

auf seinen Teil abbildet, so besitzt die Operation $x \rightarrow U(x)$ so viele linear unabhängige Nullstellen, wie die zu ihr konjugierte Operation $x^* \rightarrow U^*(x^*)$.⁹⁾

Gleichzeitig erwähnt Herr Riesz, daß dieser Satz auch in vielen anderen linearen, normierten und vollständigen Räumen seine Gültigkeit behält. Nun hat Herr J. Schauder in einer in dieser Zeitschrift zu erscheinenden Arbeit den Beweis des Satzes des Herrn Riesz in ganz allgemeinen Räumen der zitierten Art erbracht.

Wenn wir aber die Voraussetzung der Vollstetigkeit der Operation $U(x)$ weglassen, so ist der Satz falsch. Man kann nämlich beweisen:

1. Wenn r eine reelle Zahl ist und $r > 1$, ferner p, q zwei beliebige aus der Folge $\infty, 0, 1, \dots$ herausgegriffene Werte sind, dann gibt es eine im Hilbertschen Raume erklärte lineare Operation $U(x)$, die ihn auf seinen Teil abbildet, die Norm gleich r besitzt und dabei haben die Operationen $x \rightarrow U(x)$ bzw. $x^* \rightarrow U^*(x^*)$ p bzw. q linear unabhängige Nullstellen.

2. Im Raume der konvergenten Zahlenfolgen ist jede beschränkte Menge schwachkompakt; dieser Raum ist aber nicht schwachvollständig. Im Raume der absolut konvergenten Zahlenreihen findet der umgekehrte Sachverhalt statt. Wenn nun p, q zwei beliebige aus der Folge $\infty, 0, 1, \dots$ herausgegriffene Werte sind und $p \leq q$ ist, so existiert in jedem der angegebenen Räume je eine lineare Operation $U(x)$, die diesen Raum auf seinen Teil abbildet, die Norm 1 besitzt und dabei ist die Anzahl der linear unabhängigen Nullstellen der Operation $x \rightarrow U(x)$ bzw. $x^* \rightarrow U^*(x^*)$ gleich p bzw. q .

Wir bemerken endlich, daß die Sätze 1 und 2 unter der zusätzlichen Bedingung, daß der Raum X separabel ist, wie auch der aus ihnen folgende Satz 3, unabhängig auf ganz anderem Wege früher von Herrn S. Banach bewiesen worden sind; diese Resultate sind noch nicht veröffentlicht.

⁹⁾ F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. XLI (1918) p. 71–98, insb. p. 96–98.

(Reçu par la Rédaction le 11. 10. 1929).

Sur la probabilité de la convergence de séries.

par

H. STEINHAUS (Lwów).

Première communication.

Il s'agit du problème suivant:

Étant donnée une suite de nombres complexes $\{a_n\}$, on demande quelle est la probabilité, que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\varphi_n} \quad (i = \sqrt{-1})$$

soit convergente, quand l'argument réel φ_n est déterminé par l'hasard; on suppose que la probabilité que φ_n appartienne à un ensemble (mesurable „L“) situé dans $\langle 0, 2\pi \rangle$ est égale à la mesure de cet ensemble divisée par 2π et que le choix de chacune des phases φ_n est indépendant du résultat des choix portant sur les autres phases φ_m ($m \neq n$).

Le théorème qui résout la question, dit que la probabilité cherchée est égale à l'unité, si la somme $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ est finie, et qu'elle est zéro, au cas contraire. Ce théorème — que nous voulons établir dans cette Note — est analogue au résultat d'un travail antérieur¹⁾; là il était question d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ à termes réels donnés et on cherchait la probabilité de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$, en supposant que l'hasard fournit les signes \pm

¹⁾ Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, Fund. Math. 4 (1923) p. 286–310.

avec une probabilité égale; un travail de M. H. Rademacher²⁾ sur un système orthogonal spécial permet de tirer la conclusion presque immédiate, que la condition $\sum c_n^2 < \infty$ est *suffisante* pour que la probabilité de la convergence soit 1. Le problème de telles séries a été repris plus tard avec quelques généralisations importantes par M. Khintchine et par M. Kolmogoroff³⁾, qui a montré la *nécessité* de la condition $\sum c_n^2 < \infty$: si cette condition n'est pas remplie, la probabilité de la convergence devient nulle.

Dans le travail actuel j'emploie les méthodes de M. Kolmogoroff dans le § 3 pour démontrer la convergence ou la divergence des séries orthogonales; or, ces séries ne sont plus celles de M. Rademacher. La „phase“ φ_n ayant, dans le cas actuel, tout un intervalle de valeurs possibles, j'étais conduit à attribuer à une suite $\{\varphi_n\}$ comme son image géométrique un point d'un espace cartésien à n_0 dimensions.⁴⁾ Ainsi la question d'une mesure dans cet espace s'imposait; j'ai résolu cette question au § 1 en établissant une correspondance entre les points d'un „cube“ de l'espace considéré d'une part et ceux d'un segment d'une droite de l'autre, par une sorte de „courbe de Peano“. Les équations, qui donnent cette „courbe“ sous une forme paramétrique, donnent le système orthogonal, dont les propriétés sont traitées au § 2.

Une objection se présente: on pourrait éliminer l'espace et introduire du début les fonctions orthogonales pour ramener le problème de la probabilité de la convergence d'une série numérique au problème de la mesure de l'ensemble des points de convergence d'une série de fonctions. Or, on verra que l'image spatial permet de prévoir les propriétés de fonctions orthogonales presque sans calculs. On pourrait objecter aussi que la notion de la probabilité est superflue, car les recherches aboutissent à des théorèmes d'analyse pure: contre cette objection il faut remarquer qu'il y a une infinité de systèmes orthogonaux (comme il y a une infinité de „courbes de Peano“ différentes) qui n'ont

²⁾ Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) p. 112—138; spécialement Chap. VI.

