Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren.

Erste Mitteilung [1])

von

S. MAZUR (Lwów).

In dieser Note beschäftige ich mich mit einer Anwendung der Theorie der Operationen auf Toeplitzsche Limitierungsverfahren.

Wir geben zuerst einige Definitionen an. Es sei

$$(A) \qquad \begin{matrix} a_{0,0}, & a_{0,1}, & \ldots \\ a_{1,0}, & a_{1,1}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

eine beliebige Matrix reeller Zahlen. Wenn bei einer reellen Folge $x = \{x_n\}$ jede der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x_n$ konvergent ist und die entsprechende Summenfolge $\{A_m(x)\}$ (gegen $A(x)$) konvergiert, so sagen wir, daß die Folge x mittels des der Matrix (A) entsprechenden Verfahrens A (gegen $A(x)$) limitierbar — kurz A-*limitierbar* (*gegen* $A(x)$) ist. Die auf diese Weise erklärten Limitierungsverfahren nennen wir *Toeplitzsche* Limitierungsverfahren; wenn wir im Folgenden von den Limitierungsverfahren sprechen, so sind stets derartige Verfahren gemeint. Wenn fast alle Elemente einer jeden Zeile der Matrix (A) verschwinden, so sagen wir, daß das Limitierungsverfahren A *zeilenfinit* ist; wenn speziell stets $a_{m,n} = 0$ für $m < n$ und $\neq 0$ für $m = n$ ist, so nennen wir es *normal*. Die Menge aller A-limitierbaren Folgen bildet den *Limitierbarkeits-Raum* von A; wir bezeichnen ihn mit A^*. Wenn für zwei Limitierungsverfahren A, B die Relation $A^* \subset B^*$ gilt, so sagen wir, daß

[1]) Preisgekrönt als Lösung einer von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Lwów gestellten Aufgabe.

A *nichtstärker* als B, oder, daß B *nichtschwächer* als A ist; ist $A^* = B^*$, so nennen wir A mit B *äquivalent*; A heißt *schwächer* als B (B *stärker* als A), wenn A zugleich nichtstärker und nicht äquivalent mit B ist. Wir erklären weiter A als *konsistent* mit B, wenn jede gleichzeitig A- und B-limitierbare Folge mittels dieser Verfahren gegen dieselbe Zahl limitierbar ist. Setzt man $i_{m,n} = 0$ für $m \neq n$, $= 1$ für $m = n$ $(m, n = 0, 1, \ldots)$, so bezeichnen wir das der Matrix

$$(I) \qquad \begin{matrix} i_{0,0}, & i_{0,1} & \ldots \\ i_{1,0}, & i_{1,1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

entsprechende Limitierungsverfahren I als *identisches* Limitierungsverfahren. Jedes Limitierungsverfahren A, das nichtschwächer als I ist nennen wir *konvergenzerhaltend*; ist außerdem A mit I konsistent, so erklären wir es als *permanent*.

Hier wird die Frage behandelt, wann ein permanentes Limitierungsverfahren A die Eigenschaft besitzt, daß es mit jedem permanenten nichtschwächeren Limitierungsverfahren konsistent ist. Wir werden zuerst voraussetzen, daß A normal ist und in einer zweiten Mitteilung allgemeinere Fälle betrachten.

§ 1.

Es bedeute A ein normales Limitierungsverfahren, das der Matrix

$$(A) \qquad \begin{matrix} a_{0,0}, & a_{0,1}, & \ldots \\ a_{1,0}, & a_{1,1}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

entspricht. Der Limitierbarkeits-Raum von A bildet bei der gewöhnlichen Definition der Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen einen *linearen Raum*. Wenn wir als Norm eines Elementes x aus A^* die obere Schranke der Zahlen $|A_m(x)|$ $(m = 0, 1, \ldots)$ annehmen, so wird offenbar der Raum A^* auf diese Weise *normiert*; man kann nun leicht zeigen, daß bei dieser Normierung er *vollständig* ist. Es sei nämlich $\{x^{(r)}\}$ eine Folge von Elementen des Raumes A^*, für die

$$\lim_{p, q \to \infty} \| x^{(p)} - x^{(q)} \| = 0$$

ist. Setzt man $x^{(r)} = \{x_n^{(r)}\}$ $(r = 0, 1, \ldots)$, so haben wir

$$(1)\qquad \lim_{p,q\to\infty}\left[\text{obere Schranke}_{m=0,1,\ldots}\left|\sum_{n=0}^{m} a_{m,n}(x_n^{(p)}-x_n^{(q)})\right|\right]=0$$

und um so mehr

$$(2)\qquad \lim_{p,q\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_{m,n}(x_n^{(p)}-x_n^{(q)})=0 \qquad (m=0,1,\ldots).$$

Aus den Relationen (2) folgt unmittelbar, wegen der Bedingung $a_{m,m}\neq 0$ $(m=0,1,\ldots)$, daß jede der Folgen $\{x_n^{(r)}\}$ $(n=0,1,\ldots)$ konvergiert.

