_{n_k}(t)}{k} \right| dt \geq \frac{1}{2}. \quad ^5)$$

Les premières moyennes de la suite  $\{x_{n_k}(t)\}$  convergeant *faiblement* (en même temps que la suite  $\{x_n(t)\}$ ) vers zéro, il s'ensuit de l'inégalité précédente qu'elles forment une suite qui est divergente au sens *fort*.

Notre théorème est ainsi en défaut dans le cas envisagé, c. q. f. d.

6. Soit  $l^p$  ( $p > 1$ ) le champ des suites  $\{\xi_i\}$  telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty.$$

On dit qu'une suite de suites  $\{\xi_i^{(n)}\}$  de ce champ tend *fortement* (ou bien en moyenne d'ordre  $p$ ) vers une suite  $\{\xi_i\}$  lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p = 0.$$

On dit qu'une suite  $\{\xi_i^{(n)}\}$  de suites du champ  $l^p$  tend *faiblement* vers une suite  $\{\xi_i\}$  du même champ, lorsque

1) les suites  $\{\xi_i^{(n)}\}$  sont bornées en norme, c.-à.-d. lorsqu'il existe un nombre  $M > 0$  tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p < M^p \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

**Théorème II.** Toute suite  $\{\xi_i^{(n)}\}$  des suites du champ  $l^p$  ( $p > 1$ ) bornée en norme contient une suite partielle  $\{\xi_i^{(n_k)}\}$  sommable (C1) au sens fort, c.-à.-d. telle que ses premières moyennes

<sup>5)</sup> Plus généralement, on a

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t) \right| dt \geq \frac{1}{2},$$

pour chaque système de  $n$  nombres non-négatifs  $\lambda_i$  tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

$$\sigma_i^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi_i^{(n_j)}$$

convergent *fortement*.

Démonstration. Posons

$$x_n(t) = 2^j \xi^{(n)} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2^{j-1}} \geq t > \frac{1}{2^j} \quad (n = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots)$$

et nous aurons

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p dt = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)}|^p.$$

D'après le théorème I, il existe une suite partielle  $\{x_{n_k}(t)\}$  telle que ses premières moyennes convergent *fortement*, donc la suite  $\{\sigma_i^{(k)}\}$  converge de même *fortement*.

(Reçu par la Rédaction le 20. 2. 1930).