³⁾ Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Recueil Math. de Moscou 32 (1925) p. 668—677.

⁴⁾ Les topologues n'acceptent pas cette dénomination. Voir p. e. W. Hurewicz: Über unendlich-dimensionale Punktmengen, Proceedings of the Koninklijke Akad. van Wetenschappen te Amsterdam 31 (1928) p. 916—922.

en commun que la propriété de résoudre le même problème du calcul des probabilités. C'est donc bien ce problème — d'ailleurs fort naturel — qui doit être considéré comme essentiel.

§ 1.

La réduction du problème général des probabilités de suites à la théorie de la mesure.

En écrivant $\varphi_n = 2\pi\vartheta_n$, nous mettons la série sous la forme

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \vartheta_n}$$

avec $0 < \vartheta_n \leq 1$, et on a à déterminer la probabilité de la convergence de la série (1), étant admis que le choix de ϑ_n successifs est mutuellement indépendant et que la probabilité de $\vartheta_n \in \Theta_n$ est toujours égale à $|\Theta_n| = \text{mesure}(L)$ de Θ_n , Θ étant un ensemble mesurable (L), linéaire et contenu dans $\langle 0, 1 \rangle$, d'ailleurs quelconque.

Il s'agit donc de la probabilité que la suite $\{\vartheta_n\}$ appartienne à un certain *ensemble de suites*, (à savoir à la totalité de celles qui rendent (1) convergente). Or, même dans les raisonnements classiques, comme p. e. celui de la ruine de joueurs, on admet les postulats suivants, d'une manière plus ou moins explicite, qui ne sont qu'une „extrapolation logique“ de postulats classiques au cas où il y a un nombre infini d'épreuves:

1. La probabilité est un nombre nonnégatif fini.

2. La probabilité, pour que l'on ait simultanément

$$\vartheta_1 \in \Theta_1, \quad \vartheta_2 \in \Theta_2, \quad \dots \quad \vartheta_n \in \Theta_n, \quad (n \geq 1)$$

est égale à

$$|\Theta_1| \cdot |\Theta_2| \cdot \dots \cdot |\Theta_n|.$$

Ce postulat exprime en même temps l'hypothèse de la *probabilité élémentaire* de $\vartheta_n \in \Theta$ et l'hypothèse de l'*indépendance* des ϑ_n .

3. Si les ensembles de la suite $\{E_k\}$ sont disjoints et si la probabilité $\mu(E_k)$ de la relation $\{\vartheta_n\} \in E_k$ est déterminée pour tout k naturel, alors la probabilité $\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right)$ est déterminée et égale

à $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$. (Postulat de la *probabilité totale*).

4. Si $E_1 \supset E_2$ et $\mu(E_1)$ et $\mu(E_2)$ sont déterminées, alors $\mu(E_1 - E_2)$ est déterminée. (Postulat du complémentaire).

5. Si $\mu(E_1) = 0$ et $E_1 \supset E_2$, alors $\mu(E_2)$ est déterminée. (Postulat de la probabilité minima).

6. Si \mathfrak{R}^* est une classe des E telle qu'il est possible de définir $\mu(E)$ pour tous les E de \mathfrak{R}^* , en restant d'accord avec les postulats 1—5, et si \mathfrak{R} est le produit de tous les \mathfrak{R}^* jouissant de cette propriété, alors $\mu(E)$ n'est défini que pour les E de \mathfrak{R} . (Postulat de l'irréductibilité du champ).

Ce système diffère par la forme du postulat 2, du système donné dans un travail antérieur⁵⁾; la cause de cette différence est la structure du jeu: là c'était le *rouge et noir*, ici c'est la *roue continue*; dans les deux cas le nombre des épreuves est infini (\aleph_0).

Nous ferons voir plus tard que la fonction $\mu(E)$ est définie, par les postulats précédents, d'une manière univoque.

Maintenant nous allons quitter le problème spécial de la série (1), pour nous occuper seulement du problème général de la probabilité des ensembles de suites.

Faisons correspondre à toute suite $\{\mathcal{P}_n\}$ un point de l'espace d' \aleph_0 dimensions, en prenant les \mathcal{P}_n pour coordonnées de ce point; les ensembles E , dont on a parlé tout à l'heure et dont les éléments sont des suites, obtiendront des images géométriques. Ces images seront certains ensembles ponctuels situés dans un „cube“ de l'hyperespace, la longueur d'une arête quelconque du cube étant 1. La question de la probabilité est réduite dès lors à la détermination de la mesure des ensembles spatiaux ponctuels situés dans le cube. Si nous désignons les images des E par les mêmes lettres que les ensembles eux-mêmes et si nous appelons $\mu(E)$ la mesure de E , alors les postulats 1—6 pourront être interprétés comme conditions auxquelles est assujettie la solution du problème de la mesure.

Solution du problème de la mesure.