Es bezeichne x_n die Grenze der Folge $\{x_n^{(r)}\}$ $(n=0,1,\ldots)$; wir behaupten, daß die Folge $x=\{x_n\}$ dem Raume A^* angehört und daß dabei

$$(3)\qquad \lim_{r\to\infty}\|x^{(r)}-x\|=0$$

ist. In der Tat, es sei ε eine positive Zahl. Nach (1) ist für alle Indizes p, q, die größer als eine Zahl $N(\varepsilon)$ sind,

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_{m,n}(x_n^{(p)}-x_n^{(q)})\right|<\varepsilon \qquad (m=0,1,\ldots)$$

und daher auch für alle Indizes $r>N(\varepsilon)$ stets

$$(4)\qquad \left|\sum_{n=0}^{m} a_{m,n}(x_n^{(r)}-x_n)\right|\leqslant\varepsilon,$$

was die Beziehung

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, A_m(x)-\underline{\lim_{m\to\infty}}\, A_m(x)\leqslant 2\varepsilon$$

impliziert. Die Folge x ist also A-limitierbar; die Ungleichungen (4) erlauben außerdem sofort zu schließen, daß (3) stattfindet.

Wir werden jetzt zeigen, daß im Raume A^* eine *abzählbare Basis* existiert. Es sei $i_n^{(r)}=0$ für $r\neq n$, $=1$ für $r=n$ $(r,n=0,1,\ldots)$ und stets $i_n=1$; wir setzen $i^{(r)}=\{i_n^{(r)}\}$ $(r=0,1,\ldots)$, $i=\{i_n\}$. Bei jeder Folge $y=\{y_m\}$ besitzt das unendliche System der Gleichungen

$$A_m(x)=y_m \qquad (m=0,1,\ldots)$$

genau eine Lösung. Wir bezeichnen sie mit $a^{(r)}=\{a_n^{(r)}\}$, wenn $y=i^{(r)}$ $(r=0,1,\ldots)$, und mit $a=\{a_n\}$, wenn $y=i$ ist. Die so erklärten Folgen a, $a^{(0)}$, $a^{(1)},\ldots$ gehören dem Raume A^* an; wir behaupten, daß sie in ihm eine Basis bilden. Zuerst bemerken

wir, daß — wie eine leichte Rechnung ergibt — für ein Element x des Raumes A^* die Entwicklung

$$(5)\qquad x=\vartheta a+\sum_{r=0}^{\infty}\vartheta_r a^{(r)}$$

dann und nur dann gilt, wobei $\vartheta,\vartheta_0,\vartheta_1,\ldots$ reelle Zahlen sind, wenn

$$\lim_{s\to\infty}\left[\text{obere Schranke}_{m=0,1,\ldots}\left|A_m(x)-\vartheta-\sum_{r=0}^{s}\vartheta_r i_m^{(r)}\right|\right]=0$$

ist. Ersichtlich aber findet die letzte Relation in diesem und nur in diesem Falle statt, wenn die Zahlen $\vartheta,\vartheta_0,\vartheta_1,\ldots$ durch die Gleichungen

$$(6)\qquad \vartheta=A(x),\quad \vartheta_r=A_r(x)-A(x) \qquad (r=0,1,\ldots)$$

definiert sind. Wir sehen also, daß es *für jedes Element x des Raumes A^* genau eine Darstellung der Form* (5) *gibt, wo $\vartheta,\vartheta_0,\vartheta_1,\ldots$ reelle Zahlen sind.*