Établissons la correspondance suivante entre l'intervalle réel $(0, 1)$ d'une part et le cube de l'hyperespace d'autre part: si $\{\mathcal{P}_n\}$ sont les coordonnées d'un point du cube ($0 < \mathcal{P}_i \leq 1$; $i = 1, 2, \dots$) et si

⁵⁾ Le travail¹⁾.

$$\mathcal{P}_1 = [0, \mathcal{P}_{11} \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{13} \dots]_2$$

$$\mathcal{P}_2 = [0, \mathcal{P}_{21} \mathcal{P}_{22} \mathcal{P}_{23} \dots]_2$$

$$\mathcal{P}_3 = [0, \mathcal{P}_{31} \mathcal{P}_{32} \mathcal{P}_{33} \dots]_2$$

$$\mathcal{P}_{ik} = 0 \text{ ou } 1$$

sont leurs développements dyadiques infinis, on définira le point correspondant ξ de l'intervalle $(0, 1)$ par le développement dyadique infini

$$\xi = [0, \mathcal{P}_{11} \mathcal{P}_{21} \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{31} \mathcal{P}_{13} \dots \mathcal{P}_{k1} \mathcal{P}_{k-1,2} \dots \mathcal{P}_{1k} \dots]_2$$

et, inversement, un ξ étant donné par son développement dyadique infini

$$\xi = [0, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots]_2,$$

on pourra déterminer les \mathcal{P}_n en fonctions continues de ξ par les formules:

$$\mathcal{P}_1(\xi) = [0, \xi_1 \xi_3 \xi_5 \xi_{10} \dots]_2$$

$$\mathcal{P}_2(\xi) = [0, \xi_2 \xi_4 \xi_6 \xi_{14} \dots]_2$$

$$\mathcal{P}_3(\xi) = [0, \xi_4 \xi_8 \xi_{13} \xi_{19} \dots]_2$$

$$\dots \dots \dots$$

Quand on exclut de l'intervalle $0 < \xi \leq 1$ les ξ qui conduisent aux développements finis pour un $\mathcal{P}_j(\xi)$ quelconque (p. e. $\xi = 0, 101101110\dots$ qui fournit un développement fini pour $\mathcal{P}_2(\xi)$), on obtient une correspondance biunivoque entre le cube $\{0 < \mathcal{P}_i \leq 1\}$ et l'intervalle $0 < \xi \leq 1$ privé de certains points, qui forment un ensemble de mesure linéaire nulle; nous parlerons donc dans la suite d'un „intervalle diminué“; les fonctions $\mathcal{P}_i(\xi)$ seront définies presque partout dans $\langle 01 \rangle$.

Cette correspondance (qui utilise le fait que l'on peut ranger en suite simple les termes d'une suite double) nous met en état de définir la mesure des ensembles hyperspatiaux situés dans le cube: Nous attribuons par convention une mesure à ces ensembles E et seulement à ces ensembles E dont les images linéaires H possèdent une mesure lebesguienne linéaire $|H|$ et nous définissons la valeur $\mu(E)$ de cette mesure hyperspatiale en posant, par convention, $\mu(E) = |H|$.

Pour que la mesure ainsi définie puisse servir à calculer la probabilité, il faut et il suffit qu'elle remplisse les postulats 1—6. Or, 1, 3, 4 et 5 sont évidemment remplis, on n'aura donc qu'à vérifier 2 et 6.

Démonstration de 2. Pour obtenir l'image linéaire Ξ de l'ensemble X situé dans le cube et défini par

$$\mathcal{I}_1 \in \mathcal{O}_1, \mathcal{I}_2 \in \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{I}_n \in \mathcal{O}_n, \mathcal{I}_{n+1} \in (0, 1), \mathcal{I}_{n+2} \in (0, 1) \dots$$

* Il faut ranger de la manière décrite tout à l'heure les chiffres dyadiques de $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n, \dots$ en suite simple; on trouve ainsi le point ξ de Ξ correspondant au point $\{\mathcal{I}_i\}$ de X , selon la convention adoptée. Comme il est convenu aussi de poser $\mu(X) = |\Xi|$ et comme le postulat 2 exige que l'on ait

$$\mu(X) = |\mathcal{O}_1| \cdot |\mathcal{O}_2| \dots |\mathcal{O}_n|,$$

tout revient à démontrer que Ξ est mesurable (L) et que l'on a

$$|\Xi| = |\mathcal{O}_1| \cdot |\mathcal{O}_2| \dots |\mathcal{O}_n|.$$

Considérons le cas $n=1$; on aura à prouver que les nombres ξ , obtenus en mettant les chiffres successifs du développement infini d'un \mathcal{I}_1 ($\in \mathcal{O}_1$) à la 1^{re}, 2^{me}, 6^{me}... place et en disposant d'autres places de toutes les manières permises, constituent un ensemble Ξ de mesure égale à celle de \mathcal{O}_1 .

Simplifions encore la question, en supposant que \mathcal{O}_1 soit un intervalle „dyadique“ $\frac{p}{2^q} < \mathcal{I}_1 \leq \frac{p+1}{2^q}$ (p, q étant deux nombres naturels ou nuls et $p < 2^q$); le développement de \mathcal{I}_1 commencera par les chiffres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_q$ (les mêmes pour tous les \mathcal{I}_1 de \mathcal{O}_1). Quand on écrit

$$\xi = 0, \varepsilon_1 \square \varepsilon_2 \square \square \varepsilon_3 \square \square \square \varepsilon_4 \dots \varepsilon_q \square \dots \square \dots$$

et l'on remplit les places libres \square de toutes les manières permises, on obtient l'ensemble Ξ cherché; dans le cas spécial cet ensemble sera donc constitué de $2^{\frac{q(q-1)}{2}}$ segments égaux de longueur totale $\frac{1}{2^q} = |\mathcal{O}_1|$ ⁶⁾. Si \mathcal{O}_1 est une somme des intervalles dyadiques sans points communs (même une somme infinie), la généralisation du raisonnement est immédiate. On obtient aussi facilement à leur tour les \mathcal{O}_1 de mesure nulle et par des additions et soustractions tous les ensembles \mathcal{O}_1 mesurables (L). Le cas $n=1$ est donc établi.

Pour traiter le cas $n=2$, supposons d'abord que \mathcal{O}_1 est quelconque (mesurable (L)) et que \mathcal{O}_2 est l'intervalle $\frac{p}{2^q} < \mathcal{I} \leq \frac{p+1}{2^q}$.

⁶⁾ Les segments sont privés de certains points formant un ensemble de mesure nulle.

Cette fois-ci, l'image Ξ de X peut être obtenue en cherchant d'abord Ξ_1 , image de

$$X_1 \equiv \{\mathcal{I}_1 \in \mathcal{O}_1, \mathcal{I}_2 \in (01), \mathcal{I}_3 \in (01) \dots\},$$

et en remplissant certaines places libres dans les développements des éléments ξ_1 de Ξ_1 par $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$. Or, la mesure de Ξ_1 est $|\mathcal{O}_1|$, comme il a été établi. Il suffira donc à démontrer qu'en écrivant toujours $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_q$ à la 2^{me}, 5^{me}, 9^{me}... place du développement des ξ_1 (au lieu d'y écrire toutes les séquences permises), l'ensemble Ξ obtenu aura une mesure 2^q fois plus petite, à savoir

$$|\Xi| = \frac{1}{2^q} |\Xi_1| = |\mathcal{O}_1| \cdot |\mathcal{O}_2|,$$

(la deuxième égalité étant évidente). Supposons $q=1$; nous avons à faire voir qu'en fixant un chiffre libre, on réduit à la moitié la mesure d'un ensemble. Or cela est évident, car ν étant l'indice du chiffre libre, les ensembles

$$\{\dots 0 \dots\}_{1, 2, \dots, \nu} \text{ et } \{\dots 1 \dots\}_{1, 2, \dots, \nu}$$

sont congruents, disjoints (à un ensemble de mesure nulle près) et leur somme donne l'ensemble primitif. On achève la démonstration comme pour $n=1$. L'induction permet à étendre la conclusion à tout n fini.

Démonstration de 6. Il faut prouver que la classe \mathcal{R} des ensembles E mesurables selon la nouvelle définition directe est contenue dans toute classe \mathcal{R}^* remplissant 1—5. Supposons donc que l'on ait trouvé une classe \mathcal{R}^* et une fonction d'ensemble $\mu^*(E)$ définie pour tout E de \mathcal{R}^* , de manière que les postulats 1—5 soient remplis par μ^* et \mathcal{R}^* . Je dis que $\mathcal{R}^* \supset \mathcal{R}$ et que $\mu^*(E) = \mu(E)$ pour $E \in \mathcal{R}$; μ signifie maintenant la mesure selon la définition directe. De ce fait, la mesure adoptée pour l'hyperespace apparaît comme une solution unique du problème.

Considérons un ensemble \hat{E} hyperspatial, dont les points ont pour coordonnées

$$\begin{array}{l} \mathcal{I}_1 = 0, \xi_1 \xi_2 \dots / \dots \\ \mathcal{I}_2 = 0, \xi_4 \xi_5 \dots / \dots \\ \mathcal{I}_3 = 0, \xi_4 \xi_5 \dots / \dots \\ \dots \dots \dots \xi_q / \dots \\ \mathcal{I}_n = 0, \dots \dots \dots / \dots \end{array}$$

les chiffres $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q$ étant données et les autres variant de toutes les manières possibles. On voit que ϑ_1 parcourt un intervalle dyadique Θ_1 , de même $\vartheta_2 \dots$ jusqu'à un certain ϑ_n , tandis que $\vartheta_{n+1}, \vartheta_{n+2} \dots$ sont libres dans (01) . On a donc

$$\hat{E} \equiv \{\vartheta_1 \in \Theta_1, \vartheta_2 \in \Theta_2, \dots, \vartheta_n \in \Theta_n, \vartheta_{n+1} \in (01) \dots\},$$

les Θ étant mesurables, il faut donc que \hat{E} appartienne à \mathfrak{R}^* selon le postulat 2, et que l'on ait

$$\mu^*(\hat{E}) = |\Theta_1| \cdot |\Theta_2| \dots |\Theta_n| = \frac{1}{2^q}$$

(cette dernière égalité résultant immédiatement de la définition des Θ). D'autre part, la correspondance, établie entre les points du „cube“ et ceux du segment, qui sert à définir $\mu(E)$, fait correspondre à \hat{E} l'ensemble $\hat{\xi}$, dont les éléments ξ

$$\xi = 0, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_q \dots$$

ont tous les mêmes q premières chiffres, les suivants étant libres (sauf la restriction mentionnée au début). $\hat{\xi}$ est donc un intervalle dyadique de longueur $\frac{1}{2^q}$ (diminué d'un certain ensemble de mesure nulle). On a donc

$$\mu(\hat{E}) = |\hat{\xi}| = \frac{1}{2^q} \mu^*(\hat{E}).$$

En employant les postulats 1—5, on démontre l'existence des E dans \mathfrak{R}^* dont les images linéaires sont tous les ensembles lebesguiens (diminués), et chaque fois $\mu^*(E)$ est égale à la mesure (L) de l'image $\hat{\xi}$. D'autre part, la correspondance biunivoque fait correspondre aux ensembles lebesguiens linéaires (diminués) tous les E de \mathfrak{R} . On a donc bien $\mathfrak{R}^* \supset \mathfrak{R}$ et $\mu^*(E) = \mu(E)$ pour $E \in \mathfrak{R}$, c. q. f. d.

Il faut remarquer que tous les raisonnements subsistent, si l'on introduit les fonctions $\vartheta(\xi)$ par d'autres formules que (2), pourvu que la définition utilise la possibilité de ranger la suite double des chiffres en suite simple.

§ 2.

Les fonctions orthogonales et leurs propriétés.