Es seien $t,t_0,t_1,\ldots$ beliebige reelle Zahlen, von dieser Eigenschaft, daß die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty}t_r$ absolut konvergent ist. Bei dieser Voraussetzung ist offenbar durch die Gleichung

$$(7)\qquad L(x)=tA(x)+\sum_{r=0}^{\infty}t_r A_r(x)$$

im Raume A^* ein Funktional definiert; man kann sehr leicht verifizieren, daß es linear ist. Wir wollen jetzt beweisen, daß umgekehrt jedes im Raume A^* erklärte lineare Funktional $L(x)$ die Gestalt (7) hat, wobei $t,t_0,t_1,\ldots$ reelle Zahlen sind, die der vorher erwähnten Bedingung genügen. Setzen wir nämlich voraus, daß $L(x)$ ein lineares im Raume A^* erklärtes Funktional ist. Es ist

$$L(x)=\vartheta L(a)+\sum_{r=0}^{\infty}\vartheta_r L(a^{(r)}),$$

wenn das Element x des Raumes A^* in der Form (5) dargestellt wird, d. h., wegen der Beziehungen (6),

$$(8)\qquad L(x)=A(x)L(a)+\sum_{r=0}^{\infty}(A_r(x)-A(x))\,L(a^{(r)}).$$

Da aber $\{A_r(x)-A(x)\}$, wie dies aus der Normalität des Limitierungsverfahrens A folgt, für ein entsprechend gewähltes

Element x des Raumes A^*, eine beliebige vorgegebene gegen Null konvergente Folge sein kann, so muß die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} L(a^{(r)})$ absolut konvergieren.

Es genügt nun

$$t = L(a) - \sum_{r=0}^{\infty} L(a^{(r)}), \quad t_r = L(a^{(r)}) \qquad (r = 0, 1, \ldots) \tag{9}$$

zu setzen, um aus (8) die Gleichung (7) zu bekommen; dabei besitzen die Zahlen $t, t_0, t_1, \ldots$ die verlangte Eigenschaft. Auf diese Weise haben wir bewiesen, daß *die Gleichung* (7), *wo* t, $t_0, t_1, \ldots$ *reelle Zahlen sind, die allgemeine Gestalt eines linearen im Raume* A^* *erklärten Funktionals* $L(x)$ *darstellt*; ist ein solches Funktional in der Form (7) geschrieben, so sind natürlich die Zahlen $t, t_0, t_1, \ldots$ durch (9) gegeben.

Satz 1. *Wenn ein Limitierungsverfahren B nichtschwächer als A ist, so stellt $B(x)$ im Raume A^* ein lineares Funktional dar.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß das Limitierungsverfahren B der Matrix

$$(B) \qquad \begin{matrix} b_{0,0}, & b_{0,1}, & \ldots \\ b_{1,0}, & b_{1,1}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

entspricht. Es sei für jedes Element $x = \{x_n\}$ des Raumes A^*

$$L_n(x) = x_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Aus der Definition der Norm im Raume A^* folgt sofort, daß die so in ihm erklärten Funktionale linear sind; setzen wir im Raume A^*

$$B_{m,r}(x) = \sum_{n=0}^{r} b_{m,n} L_n(x) \qquad (m, r = 0, 1, \ldots),$$

so besitzen also auch diese Funktionale dieselbe Eigenschaft. Es genügt nun zu bemerken, daß in dem betrachteten Raume

$$B(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{r\to\infty} B_{m,r}(x)$$

ist, und den bekannten Satz des Herrn S. Banach[2]) anzuwenden, um sich von der Richtigkeit unserer Behauptung zu überzeugen.

[2]) S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. III (1922) p. 133—181, insb. Théorème 5.

Satz 2. *Wenn $L(x)$ ein lineares im Raume A^* erklärtes Funktional und $L(a) \neq \sum_{r=0}^{\infty} L(a^{(r)})$ ist, so kann man ein normales, mit A äquivalentes Limitierungsverfahren B so wählen, daß $B(x) = L(x)$ im Raume A^* ist.*

Beweis. Man kann nach dem Vorigen das Funktional $L(x)$ in der Form (7) schreiben. Dabei sind die Koeffizienten $t, t_0, t_1, \ldots$ durch (9) gegeben; speziell ist

$$t = L(a) - \sum_{r=0}^{\infty} L(a^{(r)})$$

und also, wegen der Voraussetzung, von Null verschieden. Betrachten wir die Matrix

$$(B) \qquad \begin{matrix} b_{0,0}, & b_{0,1}, & \ldots \\ b_{1,0}, & b_{1,1}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

die folgenderweise erklärt ist: $b_{m,n} = t a_{m,n} + \sum_{r=n}^{m-1} t_r a_{r,n}$ für $m > n$, $= t a_{n,n}$ für $m = n$ und $= 0$ für $m < n$ $(m, n = 0, 1, \ldots)$. Das Limitierungsverfahren B, das dieser Matrix entspricht, ist offenbar normal; wir behaupten, daß es alle anderen verlangten Eigenschaften besitzt. Vor allem bemerken wir, daß für jede Folge x

$$B_0(x) = t A_0(x), \quad B_{m+1}(x) = t A_{m+1}(x) + \sum_{r=0}^{m} t_r A_r(x) \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{10}$$

ist. Daraus folgt unmittelbar, daß das Limitierungsverfahren B nichtschwächer als A ist, und, daß im ganzen Raume A^* die Gleichheit $B(x) = L(x)$ stattfindet. Es bleibt noch zu beweisen, daß das Limitierungsverfahren B nichtstärker als A ist. Wir setzen: $c_{m,n} = 0$ für $m < n$, $= \frac{1}{t}$ für $m = n$, $= -\frac{t_{m-1}}{t^2}$ für $m = n+1$, $= -\frac{t_n}{t^2}\left(1 - \frac{t_{n+1}}{t}\right)\left(1 - \frac{t_{n+2}}{t}\right)\ldots\left(1 - \frac{t_{m-1}}{t}\right)$ für $m > n+1$ $(m, n = 0, 1, \ldots)$. Aus dem Satz des Herrn I. Kojima[3]) folgt leicht, daß das Limitierungsverfahren C, das der Matrix

$$(C) \qquad \begin{matrix} c_{0,0}, & c_{0,1}, & \ldots \\ c_{1,0}, & c_{1,1}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

entspricht, konvergenzerhaltend ist. Es bestehen aber, wie man

[3]) T. Kojima, On generalized Toeplitz theorems on limit and their applications, The Tohoku Math. Journal 12 (1917) p. 291—326, insb. p. 297.

mittels vollständiger Induktion, unter Bezugnahme auf (10) und die Definition der Matrix C, verifizieren kann, für jede Folge x die Gleichungen

$$A_m(x) = C_m(\{B_r(x)\}) \qquad (m=0,1,\ldots);$$

damit ist aber schon alles bewiesen.

Bemerkung 1. Wenn ein Limitierungsverfahren B nichtschwächer als A und $B(a) \neq \sum_{r=0}^{\infty} B(a^{(r)})$ ist, so gibt es ein normales mit A äquivalentes und mit B konsistentes Limitierungsverfahren C. Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2.

§ 2.

Wir setzen jetzt voraus, daß das Limitierungsverfahren A nicht nur normal, sondern auch permanent ist. Wir werden die allgemeine Gestalt eines linearen permanenten Funktionals im Raume A^* bestimmen; dabei nennen wir ein in diesem Raume erklärtes Funktional $L(x)$ permanent, wenn $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für jede konvergente Folge $x = \{x_n\}$ ist. Der Kürze halber führen wir noch die folgende Definition ein: Eine reelle Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ soll *orthogonal* zu den Kolonnen der Matrix (A) heißen, wenn sie absolut konvergent ist und außerdem den Gleichungen

$$\text{(11)} \qquad \sum_{r=0}^{\infty} t_r a_{r,n} = 0 \qquad (n=0,1,\ldots)$$

genügt.

Es sei $L(x)$ ein lineares und permanentes, im Raume A^* erklärtes Funktional. Man kann es in der Form (7), d. h.

$$\text{(12)} \qquad L(x) = t\,A(x) + \sum_{r=0}^{\infty} t_r A_r(x),$$

wo $t, t_0, t_1, \ldots$ reelle Zahlen sind, schreiben. Nimmt man für x nacheinander die Elemente $i^{(0)}, i^{(1)}, \ldots$, so erhalten wir das Gleichungssystem (11); da dabei, wie wir wissen, die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ absolut konvergiert, so ist sie zu den Kolonnen der Matrix (A) orthogonal. Setzt man $x=i$, so kommt $t=1$. In der Tat, nach dem Satz

des Herrn Toeplitz, ist die Folge $\{\sum_{n=0}^{m} |a_{m,n}|\}$ beschränkt; daher konvergiert die Reihe, welche aus $\sum_{r=0}^{\infty}(t_r a_{r,0} + t_r a_{r,1} + \ldots + t_r a_{r,r})$ durch Weglassen der Klammern entsteht, absolut. Es muß also $\sum_{r=0}^{\infty} t_r A_r(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} t_r a_{r,n} = 0$ sein. Auf diese Weise haben wir bewiesen, daß, wenn die Gleichung (12) ein lineares und permanentes Funktional im Raume A^* definiert, $t=1$ und die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ orthogonal zu den Kolonnen der Matrix (A) sein muß; diese notwendigen Bedingungen sind — wie wir behaupten — auch hinreichend. Es genügt nämlich die folgende Bemerkung zu berücksichtigen.