La question de la valeur que l'on doit attribuer à la probabilité de la convergence de la série

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \vartheta_n}$$

a été ramenée dans le § précédant à la mensuration de l'ensemble C de ces points du „cube“, dont les coordonnées

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_n \dots$$

rendent (1) convergente. Cette mensuration a été effectuée (théoriquement) par l'intermédiaire de fonctions (2) qui font correspondre à tout ensemble lebesguien linéaire Ξ (diminué) un ensemble spatial E (mesurable selon la convention adoptée). Il n'y a donc qu'à déterminer un $\Xi \equiv K$ qui aurait C pour son image spatiale. Or, ce que nous disons, n'est qu'une autre manière de poser la question suivante:

Quel est l'ensemble Ξ des points de convergence ξ de la série de fonctions

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \vartheta_n(\xi)},$$

les $\vartheta_n(\xi)$ étant définies par (2)?

Nous aurons donc à étudier les propriétés de fonctions complexes

$$f_n(\xi) \equiv e^{2\pi i \vartheta_n(\xi)}$$

de la variable réelle ξ .

Trois relations, qui démontrent que ces fonctions sont *orthogonales et normées*¹⁾ et qui résument d'autres propriétés utiles dans la suite, sont les suivantes:

Si Z est l'ensemble des ξ vérifiant les inégalités simultanées

$$(4) \quad |F_j(f_1, f_2 \dots f_k)| \leq d_j (\geq d_j) \quad (j=1, 2 \dots k),$$

F_j étant le symbole d'une fonction analytique (p. e. linéaire), régulière pour $|f_p| \leq 1$ ($p=1 \dots k$), alors

¹⁾ Cela veut dire telles que l'on ait $\int_0^1 f_m(\xi) \overline{f_n(\xi)} d\xi = 1$ ou 0, selon que

$m=n$ ou $m \neq n$; \overline{f} est conjuguée à f .

$$(5) \quad \int_Z f_m(\xi) \bar{f}_n(\xi) d\xi = 0 \text{ pour } m \neq n, m > k^8),$$

$$(6) \quad \int_Z f_m(\xi) \bar{f}_n(\xi) d\xi = |Z| \text{ pour } m = n \leq k,$$

$$(7) \quad \int f_m(\xi) d\xi = 0 \text{ pour } m > k.$$

Démonstration de (5) (6) et (7).

La relation (6) est évidente, car $f_m \cdot \bar{f}_m = 1$. Pour évaluer l'intégrale (7)

$$\int_Z f_m(\xi) d\xi = \int_Z e^{2\pi i \vartheta_m(\xi)} d\xi,$$

nous l'approchons par la somme

$$\sum_{p=0}^{2h-1} |ZE_p| e^{2\pi i \frac{p}{2h}},$$

h étant grand et E_p étant un ensemble des ξ défini par

$$\frac{p}{2h} \leq \vartheta_m(\xi) < \frac{p+1}{2h}.$$

Si l'on savait que

$$(8) \quad |ZE_p| = |ZE_{p+h}| \quad (p=0, 1, \dots, h-1),$$

on pourrait écrire la somme sous la forme

$$\sum_{p=0}^{h-1} |ZE_p| \left(e^{2\pi i \frac{p}{2h}} + e^{2\pi i \frac{p+h}{2h}} \right) = \sum_{p=0}^{h-1} |ZE_p| \cdot 0 = 0$$

qui conduit immédiatement à la relation (7).

Pour vérifier (8), remarquons que l'image spatial Z de l'ensemble linéaire Z est défini par des inégalités (4) qui ne portent que sur les coordonnées $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ et que m est $> k$. Le produit ZE_p est donc un „cylindre“ dont la „base“ est un ensemble k -dimensionnel (Z) ayant une mesure lebesguienne k -dimensionnelle (ordinaire) et dont la „hauteur“ parallèle à ϑ_m est $\frac{1}{2h}$. Or, la nouvelle mesure de ZE_p est égale à la mesure $(k+1)$ -dimensionnelle de ce „cylindre“ (comme il suit aisément des postulats 1—6

⁸⁾ \bar{a} signifie le nombre conjugué à a

en remarquant que la mesure nouvelle est égale à la mesure ordinaire pour les parallélépipèdes d'un nombre fini de dimensions) qui est égale à la mesure ordinaire de la „base“ multipliée par la „hauteur“. Or, cette mesure de la „base“ est égale à la mesure nouvelle (cf. la parenthèse précédente) qui est égale — selon la convention — à $|Z|$ en désignant par ce symbole la mesure lebesguienne de l'ensemble linéaire Z (comme dans les formules (6) et suivantes). Il s'ensuit que la nouvelle mesure du „cylindre“ est égale à

$$\frac{1}{2h} |Z|.$$

D'autre part, cette mesure est $|ZE_p|$ selon la convention. On aura donc

$$|ZE_p| = \frac{1}{2h} |Z|.$$

Un raisonnement presque identique donne la même valeur $\frac{1}{2h} |Z|$ au symbole $|ZE_{p+h}|$, ce qui implique (8).

L'intégrale (5) est égale à

$$\int_Z e^{2\pi i [\vartheta_m(\xi) - \vartheta_n(\xi)]} d\xi,$$

elle est donc la limite pour $h \rightarrow \infty$ de sommes

$$(9) \quad \sum_{p=-2h}^{2h-1} |G_p Z| e^{2\pi i \frac{p}{2h}},$$

les ensembles disjoints G_p étant définis par les inégalités

$$\frac{p}{2h} \leq \vartheta_m(\xi) - \vartheta_n(\xi) < \frac{p+1}{2h} \quad (p = -2h, -2h+1, \dots, 0, 1, \dots, 2h-1).$$

En écrivant la somme (9) sous la forme

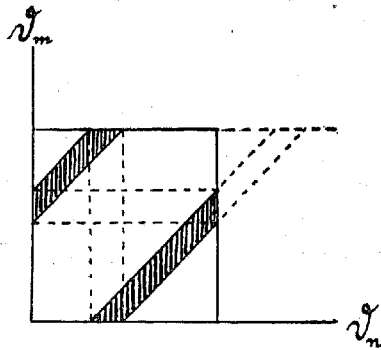
$$\sum_{p=0}^{2h-1} (|G_p Z| + |G_{p-2h} Z|) e^{2\pi i \frac{p}{2h}} = \sum_{\nu=1}^{2h-1} \lambda_\nu e^{2\pi i \frac{\nu}{2h}},$$

on voit que l'on pourrait l'identifier à

$$\lambda_0 \sum_{p=0}^{2h-1} e^{2\pi i \frac{p}{2h}} = 0,$$

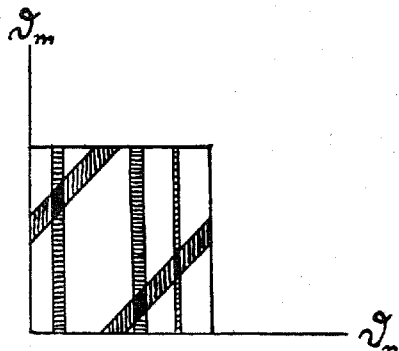
si l'on savait que les facteurs

$$\lambda_\nu = |G_\nu Z| + |G_{\nu-2h} Z|$$



(fig. 1)

un autre trapèze, et la somme des aires (planes) de ces deux trapèzes disjoints est $\frac{1}{2^h}$, comme on vérifie en faisant le dessin (fig. 1).



(fig. 2)

produit du „cylindre“ par Z ; or, dans les inégalités qui définissent Z , la coordonnée \mathcal{J}_m n'intervient pas, car $m > k$; il s'ensuit que si un point appartient à Z , tout le segment parallèle à l'axe \mathcal{J}_m (contenu dans le „cube“) et passant par ce point appartient à Z . Coupons le produit $(G_p + G_{p-2^h})Z$ par un plan parallèle à $(\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n)$ et désignons ce profil (fig. 2).

Les deux trapèzes obliques sont l'image du profil de $G_p + G_{p-2^h}$, les colonnes verticales (parallèles à l'axe \mathcal{J}_m) sont l'image du profil de Z , l'aire noircie est l'image du profil du produit. L'aire (L) plane de ce profil est donc égale à la largeur totale de colonnes multipliée par l'épaisseur verticale de trapèzes qui

ne changent pas avec p . La relation (5) serait alors établie. Or, quand on considère, dans le „plan“ $(\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n)$ de l'hyper-espace, l'ensemble-image spatial G_p de G_p , qui est défini par l'inégalité double

$$\frac{p}{2^h} \leq \mathcal{J}_m - \mathcal{J}_n < \frac{p+1}{2^h},$$

$$(0 \leq \mathcal{J}_m < 1, 0 \leq \mathcal{J}_n < 1)$$

on obtient comme profil un trapèze, tandis que G_{p-2^h} fournit

$G_p + G_{p-2^h}$ est donc un „cylindre“ dont la base est une figure plane de l'aire $\frac{1}{2^h}$, et l'„hauteur“ dans toutes les directions orthogonales à $(\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n)$ est 1. En mettant λ_p sous la forme

$$(10) \quad |(G_p + G_{p-2^h})Z|$$

(ce qui est licite, car les G_p sont disjoints), nous voyons que nous avons à étudier le

est $\frac{1}{2^h}$; la largeur de colonnes ne dépend que de Z , de manière que l'aire du profil ne dépend pas de p ; cette indépendance ayant lieu dans tous les plans parallèles à $(\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n)$, on conclut par le „principe de Cavalieri“ que la mesure spatiale (10) ne dépend non plus de p . (Le principe est applicable, car le produit $(G_p + G_{p-2^h})Z$ est défini par des inégalités analytiques portant sur un nombre fini de coordonnées \mathcal{J}_n , ce qui fait qu'au lieu de la nouvelle mesure on peut considérer la mesure lebesguienne n -dimensionnelle (n étant fini) en ignorant les coordonnées „libres“ d'indice $> n$; or, le principe de Cavalieri s'applique à cette mesure (L)).

Au cas spécial où Z est l'intervalle $0 \leq \xi \leq 1$, les démonstrations deviennent plus simples et conduisent évidemment aux relations

$$(11) \quad \int_0^1 f_m(\xi) \bar{f}_n(\xi) d\xi = 0 \text{ pour } m \neq n,$$

$$(12) \quad \int_0^1 |f_m(\xi)|^2 d\xi = 1,$$

$$(13) \quad \int_0^1 f_m(\xi) d\xi = 0.$$

La suite $\{f_n\}$ est donc orthogonale et normée.

§ 3.

La démonstration du résultat principal.

Le problème posé au début a été réduit par le § 1 à la question de la convergence de la série orthogonale

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \mathcal{J}_n(\xi)}.$$

Le théorème énoncé au début sera donc établi complètement, si l'on démontre que

(I) la mesure de l'ensemble C de points ξ rendant convergente la série (14) est 1 au cas où la somme

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

est finie et que

(II) la mesure de C est nulle au cas contraire.

Démonstration de I.

Soit D l'ensemble de la divergence de (14) et $|D| > 0$.

Écrivons par définition

$$s_p(\xi) = \sum_{k=1}^p a_k f_k(\xi).$$

* Il existe une constante $c > 0$ et un ensemble D_c de mesure positive tel que

$$(16) \quad \limsup_{p \rightarrow \infty} |s_p(\xi) - s_n(\xi)| > c,$$

quelque soit $\xi \in D_c$ et n . En effet, en supposant le contraire, on aurait pour tout $c > 0$

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} |s_p(\xi) - s_{n(c)}(\xi)| \leq c$$

presque partout, donc

$$|s_p(\xi) - s_q(\xi)| < 3c$$

presque partout pour $p > q > q_c$; c étant arbitraire, cela implique déjà la convergence presque partout de la série (14), contre l'hypothèse $|D| > 0$.