Bemerkung 2. Wenn eine Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ orthogonal zu den Kolonnen der Matrix (A) ist, so muß $\sum_{r=0}^{\infty} t_r A_r(x) = 0$ nicht nur für jede konvergente, sondern sogar für eine beliebige beschränkte Folge x sein. — Der einfache Beweis verläuft ganz analog wie oben im Falle der Folge i.

Betrachten wir nun im Raume A^* die abgeschlossene Hülle A_0^* der Menge aller konvergenten Folgen; sie bildet offenbar einen linearen Raum.

Satz 3. *Wenn ein Limitierungsverfahren B permanent und nichtschwächer als A ist, so ist $B(x) = A(x)$ im Raume A_0^*.*

Beweis. Nach dem Satz 1 stellt $A(x)$ wie auch $B(x)$ im Raume A^* ein lineares Funktional dar. Sie stimmen in der Menge aller konvergenten Folgen überein; daher muß auch auf der abgeschlossenen Hülle dieser Menge $B(x) = A(x)$ sein.

Satz 4. *Wenn eine A-limitierbare Folge $\bar{x}$ dem Raume A_0^* nicht angehört und r eine gegebene reelle Zahl ist, so gibt es ein normales, permanentes und mit A äquivalentes Limitierungsverfahren B, für welches $B(\bar{x}) = r$ ist.*

Beweis. Der Raum A_0^* ist offenbar in A^* abgeschlossen. Da das Element $\bar{x}$ diesem Raume nicht angehört und das Funktional $B(x)$ in ihm — wie dies aus dem Satz 1 folgt — linear ist, so kann man, nach einem Satz von Herrn S. Banach[4]) seine Definition auf den ganzen Raum A^* so erweitern, daß das erhaltene Funktional linear ist und im Punkt $\bar{x}$ den Wert r annimmt. Es genügt nun den Satz 2 anzuwenden, um sich von der Richtigkeit unserer Behauptung zu überzeugen.

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt der

Satz 5. *Dafür, daß das Limitierungsverfahren A mit jedem nichtschwächeren permanenten Limitierungsverfahren konsistent sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A_0^* = A^*$ ist.*

Wir werden jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 6. *Damit eine gegebene A-limitierbare Folge $\bar{x}$ mittels jedes permanenten nichtschwächeren Limitierungsverfahrens gegen dieselbe Zahl limitierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede zu den Kolonnen der Matrix (A) orthogonale Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ die Gleichung $\sum_{r=0}^{\infty} t_r A_r(\bar{x}) = 0$ stattfinde.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Setzen wir nämlich voraus, daß die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ zu den Kolonnen der Matrix (A) orthogonal ist. Nach dem Vorigen ist durch die Gleichung

$$L(x) = A(x) + \sum_{r=0}^{\infty} t_r A_r(x) \tag{13}$$

im Raume A^* ein lineares permanentes Funktional definiert. Wegen der Voraussetzung muß nach dem Satz 2 $L(\bar{x}) = A(\bar{x})$, d. h. $\sum_{r=0}^{\infty} t_r A_r(\bar{x}) = 0$ sein.

Die Bedingung ist auch hinreichend. Es sei ein permanentes Limitierungsverfahren B gegeben, welches nichtschwächer als A ist. Wir setzen $L(x) = B(x)$ im Raume A^*; nach dem Satz 1 ist $L(x)$ ein lineares Funktional in diesem Raume. Da es außerdem permanent ist, so muß es die Form (13) haben, wobei $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ eine zu den Kolonnen der Matrix (A) orthogonale Reihe bezeichnet. Wir haben $L(\bar{x}) = A(\bar{x})$, d. h. $B(\bar{x}) = A(\bar{x})$.

Satz 7. *Dafür, daß das Limitierungsverfahren A mit jedem permanenten nichtschwächeren Limitierungsverfahren konsistent sei, ist notwendig und hinreichend, daß außer der Nullreihe keine andere zu den Kolonnen der Matrix (A) orthogonal sei.*

[4]) S. Banach, Sur les fonctionnelles lineaires, Stud. Math. I (1929) p. 211–216, insb. Théorème 4.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz 7; die Zahlen $t_0, t_1, \ldots$ besitzen dann und nur dann die Eigenschaft, daß $\sum_{r=0}^{\infty} t_r A_r(x) = 0$ im Raume A^* ist, wenn sie alle verschwinden.