En fixant $n = n_0$ dans (16), on obtient

$$(17) \quad |s_p(\xi) - s_{n_0}(\xi)| > c$$

pour tout $\xi \in D_c$ et pour $p = p(\xi)$. Si D^* désigne l'ensemble de tous les ξ pour lesquels il est possible de trouver un $p(\xi)$ vérifiant (17), on aura

$$|D^*| \geq |D_c| > 0.$$

Définissons les ensembles Z_1, Z_2, Z_3, \dots par les conditions caractéristiques

$$(18)_1 \quad |s_{n_0+1}(\xi) - s_{n_0}(\xi)| > c \text{ pour } \xi \in Z_1,$$

$$(18)_2 \quad |s_{n_0+2}(\xi) - s_{n_0}(\xi)| > c \text{ pour } \xi \in Z_2, Z_1 \times Z_2 = \emptyset,$$

$$(18)_3 \quad |s_{n_0+3}(\xi) - s_{n_0}(\xi)| > c \text{ pour } \xi \in Z_3, Z_1 \times Z_3 = Z_2 \times Z_3 = \emptyset,$$

.....
 \emptyset désignant l'ensemble vide.

On aura

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k = D^*, \quad Z_j \times Z_k = \emptyset \quad (j \neq k),$$

donc, pour k assez grand,

$$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k| > 1/2 |D^*| > 0.$$

Si $k > j$, alors

$$\begin{aligned} \int_{Z_j} |s_{n_0+k} - s_{n_0}|^2 d\xi &= \int_{Z_j} |(s_{n_0+k} - s_{n_0+j}) + (s_{n_0+j} - s_{n_0})|^2 d\xi = \\ &= \int_{Z_j} |s_{n_0+k} - s_{n_0+j}|^2 d\xi + \int_{Z_j} |s_{n_0+j} - s_{n_0}|^2 d\xi, \end{aligned}$$

car

$$(19) \quad \int_{Z_j} (s_{n_0+k} - s_{n_0+j}) \overline{(s_{n_0+j} - s_{n_0})} d\xi = 0$$

et

$$(19') \quad \int_{Z_j} \overline{(s_{n_0+k} - s_{n_0+j})} (s_{n_0+j} - s_{n_0}) d\xi = 0.$$

En effet, l'intégrale (19) est une somme de termes

$$a_m \overline{a_n} \int_{Z_j} f_m(\xi) \overline{f_n(\xi)} d\xi,$$

avec $m > n_0 + j$, Z_j étant défini par des inégalités (18)₁... (18)_j portant sur les $f_1, f_2, \dots, f_{n_0+j}$; (5) implique donc (19) et (19'). Il résulte de ce qui précède et de (18)

$$\int_{Z_j} |s_{n_0+k} - s_{n_0}|^2 d\xi \geq \int_{Z_j} |s_{n_0+j} - s_{n_0}|^2 d\xi \geq c^2 |Z_j|,$$

donc, à cause de (11) et (12),

$$\begin{aligned} |a_{n_0+1}|^2 + |a_{n_0+2}|^2 + \dots + |a_{n_0+k}|^2 &= \int_0^1 |s_{n_0+k} - s_{n_0}|^2 d\xi \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^k \int_{Z_j} |s_{n_0+k} - s_{n_0}|^2 d\xi \geq c^2 \sum_{j=1}^k |Z_j| \geq 1/2 c^2 |D^*| > 1/2 c^2 |D_c| > 0 \end{aligned}$$

et, à fortiori,

$$(20) \quad \sum_{q=n_0+1}^{\infty} |a_q|^2 > 1/2 c^2 |D_c| > 0.$$

Or, c et D_c ont été définis indépendamment de n_0 , (20) est donc une inégalité vraie pour tout n_0 , ce qui implique la divergence de la série numérique (15).

Démonstration de II.

Supposons que la série (14) soit convergente dans un ensemble C^* de mesure positive. (Cela implique $a_n \rightarrow 0$, car $|f_n(\xi)| = 1$). Il existe un ensemble C , partie de C^* , de mesure positive, dans lequel la convergence de (14) est uniforme⁹⁾; il existe par conséquent un nombre d tel que

$$|s_k(\xi)| < d,$$

quelque soit $\xi \in C$ et k naturel.

Soit C_k l'ensemble où l'on a simultanément

$$|s_1(\xi)| < d, |s_2(\xi)| < d, \dots, |s_k(\xi)| < d,$$

et C_0 l'ensemble $\langle 01 \rangle$; on aura

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots, \prod_1^{\infty} C_k \supset C,$$

donc

$$|\prod_1^{\infty} C_k| \geq |C| > 0.$$

Posons maintenant $F_k = C_k - C_{k+1}$ et calculons l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{C_{k+1}} \int_{C_{k+1}} |s_{k+1}(\xi) - s_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta &= \int_{C_k} \int_{C_k} |s_{k+1}(\xi) - s_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta - \\ - 2 \int_{C_{k+1}} \int_{F_k} |s_{k+1}(\xi) - s_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta &- \int_{F_k} \int_{F_k} |s_{k+1}(\xi) - s_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \int_{C_k} \int_{C_k} |s_{k+1}(\xi) - s_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta &= \int_{C_k} \int_{C_k} |s_k(\xi) - s_k(\eta)|^2 d\xi d\eta + \\ + \int_{C_k} \int_{C_k} |a_{k+1} f_{k+1}(\xi) - a_{k+1} f_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta \end{aligned}$$

car l'intégrale

$$\int_{C_k} f_{k+1}(\xi) \overline{s_k(\xi)} d\xi$$

⁹⁾ Théorème de Egoroff. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, 152 (1911) p. 244-246.

disparaît, suivant la relation (5) démontrée au § 2. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &= \int_{C_{k+1}} \int_{C_{k+1}} |s_{k+1}(\xi) - s_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta - \int_{C_k} \int_{C_k} |s_k(\xi) - s_k(\eta)|^2 d\xi d\eta = \\ &= \int_{C_k} \int_{C_k} |a_{k+1} f_{k+1}(\xi) - a_{k+1} f_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta - 2 \int_{C_{k+1}} \int_{F_k} |s_k(\xi) - s_k(\eta) + \\ &+ a_{k+1} f_{k+1}(\xi) - a_{k+1} f_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta - \int_{F_k} \int_{F_k} |s_k(\xi) - s_k(\eta) + \\ &+ a_{k+1} f_{k+1}(\xi) - a_{k+1} f_{k+1}(\eta)|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Tenant compte de ce que

$$(21) \quad \int_{C_k} f_{k+1}(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{C_k} |f_{k+1}(\xi)|^2 d\xi = |C_k|,$$

suivant (6) et (7), on obtient, en désignant par a un nombre plus grand que tous les $|a_k|$,

$\mathcal{A}_k \geq 2|a_{k+1}|^2 \cdot |C_k|^2 - 2(2d+2a)^2 |C_{k+1}| \cdot |F_k| - (2d+2a)^2 \cdot |F_k|^2$; ici la première de trois intégrales doubles composant \mathcal{A}_k a été calculée à l'aide de (21), tandis que les autres ont été majorées en utilisant l'inégalité $|s_k| < d$ qui s'applique ici, C_{k+1} et F_k étant contenus dans C_k . On aura donc a fortiori

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_k &\geq 2|a_{k+1}|^2 \cdot |C_k|^2 - (2d+2a)^2 \cdot [(|C_{k+1}| + |F_k|)^2 - |C_{k+1}|^2] \\ &\geq 2|a_{k+1}|^2 \cdot |C|^2 - 4(d+a)^2 [|C_k|^2 - |C_{k+1}|^2]. \end{aligned}$$

En faisant la somme de différences \mathcal{A}_k

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \int_{C_1} |s_1(\xi) - s_1(\eta)|^2 d\xi d\eta + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{n-1} &= \\ = \int_{C_n} \int_{C_n} |s_n(\xi) - s_n(\eta)|^2 d\xi d\eta \end{aligned}$$

et en appliquant (22), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{C_n} \int_{C_n} |s_n(\xi) - s_n(\eta)|^2 d\xi d\eta &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{A}_k \geq 2|C|^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - \\ - 4(d+a)^2 [|C_1|^2 - |C_n|^2], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$4|C_n|^2 d^2 \geq 2|C|^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - 4(d+a)^2,$$

$$|C|^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq 2d^2 + 2(d+a)^2.$$

L'hypothèse $|C| > 0$ conduit immédiatement à

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty,$$

c. q. f. d.

Une interprétation géométrique du résultat obtenu est la suivante:

Quant un point mobile parcourt une ligne brisée dont les côtés successifs sont donnés quant à leurs longueurs, mais dont les directions (dans le plan) dépendent du hasard, toutes étant également probables et indépendantes une des autres, alors la probabilité pour que le point tende vers une position-limite est 1, si la somme de carrés de longueurs est finie, et 0 si cette somme est infinie. Dans ce dernier cas on peut même dire qu'il est „presque certain“ (probabilité = 1) qu'il s'éloigne indéfiniment du point initial (limite supérieure de la distance = ∞). Pour obtenir cette interprétation, il suffit de considérer les a_n comme les longueurs des vecteurs dans le plan et φ_n comme leurs arguments; les sommes $\sum_1^n a_k e^{i\varphi_k}$ donnent alors le vecteur de la position du mobile, après qu'il ait parcouru n côtés. Pour voir que le point s'éloigne indéfiniment (avec une probabilité 1) quand $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$, il faut remarquer que la démonstration II de ce § utilise le fait que $|s_k(\xi)| < d$ dans C et $|C| > 0$, et qu'elle prouve l'incompatibilité de ce fait avec la divergence de $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$; ainsi il est démontré que l'on a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |s_k(\xi)| = \infty$$

presque partout. On a donc, au cas $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$,

$$\limsup \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{i\varphi_k} \right| = \infty$$

avec une probabilité égale à l'unité.

Une généralisation pour le cas où l'on choisi au hasard la direction du vecteur-unité j_n , toutes les directions de l'espace à trois dimensions étant également probables et où l'on considère l'effet de tels choix sur l'allure de la série $\sum a_n j_n$, les a_n étant donnés, ne serait pas, sans doute, sans applications physiques.

En suivant le procédé employé par M. Rademacher dans ses études sur les séries orthogonales¹⁰⁾, on peut démontrer que l'on a presque partout

$$\sum_{k=1}^n f_k(\xi) = O(n^{1/2} (\log n)^{1/2+\epsilon}),$$

ce qui permet de formuler un théorème correspondant sur la somme $\sum_{k=1}^n e^{i\varphi_k}$ en employant le langage du calcul des probabilités. La démonstration est une application immédiate d'un théorème de Kronecker à la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^{-1/2} (\log n)^{-1/2-\epsilon} f_k(\xi)$$

qui est convergente presque partout. La question se pose, s'il est possible d'étendre à la „roue continue“ les résultats obtenus par M. Khintchine pour le jeu alternatif („rouge et noir“), en particulier, s'il est possible de démontrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n e^{i\varphi_k}}{\sqrt{2n \log \log n}}$$

est une constante positive avec une probabilité 1¹¹⁾.

¹⁰⁾ Mémoire²⁾.

¹¹⁾ Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. 6 (1924) p. 9–20.

(Reçu par la Rédaction le 24. 10. 1929).