Bemerkung 3. Jede beschränkte A-limitierbare Folge ist mittels jedes permanenten nichtschwächeren Limitierungsverfahrens gegen dieselbe Zahl limitierbar. — Das folgt sofort aus der Bemerkung 2 und dem Satz 7.

Bemerkung 4. Jedes Cesàrosche Limitierungsverfahren C_k (k reell, positiv) besitzt die Eigenschaft, daß es mit jedem permanenten und nichtschwächeren Limitierungsverfahren konsistent ist. — Nimmt man nämlich für A das Verfahren C_k, so ist — wie eine leichte Rechnung zeigt — $a_n^{(r)} = (-1)^{n-r}\binom{k}{n-r}\binom{r+k}{r}$ für $r \leqslant n$ und $= 0$ für $r > n$ $(r, n = 0, 1, \ldots)$. Jede der Folgen $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots$ ist also beschränkt. Es sei B ein permanentes Limitierungsverfahren, das nichtschwächer als A ist. Da $A(a^{(r)}) = 0$ ist, so muß, nach der Bemerkung 3, auch $B(a^{(r)}) = 0$ $(r = 0, 1, \ldots)$ sein. Setzt man im Raume A^* $L(x) = B(x)$, so ist $L(x)$ in diesem Raume ein lineares und selbstverständlich permanentes Funktional. Schreibt man es in der Form (13), so sind die Koeffizienten $t_0, t_1, \ldots$ durch (9) gegeben und also verschwinden sie alle.

Bemerkung 5. Auch jedes Eulersche Limitierungsverfahren E_k (k reell, positiv) besitzt die Eigenschaft, daß es mit jedem permanenten, nichtschwächeren Limitierungsverfahren konsistent ist. — Nimmt man für A das Verfahren E_k, so ist $a_{m,n} = \frac{1}{2^{km}} \binom{m}{n} (2^k - 1)^{m-n}$ $(m, n = 0, 1, \ldots)$. Es sei $\sum_{r=0}^{\infty} t_r$ eine zu den Kolonnen der Matrix (A) orthogonale Reihe; es bestehen also die Gleichungen

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t_r}{2^{kr}} \binom{r}{n} (2^k - 1)^{r-n} = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{14}$$

Betrachten wir im Einheitskreise $|z| \leqslant 1$ die Funktion

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} t_r z^r.$$

Setzt man $z_0 = \frac{2^k - 1}{2^k}$, so ist $|z_0| < 1$ und dabei

(15) $$f^{(n)}(z_0) = 2^{kn} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t_r}{2^{kr}} \binom{r}{n} (2^k - 1)^{r-n} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Aus (14), (15) folgt nun, daß stets $t_r = 0$ ist; es genügt noch den Satz 7 zu berücksichtigen, um den Beweis zu Ende zu führen.

(Reçu par la Rédaction le 28. 1. 1930).

Sur la convergence forte dans les champs L^p.

par

S. BANACH (Lwów) et S. SAKS (Varsovie).

1. Soit L^p $(p > 1)$ le champ des fonctions sommables de p-ième puissance dans l'intervalle $(0, 1)$. On dit qu'une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ de ce champ tend *fortement* (ou bien, *en moyenne d'ordre p*) vers une fonction $x(t)$ lorsque

$$\lim_n \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^p dt = 0.$$

Outre cette convergence, on envisage encore, dans des champs L^p, une autre dite la *faible:* on dit notamment qu'une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions du champ L^p $(p>1)$ tend *faiblement* vers une fonction $x(t)$ du même champ lorsque, pour toute fonction $y(t)$ sommable de puissance q $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, on a

$$\lim_n \int_0^1 y(t)\, x_n(t)\, dt = \int_0^1 y(t)\, x(t)\, dt \text{ [1]}.$$

M. F. Riesz a prouvé que, lorsque, pour une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ du champ L^p, il existe un nombre fini M tel que

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt \leqslant M^p,$$

cette suite contient nécessairement une suite partielle $\{x_{n_k}(t)\}$ convergeant au sens *faible*[2]); en d'autres termes, tout ensemble de

[1]) F. Riesz, Über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen 69 (1910) pp. 449—497.
[2]) F. Riesz, l. c.